`

Mathématiques

(poly illustré de cours)

ECS 1ère année

Olivier Binda

30 août 2018

1 Avant propos

Alphabet grec Il faut maitriser les lettres grecques utilisées en ECS (en noir), classée ici par ordre décroissant d'usage :

π	Π	pi	Produits	ϑ	Θ	theta
σ	Σ	sigma	Sommes	φ	Φ	phi
λ	Λ	lambda	Espaces vectoriels	ζ	Z	zeta
μ	M	mu	Espaces vectoriels	η	H	eta
ω	Ω	omega	Probabilités	ξ	Ξ	xi
ε	E	epsilon	Limites	o	O	omicron
γ	Γ	gamma	Probabilités	ρ	P	rho
δ	Δ	delta		ψ	Ψ	psi
α	A	alpha		τ	T	tau
β	B	beta				

– Les lettres grecques grisées ne sont (quasiment) pas utilisées en ECS.

symboles Pour écrire les propositions logiques, un certain nombre de symboles mathématiques sont utilisés, qui sont comme des abbréviations de morceaux de phrases

Symbole	**Signification**
$\in$	« élément de », « dans » ou « appartient à »
$\forall$	« pour chaque », « pour tout » ou « quel que soit »
$\exists$	« il existe » ou « on peut trouver »
!	« unique » ou « un et un seul »
$\Rightarrow$	« implique »
$\Leftrightarrow$	« équivaut à » ou « si et seulement si »
:	« tel que » ou « pour lequel »
$\{\cdots\}$	« ensemble »

cours Un cours de mathématiques est généralement constitué de

- définitions, notations, conventions
  - les admettre (*elles ne comportent rien à prouver*)
  - les mémoriser.
- théorèmes, propriétés, corollaires, lemme :

  - les mémoriser (*on les apprends en les utilisant*).
  - apprendre à les utiliser (*via exercices, tds, dls, colles et (trop tard !) ds*).
- preuves, démonstrations :
  - les comprendre (*augmente la capacité à comprendre des choses complexes, améliore la compréhension du cours de maths*).
  - les vérifier (*augmente la rigueur, la capacité de trouver les erreurs et de déterminer si une preuve est juste sans l'intervention d'un professeur*).
  - retenir les idées importantes susceptibles de resservir.

- méthodes, algorithmes :
  - Les mémoriser (*comprendre leurs forces et leurs faiblesses*).
  - permet d'utiliser la méthode la plus efficace pour résoudre un problème (*souvent différente de la méthode que préferent utiliser les étudiants*)

- applications : usage intéréssant d'une propriété
  - Les retenir

- exemples, illustrations, graphiques: aident à comprendre les concepts du cours. Inutiles ensuite.
- exercices : pour accroitre sa culture mathématique et sa maitrise technique du cours
- remarques :

définition Une définition introduit un nouveau concept dans le language mathématique

notation Une notation introduit un nouveau symbôle ou une nouvelle écriture

convention Une convention attribue un sens (choisi par la communauté mathématique) dans un contexte particulier à un concept qui n'en avait pas encore (pour écrire, entre autre, des formules plus simples et plus générales)

théorème Un théorème énonce une vérité mathématique concernant des concepts existants
- Certains théorèmes préstigieux portent un nom, souvent le nom des mathématiciens qui l'ont découvert ou démontré.

propriété Une propriété est un théorème moins important

corollaire Un corollaire est une propriété qui découle « immédiatement » d'une autre

lemme Un lemme est une propriété qui sert, quasi exclusivement dans le cours, à établir un autre résultat du cours

axiome Un axiome est un énoncé fondamental sur lequel est basé une théorie mathématique et qui ne peut être démontré à l'aide des autres axiomes de la théorie
- Tout l'édifice mathématique utilisé en ECS repose sur les axiomes de Zermelo
- En général, les axiomes sont des propriétés très intuitives et de très bas niveau, trop lourdes à manipuler pour écrire des démonstrations contrairement aux propriétés avancées par le cours

Bases théoriques

2 Logique Séquence 2

Les notions de ce chapitre font partie des bases fondamentales. Bien qu'il soit extrémement improbable qu'elles soient l'object d'un exercice au concours, elles ont un impact très sensible sur le resultat au concours car :

- Beaucoup de questions peuvent se traiter par récurrence
- La valeur d'une démonstration dépend de l'articulation logique sous-jacente.
- La compréhension fine de certaines questions nécessite une bonne maitrise de la logique.

programme L'objectif du programme en ECS est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques :

- Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée
- Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.
- Propositions utilisant les connecteurs et les quantificateurs
- Nier une propoisition
- Raisonnement par récurrence

2.1 Assertions et propositions logiques

assertion La logique binaire s'intéresse à des assertions, i.e. à des phrase phrases affirmatives simples, dont elle tente d'établir la véracité ou la fausseté.

