ECS 3 : CONCOURS BLANC

le mardi 16 juin 2015

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie, et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1: `Escp E 99`

On considère l'application S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = J\,M\,J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer J^2. En déduire que J est inversible et exprimer J^{-1}.
   (b) Montrer que l'application S ainsi définie est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'automorphisme réciproque de S ?
   (c) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$
2. On considère les éléments $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que (I, J, K, L) forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice représentant l'automorphisme S dans la base (I, J, K, L).
3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = M$ et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des éléments M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$(R) vérifiant $S(M) = -M$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admettra qu'il en est de même pour $\mathcal{G}$.
   (b) Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathcal{F}$ et $M_- \in \mathcal{G}$. Qu'en déduit-on ?
   (c) A titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
4. (a) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$. Que peut-on dire du produit de deux éléments de $\mathcal{G}$?
   (b) Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_-.