

Eléments de correction du concours blanc

Exercice 1:

1. (a) $J^2 = I$ donc $J \times J = I$ donc J est inversible d'inverse $J^{-1} = J$.
 (b) Il suffit de montrer la linéarité : pour tout M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α réel,
 $S(\alpha M + N) = J(\alpha M + N)J = \alpha JMJ + JNJ = \alpha S(M) + S(N)$.
 Noyau de S : Soit $M \in \text{Ker } S$. Alors $JMJ = 0 \Rightarrow$ (mult. à droite par J^{-1}) $JM = 0 \Rightarrow M = 0$.
 Donc $\text{Ker } S = \{0\}$ et S est injective. Comme on est en dimension finie, S est bijective.
 Automorphisme réciproque : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On résout $S(M) = A$.
 Or $JMJ = A \Leftrightarrow M = J^{-1}AJ^{-1} = JAJ = S(A)$. D'où $S^{-1} = S$.
 (ou réaliser que $J^2 = I \Rightarrow S \circ S = \text{id}$ d'où S est bijective de réciproque $S^{-1} = S$!)
- (c) pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $S(M)S(N) = JMJNJ = JMINJ = JMNJ = S(MN)$ car $J^2 = I$.
2. Soient x, y, z et t réels tels que $xI + yJ + zK + tL = 0$. Alors $\begin{cases} x+z=0 & x-z=0 \\ y+t=0 & y-t=0 \end{cases}$ d'où $x=y=z=t=0$
 Donc la famille est libre de cardinal 4 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4, donc est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. $S(I) = JIJ = J^2 = I$, $S(J) = J^3 = J$ et après calculs, on trouve $S(K) = \dots = -K$ et $S(L) = \dots = -L$.

La matrice de S dans la base (I, J, K, L) est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. (a) $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et comme $S(0) = 0$ car S est linéaire, on trouve $0 \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
 Soit $M, N \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: comme S est linéaire, $S(\lambda M + N) = \lambda S(M) + S(N) = \lambda M + N$ (car $M, N \in \mathcal{F}$).
 D'où $\lambda M + N \in \mathcal{F}$.
- (b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on raisonne par analyse et synthèse.
 Supposons qu'une telle décomposition existe alors $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathcal{F}$ et $M_- \in \mathcal{G}$.
 On en déduit (par linéarité) que $S(M) = S(M_+) + S(M_-) = M_+ - M_-$ d'où (système à 2 équations 2 inconnues) $M_+ = \frac{1}{2}(M + S(M))$ et $M_- = \frac{1}{2}(M - S(M))$. D'où l'unicité.
 Synthèse : soit à présent $M_+ = \frac{1}{2}(M + S(M))$ et $M_- = \frac{1}{2}(M - S(M))$. Ces valeurs conviennent-elle ?
 $S(M_+) = \frac{1}{2}[S(M) + S(S(M))]$ et comme $S \circ S = \text{id}$, on obtient $S(M_+) = \frac{1}{2}(S(M) + M) = M_+$ donc $M_+ \in \mathcal{F}$.
 De même $S(M_-) = -M_-$ et $M_- \in \mathcal{G}$; et on a bien $M_+ + M_- = M$.
 Conclusion : M_+ et M_- existent et sont uniques. On en déduit que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (c) Après calculs, on trouve $S(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Donc $A_+ = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et
 $A_- = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
5. (a) Par 1.c) si $M, N \in \mathcal{F}$ alors $S(MN) = S(M)S(N) = MN$ donc $MN \in \mathcal{F}$.
 Si M et N appartiennent à $\mathcal{G}$ alors $S(MN) = -M(-N) = MN$ donc $MN \in \mathcal{F}$.
 et si l'un est dans $\mathcal{F}$ et l'autre dans $\mathcal{G}$, le produit est dans $\mathcal{G}$.
- (b) Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $MN = (M_+ + M_-)(N_+ + N_-) = M_+N_+ + M_+N_- + M_-N_+ + M_-N_-$
 $= (M_+N_+ + M_-N_-) + (M_+N_- + M_-N_+)$. Or par 4.a) et 5.a) $(M_+N_+ + M_-N_-) \in \mathcal{F}$ et
 $(M_+N_- + M_-N_+) \in \mathcal{G}$ donc par unicité d'une telle décomposition, on obtient
 $(MN)_+ = M_+N_+ + M_-N_-$ et $(MN)_- = M_+N_- + M_-N_+$

Exercice 2:

1. (a) Montrons que f est un endomorphisme de E :
 * Pour tout couple (P_1, P_2) de E , tout réel λ , $f(\lambda P_1 + P_2)(X) = -nX(\lambda P_1 + P_2)(X) + X^2(\lambda P_1' + P_2')(X)$
 $= \lambda(-nXP_1(X) + X^2P_1'(X)) + (-nXP_2(X) + X^2P_2'(X)) = \lambda f(P_1)(X) + f(P_2)(X)$ donc f est linéaire
 * De plus, si $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$, alors
 $f(P)(X) = -na_nX^{n+1} - na_{n-1}X^n - \dots - na_1X^2 - na_0X + X^2(na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_1)$
 $= 0 - a_{n-1}X^n + \dots + (1-n)a_1X^2 - na_0X \in \mathbb{R}_n[X]$
 ce qui confirme que f est bien un endomorphisme de E .
- (b) On a $f(1) = -nX$, $f(X) = (1-n)X^2$, et plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(X^k) = (k-n)X^{k+1}$.
 En particulier, $f(X^n) = 0$. On en déduit que dans la matrice M , les seuls coefficients non-nuls sont sur la "sous" diagonale qui contient les coefficients $-n, 1-n, 2-n, \dots, -1$.
 Comme la matrice M est triangulaire avec des 0 sur la diagonale, M n'est pas inversible donc f n'est pas bijectif.
- (c) $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^{n-1}), f(X^n)) = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$ donc $\text{rg}(f) = n$ (sous famille de la base canonique, donc libre).