Définition 2.1 Une assertion est une affirmation élémentaire.

indécidable Il n'est malheureusement pas toujours possible d'attribuer la valeur « vraie » ou la valeur « fausse » à une assertion. Une assertion indécidable est une affirmation élémentaire à laquelle il est impossible d'attribuer une valeur logique (la valeur vraie ou la valeur faux).

Définition 2.2 Une assertion indécidable est une assertion sans valeur logique.

– Pour la suite, nous allons laisser de coté les assertions indécidables, qui sont certainement surprenantes et amusantes mais qui n'ont quasiment aucune utilité pratique, à part pour quelques rares mathématiciens professionnels

proposition Nous allons principalement nous intéresser aux propositions logiques, i.e. aux assertions qui ne sont pas indécidables. Une proposition logique est une affirmation élémentaire à laquelle peut être attribuée soit la valeur vraie, soit la valeur fausse.

Définition 2.3 Une proposition logique est une asertion avec une valeur logique.

symboles Pour écrire les propositions logiques, nous allons utiliser un certain nombre de symboles mathématiques, que l'on peut voir comme des abbréviations de morceaux de phrases françaises

Symbole	Signification
$\in$	« élément de », « dans » ou « appartient à »
$\forall$	« pour chaque », « pour tout » ou « quel que soit »
$\exists$	« il existe » ou « on peut trouver »
!	« unique » ou « un et un seul »
$\Rightarrow$	« implique »
$\Leftrightarrow$	« équivaut à » ou « si et seulement si »
:	« tel que » ou « pour lequel »
$\{\cdots\}$	« ensemble »

2.2 Opérateurs

Dans cette section, les lettres $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ désigent des propositions logiques.

2.2.1 Affirmation

affirmation Affirmer une proposition logique $\mathcal{P}$, c'est dire qu'elle est vraie.

Définition 2.4 $(\mathcal{P})$:= « $\mathcal{P}$ est vrai »

– Certaines propositions logiques, bien qu'exprimées différemment, possèdent un sens identique et, par conséquent, la même valeur logique. En pratique, on manipulera de préférence la proposition de même sens la plus simple.

able de vérité La table de vérité de l'opérateur identité est

Propriété 2.5

$\mathcal{P}$	Vrai	Faux
$(\mathcal{P})$	Vrai	Faux

2.2.2 Négation

négation

Nier une proposition logique $\mathcal{P}$, c'est affirmer son contraire.

Définition 2.6 $\overline{\mathcal{P}}$:= « $\mathcal{P}$ est faux »

– La négation d'une proposition logique $\mathcal{P}$ se prononce « non $\mathcal{P}$ » et se note $\overline{\mathcal{P}}$ ou « non $\mathcal{P}$ ».

able de vérité

La table de vérité de l'opérateur logique de négation est

Propriété 2.7

$\mathcal{P}$	Vrai	Faux
$\overline{\mathcal{P}}$	Faux	Vrai

uble négation

On ne change pas le sens et la valeur d'une proposition en lui appliquant deux fois l'opérateur de négation.

Propriété 2.8 $\overline{\overline{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$

– La logique, c'est simple, il ne faut pas paniquer !

uantificateurs

Nier une proposition comportant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ se fait de manière totalement mécanique, via les relations suivantes

Propriété 2.9 $\overline{\forall x \in X, \mathcal{P}_x} =$ « $\exists x \in X, \overline{\mathcal{P}_x}$ »

Propriété 2.10 $\overline{\exists x \in X, \mathcal{P}_x} =$ « $\forall x \in X, \overline{\mathcal{P}_x}$ »

2.2.3 conjonction

conjonction

La conjonction de deux propositions logiques est vraie *ssi* les deux propositions logiques sont vraies$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies »

Définition 2.11 ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) := « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies »

– La conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se prononce et se note « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ».

able de vérité

La proposition « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ » est vraie si les deux propositions sont vraies et fausse si l'une au moins des propositions est fausse

Propriété 2.12

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ Vrai	$\mathcal{Q}$ Faux
$\mathcal{P}$ Vrai	Vrai	Faux
$\mathcal{P}$ Faux	Faux	Faux

2.2.4 Disjonction inclusive

disjonction inclusive

Le « ou » mathématique est inclusif contrairement à l'usage traditionnel du « ou » en français. La disjonction (inclusive) de deux propositions est vraie *ssi* l'une au moins des propositions est vraie.

Définition 2.13 ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) := « l'une au moins des propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie »

- La disjonction inclusive de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se prononce et se note « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ».
- Les symboles $\leqslant$ et $\geqslant$ sont des disjonctions inclusives.

$$a \leqslant b \text{ signifie } « a < b \text{ ou } a = b »$$

able de vérité

La proposition « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ » est vraie si l'une au moins des propositions est vraie et fausse si les deux propositions sont fausses

Propriété 2.14

$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ Vrai	$\mathcal{Q}$ Faux
$\mathcal{P}$ Vrai	Vrai	Vrai
$\mathcal{P}$ Faux	Vrai	Faux

négation

Propriété 2.15 $\overline{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}} = \overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}}$

Propriété 2.16 $\overline{\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}} = \overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}}$

2.2.5 Disjonction exclusive

disjonction exclusive

La disjonction exclusive de deux propositions est vraie *ssi* l'une est vraie et l'autre est fausse.

Définition 2.17 (P xor Q) := « l'une exactement des propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie ».

- La disjonction exclusive de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se note « $\mathcal{P}$ xor $\mathcal{Q}$ ».
- En mathématiques, l'opérateur xor est rarement utilisé, contrairement à l'opérateur ou.

able de vérité

Propriété 2.18

$\mathcal{P}$ xor $\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ Vrai	$\mathcal{Q}$ Faux
$\mathcal{P}$ Vrai	Faux	Vrai
$\mathcal{P}$ Faux	Vrai	Faux

2.2.6 Equivalence

équivalence

L'équivalence de deux propositions est la proposition affirmant qu'elles ont la même valeur logique.

Définition 2.19 $(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q})$:= « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont même valeur logique »

- L'équivalence de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se note « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ ».
- Lorsque l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes.
-

$$\text{« } \mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \text{ »} = \text{« non } \mathcal{P} \iff \text{non } \mathcal{Q} \text{ »}$$
$$\text{non « } \mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \text{ »} = \text{« } \mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q} \text{ »}$$

able de vérité

La proposition « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ » est vraie si les deux propositions sont vraies ou si les deux propositions sont fausses.

Propriété 2.20

$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ Vrai	$\mathcal{Q}$ Faux
$\mathcal{P}$ Vrai	Vrai	Faux
$\mathcal{P}$ Faux	Faux	Vrai

2.2.7 Implication

implication

Définition 2.21 $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$:= « $\mathcal{P}$ faux ou $\mathcal{Q}$ vrai »= « $\overline{\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{Q}$ »

- L'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ se prononce « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ ».
- Lorsque l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que la proposition $\mathcal{P}$ implique la proposition $\mathcal{Q}$.
- Le vrai implique le vrai et que le faux implique tout.

able de vérité

La proposition $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie si $\mathcal{P}$ est fausse ou si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies. La proposition $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est fausse si $\mathcal{P}$ est vraie et si $\mathcal{Q}$ est fausse.

Propriété 2.22

$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ Vrai	$\mathcal{Q}$ Faux
$\mathcal{P}$ Vrai	Vrai	Faux
$\mathcal{P}$ Faux	Vrai	Vrai

Méthode 2.23 (Pour établir une implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$)

1. Supposer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie
2. Montrer que la proposition $\mathcal{Q}$ est vraie

implication

Définition 2.24 La réciproque de « $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ » est l'implication « $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ »

– Une implication et sa réciproque n'ont pas forcément la même valeur logique.

implication

Définition 2.25 La contraposée de « $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ » est l'implication « $\overline{\mathcal{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}}$ »

– Une implication et sa contraposée ont la même valeur logique

Propriété 2.26 $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) = (\overline{\mathcal{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}})$

2.3 Raisonnements classiques

Dans cette section, toutes les lettres majuscules rondes désignent des propositions logiques.

2.3.1 Raisonnement par double implication

Double implication

Pour établir l'équivalence $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$, il suffit de démontrer $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$.

Propriété 2.27 $(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}) = \big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P})\big)$

2.3.2 Raisonnement par contraposition

contraposition

Pour établir l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, il suffit d'établir sa contraposée $\overline{\mathcal{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}}$, ce qui est plus facile dans quelques rares cas.

Propriété 2.28 $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) = (\overline{\mathcal{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}})$

– L'implication de droite est la contraposée de celle de gauche (et inversement).

2.3.3 Raisonnement direct

Raisonnement direct

On procède par implication en partant d'une proposition vraie

Propriété 2.29 $\left(\text{Vrai} \overset{\text{Vrai}}{\Longrightarrow} \mathcal{Q} \overset{\text{Vrai}}{\Longrightarrow} \cdots \overset{\text{Vrai}}{\Longrightarrow} \mathcal{Z}\right) = \mathcal{Z}$

– C'est le raisonnement de base utilisé par tout le monde.

2.3.4 Raisonnement par équivalences

Raisonnement par équivalences

On établit une chaine d'équivalences avec des propositions de plus en plus simples

Propriété 2.30 $\left(\mathcal{P} \overset{\text{Vrai}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{Q} \overset{\text{Vrai}}{\Longleftrightarrow} \cdots \overset{\text{Vrai}}{\Longleftrightarrow} Vrai\right) = \mathcal{P}$

– C'est un bon principe de n'utiliser des équivalences que lorsque c'est absolument indispensable, ou pour atteindre plusieurs objectifs à la fois (deux implications).

2.3.5 Raisonnement par l'absurde

Raisonnement par l'absurde

Pour établir une proposition $\mathcal{P}$, en raisonnant par l'absurde, on suppose son contraire (i.e. que « non $\mathcal{P}$ » est vraie) puis on procède par implications pour aboutir à une proposition fausse (une absurdité, une contradiction).

Propriété 2.31 $\left(\overbrace{\overline{\mathcal{P}}}^{\text{Supposé}} \overset{\text{Vrai}}{\Longrightarrow} \mathcal{Q} \overset{\text{Vrai}}{\Longrightarrow} \cdots \overset{\text{Vrai}}{\Longrightarrow} \text{Faux}\right) = \mathcal{P}$

– Il est toujours possible de trouver une démonstration directe d'une propriété établie par l'absurde (cela constitue souvent un bon exercice, très formateur, en général plus difficile).

Preuve : Si les implications pré-citées sont justes et si la proposition $\mathcal{Z}$ est fausse, il résulte de la table de vérité de l'implication que les propositions $\mathcal{Z}, \cdots, \mathcal{Q}$, non $\mathcal{P}$ sont fausses et donc que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie. Par ailleurs, d'après le principe de contraposition, la chaine d'implication précédente est équivalente à la chaine d'implication

$$\underbrace{\mathcal{P}}_{\text{Vrai}} \overset{\text{Vrai}}{\Longleftarrow} \text{non } \mathcal{Q} \overset{\text{Vrai}}{\Longleftarrow} \cdots \overset{\text{Vrai}}{\Longleftarrow} \underbrace{\text{non } \mathcal{Z}}_{\text{Vrai}},$$

qui prouve la proposition $\mathcal{P}$ de manière directe.

2.3.6 Raisonnement par récurence

principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence consiste à établir de manière automatique des propositions logiques $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \cdots\}$ en procédant en deux étapes :

1. **Initialisation.** On établit la propriété au(x) premier(s) rang(s), de sorte à pouvoir enclencher le méchanisme de transmission.
2. **Transmission.** On prouve que la propriété se transmet du (ou des) rang(s) précédent(s) au rang suivant.

– Il est primordial d'écrire et de quantifier correctement la propriété à établir.
– Lorsque la propriété à établir n'est pas donnée, il faut d'abord l'intuiter puis la démontrer.

currence forte
faible
finie
à deux pas

Il existe beaucoup de variations du schema de démonstration par récurrence. C'est pourquoi il est essentiel de bien comprendre le principe de récurrence pour pouvoir l'adapter aux divers cas rencontrés.

Propriété 2.32 $(\forall k \geqslant 0, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \end{cases}$

Propriété 2.33 $(\forall k \geqslant 0, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_0, \cdots, \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \end{cases}$

Propriété 2.34 $(\forall k \geqslant 0, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \end{cases}$

Propriété 2.35 $(\forall k \in [\![0, N]\!], \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \quad (0 \leqslant n < N) \end{cases}$

– L'implication permettant la transmission ne se démontre jamais par récurrence.
– L'implication permettant la transmission détermine comment l'initialisation doit se faire

3 Sommes, produits, récurrences Séquence 3

programme

- Emploi du raisonnement par récurrence
- Notations $\sum$, $\prod$ *Les étudiants doivent savoir employer les notations* $\sum_{i=1}^{n} u_i$ *et* $\sum_{i\in A} u_i$ *où* A *désigne un sous-ensemble de* $\mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{N}^2$
- Formules $\sum_{k=0}^{n} q^k$ et $\sum_{k=1}^{n} k$.
- Exemples : formules donnant $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$
- Définition de $n!$

– Les outils de ce chapitre font parti des bases importantes. Utilisation en ds/concours :
– Récurrence : très fréquente (certaines questions se traitent exclusivement par récurrence)
– Somme : très fréquente (utilisées pour exprimer et manipuler les quantités étudiées dans les problèmes)
– Produit : rare (on leur préfère les sommes : un produit pouvant généralement etre transformé en somme via un logarithme)
En concours, il ne devrait pas y avoir de problème portant uniquement sur ces notions.

3.1 Sommes

3.1.1 Généralités

Dans cette section a_k et b_k désignent des nombres complexes pour des indices k entiers. Les lettres p, q, r, m et n désignent des entiers.

notation $\sum$

Définition 3.1
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{vmatrix} a_m + \cdots + a_n & (m \leqslant n) \\ 0 & (m > n) \end{vmatrix}$$

– Il existe de multiples variantes de cette notation, comme
$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k\in[\![m,n]\!]} a_k$$

– Par convention, la somme est nulle lorsque l'ensemble de ses indices est vide

– La lettre k utilisée pour décrire ce que l'on somme est dite « muette ». Le choix d'une autre lettre donnerait le même résultat.

relation de Chasles

Propriété 3.2 $\displaystyle\sum_{k=p}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k \qquad (p \leqslant q \leqslant r)$

linéarité

Propriété 3.3 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C})$

– Cette propriété permet de factoriser une constante dans une somme (ou inversement de la développer)

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

mais aussi de « séparer » en deux sommes, en procédant aux additions dans un ordre différent

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

changement d'indice

Propriété 3.4 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=m-d}^{n-d} a_{\ell+d} \qquad (d \in \mathbb{Z})$

– Choisir une autre lettre pour décrire les indices de la somme ne change pas sa valeur (c'est une variable « muette ». La valeur de la somme ne dépend que de ses bornes et de son terme général
– Il est souvent utile de commencer par établir la formule du changement d'indice inverse $\ell = k - d$.

Méthode 3.5 (changement d'indice)

Illustration via le changement d'indice $k = \ell + d \iff \ell = k - d$

1. écrire une somme portant sur le nouvel indice
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=}$$
2. recopier ce que l'on somme en remplaçant l'ancien indice par son expression utilisant le nouvel indice
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=} a_{\ell+d}$$
3. déterminer les bornes de la nouvelle somme en trouvant les valeurs du nouvel indice correspondant à l'ancien indice
$$\left.\begin{array}{l} k = n \\ k = m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} k-d=\ell \\ \Longleftrightarrow \\ k=\ell+d \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} \ell = n - d \\ \ell = m - d \end{array}\right.$$
4. reporter les bornes correctement dans la somme (*échanger les bornes de place si la monotonie de la suite des indices a changé*)
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=m-d}^{n-d} a_{\ell+d}$$

symétrie

Propriété 3.6 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=m}^{n} a_{n+m-\ell}$

– Le valeur des deux sommes est la même, les mêmes additions étant effectués dans un ordre différent, respectivement dans l'ordre croissant et décroissant des indices

$$a_m + \cdots + a_n = a_n + \cdots + a_m$$

sommes téléscopiques

Propriété 3.7 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$

– Le principe des sommes téléscopiques se décline en de multiples variantes (comme les récurrences). Il faut surtout comprendre en comprendre le principe pour s'adapter.

Méthode 3.8 (somme téléscopique) *Illustration avec* $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)$

1. séparer les sommes
$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k$$
2. Faire un changement d'indice pour rendre identique ce que l'on somme
$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_{k+1}}_{\ell=k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell - \sum_{k=0}^{n} a_k$$
3. Garder dans les sommes les termes en commun, sortir ceux qui ne le sont pas
$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell + a_{n+1} - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$
4. Simplifier les sommes, qui doivent disparaître.

3.1.2 Identité fondamentale

Dans cette section, x et y désignent des nombres complexes

Identité fondamentale

L'identité suivante interviendra également dans d'autres chapitres. Elle joue un rôle majeur pour les mathématiques

Propriété 3.9 $\displaystyle x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \qquad (n \geqslant 0)$

▷ Factorisation : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
▷ Sommation : $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

▷ Mise sous forme canonique (c)
▷ Inversion d'opérateurs

– En notant la somme différemment, on fait apparaître le rôle symétrique de x et y

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k+\ell=n-1} x^k y^\ell$$

Identité remarquable

Sa variante la plus couramment utilisée est celle pour $n = 2$.

Corollaire 3.10 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

▷ Calcul mental : $23 \times 17 = 400 - 9$
▷ Factorisation : $(x+2)^2 - 9 = (x-1) \times (x+5)$

3.1.3 Sommes de Bernouilli

me des carrés

Propriété 3.11 $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (n \geqslant 0)$$

– On établit cette formule en calculant de deux manières, via les sommes téléscopiques et en développant l'expression suivante :

$$(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right).$$

– Pour $\ell \geqslant 3$, on peut procèder de manière identique pour calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k^\ell$.

me des cubes

Propriété 3.12 $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 \qquad (n \geqslant 0)$$

3.1.4 Sommes multiples

théorème de Fubini □

Théorème 3.13 $$\sum_{k=b}^{c} \sum_{\ell=d}^{e} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=d}^{e} \sum_{k=b}^{c} a_{k,\ell}$$

– La somme précédente peut également être notée

$$\sum_{\substack{b \leqslant k \leqslant c \\ d \leqslant \ell \leqslant e}} a_{k,\ell}$$

Ce théorème d'interversion de sommes se décline fréquemment dans sa version triangulaire :

théorème de Fubini △

Théorème 3.14 $$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} a_{k,\ell}$$

– La somme double précédente peut également être notée avec un seul symbôle somme

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant k} a_{k,\ell}$$

Méthode 3.15 (Pour intervertir deux sommes) *illustration via le théorème de Fubini* △

1. Ecrire deux sommes en recopiant ce que l'on somme et en intervertissant les indices de sommation
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=}\sum_{k=} a_{k,\ell}$$
2. Déterminer et reporter les valeurs constantes extrêmes que peut prendre l'indice de gauche (*ici,* $0\leqslant k\leqslant n$ *et* $0\leqslant \ell\leqslant k$ *induisent que* $0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n$)
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=} a_{k,\ell}$$
3. Déterminer et reporter les valeurs extrêmes que peut prendre l'indice de droite (*ici,* $0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n$), qui peuvent dépendre de l'indice de gauche
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} a_{k,\ell}$$

3.2 Produits et factorielles

3.2.1 Généralités

Dans cette section a_k et b_k désignent des nombres complexes pour des indices k entiers. Les lettres p, q, r, m et n désignent des entiers.

notation $\prod$

Notation 3.16 $$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left| \begin{array}{ll} a_m \times \cdots \times a_n & (m\leqslant n) \\ 1 & (m>n) \end{array} \right.$$

– Comme pour les sommes, il existe de multiples variantes de cette notation, telles

$$\prod_{m\leqslant k\leqslant n} a_k \quad \text{ou} \quad \prod_{k\in[\![m,n]\!]} a_k$$

– Par convention, le produit vaut 1 lorsque l'ensemble de ses indices est vide
– Dans les exercices, il est souvent utile de transformer un produit en somme (via le logarithme) ou une somme en produit (via l'exponentielle). Lorsque $a_k > 0$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \exp\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{b_k}$$

factorielle

Notation 3.17 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \qquad (n \geqslant 1)$

Convention 3.18 $0! = 1$

Propriété 3.19 $n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad (n \geqslant 0)$

relation de Chasles

Propriété 3.20 $\prod_{k=p}^{r} a_k = \prod_{k=p}^{q} a_k \times \prod_{k=q+1}^{r} a_k \qquad (p \leqslant q \leqslant r)$

produit

Propriété 3.21 $\prod_{k=m}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k$

– Le produit est le même mais effectué dans un ordre différent

– En particulier, on a

$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

puissances

Propriété 3.22 $\prod_{k=m}^{n} (a_k)^{\ell} = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^{\ell} \qquad (\ell \in \mathbb{Z} \text{ et } a_k \neq 0 \text{ si } \ell < 0)$

changement d'indice

Propriété 3.23 $\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{\ell=m-d}^{n-d} a_{\ell+d} \qquad (d \in \mathbb{Z})$

symétrie

Propriété 3.24 $\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{\ell=m}^{n} a_{n+m-\ell}$

– Le valeur des deux produits est la même, les mêmes multiplications étant effectués dans un ordre différent, respectivement dnas l'ordre croissant et décroissant des indices

$$a_m \times \cdots \times a_n = a_n \times \cdots \times a_m$$

produits téléscopiques

Propriété 3.25 $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$ $\qquad (a_k \neq 0 \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n)$

– Le principe des produits téléscopiques se décline en de multiples variantes. En pratique, on sépare les produits

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_{k+1}}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$$

On procède à un changement d'indice (ici $\ell = k+1$)

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{\ell=1}^{n+1} a_\ell}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$$

On garde dans les produits ce qui est commun et l'on sort ce qui ne l'est pas

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell \times a_{n+1}}{a_0 \times \prod_{k=1}^{n} a_k}$$

Puis on simplifie pour aboutir au résultat attendu.

4 Ensembles et applications Séquence 5

programme

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilité, mais tout exposé théorique est exclu.

- Ensembles, parties d'un ensemble
  - Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$. *On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.*
  - Ensemble $P(E)$ des parties de E. *On pourra donner l'exemple de* $P(\{1, \cdots, 6\})$ *afin de faciliter l'introduction de la notion de tribu.*
  - Complémentaire. Notation $\overline{A}$. *La notation* $\overline{A}$ *est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation* $\complement_E^A$
  - Union, intersection. Notations $\cap$, $\cup$.
  - Distributivité. Lois de Morgan.
  - Définition du produit cartésien d'ensembles. *On introduira les notations* R^2 *et* R^n.

- Applications
  - Définition. Composée de deux applications.
  - Restriction et prolongement d'une application.
  - Applications injectives, surjectives, bijectives.*Ces deux notions ne seront introduites que dansles cours d'algèbre linéaire et d'analyse.On pourra donner des exemples issus du coursd'analyse.*

4.1 Ensembles

programme

- Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.
- Ensemble $P(E)$ des parties de E.
- Complémentaire. La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E^A$
- Union, intersection. Notations $\cap$, $\cup$. Distributivité. Lois de Morgan.
- Définition du produit cartésien d'ensembles. R^2 et R^n
- lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques

ensemble

Définition 4.1 Un ensemble est une collection d'objets

– La propriété fondamentale d'un ensemble est la capacité à déterminer si un objet quelconque lui appartient ou non.

élément

Définition 4.2 Un élément d'un ensemble E est un objet appartenant à E

– On note $x \in E$ lorsque l'object x appartient à l'ensemble E et $x \notin E$ dans le cas contraire
– En particulier, E est un ensemble *ssi* l'assertion $x \in E$ est une proposition logique pour tout x (de même que sa négation $x \ E$)

ensemble vide L'ensemble vide $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Définition 4.3 $\varnothing = \{\}$

– L'ensemble vide est unique.

Dans la suite de cette section, I, A, B et C désignent des ensembles, de même que A_i pour $i \in I$.

inclusion Un ensemble A est inclus dans un ensemble B *ssi* tous les éléments de A sont dans B.

Définition 4.4 $A \subset B \iff (\forall a \in A, a \in B)$

– Lien logique : $A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$

uble inclusion Deux ensembles sont égaux *ssi* ils ont les mêmes éléments

Propriété 4.5 $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \iff (A = B)$

– Cette propriété est en fait l'axiome d'extensionnalité de Zermelo

– Lien logique : $A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$

Sous-ensemble partie Tout ensemble B inclus dans un ensemble A est appelé une partie de A ou un sous-ensemble de A.

Définition 4.6 B partie de $A \iff B \subset A$

Ensemble des parties L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble A est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A.

Définition 4.7 $\mathcal{P}(A) := \{B : B \subset A\}$

– Lien logique : $A \in \mathcal{P}(B) \iff A \subset B$

intersection

L'intersection de deux ensembles est l'ensemble constitué par les éléments communs aux deux ensembles

Définition 4.8 $A \cap B := \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$

– Lien logique : $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$

intersection multiple

L'intersection d'une famille d'ensembles est l'ensemble constitué par les éléments communs à tous les ensembles de la famille

Définition 4.9 $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$

– Lien logique : $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, x \in A_i)$

réunion

La réunion de deux ensembles est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles

Définition 4.10 $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

– Lien logique : $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$

distributivité

Propriété 4.11
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

réunion multiple

La réunion d'une famille d'ensembles est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à au moins l'un des ensembles de la famille

Définition 4.12 $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}$

– Lien logique : $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I, x \in A_i)$

mplémentaire

Le complémentaire d'un ensemble A dans un ensemble B est formé des éléments de B qui ne sont pas dans A (c'est B privé des éléments de A).

Définition 4.13 $\complement_B(A) := \{x \in B : x \notin A\} =: B \setminus A$

– Pour simplifier les notations et lorsqu'il est évident que les complémentaires sont calculés dans un ensemble D, on note parfois $\bar{A} = \complement_D(A)$.
– Lien logique : $x \in \overline{A} \iff \overline{x \in A} \iff x \notin A$
– Lien logique : $x \in B \setminus A \iff x \in B \text{ et } x \notin A$

involution

Propriété 4.14 $\overline{\overline{A}} = A$

lois de Morgan

Propriété 4.15
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

disjonction

Deux ensembles sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun

Définition 4.16 A et B disjoints $\iff A \cap B = \varnothing$

– Des ensembles Ω_i pour $i \in I$ sont disjoints s'ils sont disjoints deux à deux.

partition
système complet

Une partition de A est une famille de parties de A disjoints deux à deux dont la réunion vaut A.

Définition 4.17 $(\Omega_i)_{i\in I}$ | partition / système complet de $A \iff$
$$\begin{cases} \Omega_i \subset A \qquad (i \in I) \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \quad (i \neq j) \\ \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i = A \end{cases}$$

▷ Probabilités

produit cartésien

La produit cartésien de deux ensemble est l'ensemble des couples constitués par les éléments de ces ensembles

Définition 4.18 $A \times B := \big\{(a,b) : a \in A \text{ et } b \in B\big\}$

– Lien logique : $(x,y) \in A \times B \iff (x \in A \text{ et } y \in B)$
– Par « abus » de notation : $A\times B\times C = (A\times B)\times C = A\times(B\times C) = \big\{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\big\}$

produit cartésien multiple

Définition 4.19 $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} \qquad (n \geqslant 1)$

– Lien logique : $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in A^n \iff (\forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in A)$

4.2 Fonctions et applications

programme

- Définition. Composée de deux applications.
- Restriction et prolongement d'une application.
- Applications injectives, surjectives, bijectives.

Dans cette section, A et B désignent des ensembles et $f \subset A \times B$.

4.2.1 Fonctions

fonction

Une fonction f de A dans B est une partie $f \subset A \times B$ associant au plus une image de B à chaque élément de A

Définition 4.20 Une fonction $f : A \to B$ est une partie $f \subset A \times B$ vérifiant

$$\text{pour chaque } x \in A, \text{ il existe } \textbf{au plus} \text{ un } y \in B \text{ tel que } (x,y) \in f$$

– $F \subset A \times B$ est une fonction *ssi* pour chaque élément x de A, il existe **au plus** un élément y de B tel que $(x,y) \in F$.

– Sur un plan plus théorique, une fonction est un triplet (A,B,F) avec $F \subset A \times B$ vérifiant la propriété ci-dessus

Dans la suite de cette section, $f : A \to B$ désigne une fonction.

image antécédent

Définition 4.21 $\begin{array}{c} x \text{ antécédent par } f \text{ de } y \\ y \text{ image par } f \text{ de } x \end{array} \Bigg| \; y = f(x) \iff (x,y) \in f$

ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ auxquels la fonction associe une image

Définition 4.22 $\mathcal{D}f := \{x \in A : \exists y \in B, y = f(x)\}$

restriction au départ à l'arrivée

A partir d'une fonction $f : A \to B$, on appelle restriction de f au départ à C ou/et à l'arrivée à D les fonctions obtenues en posant

Définition 4.23 $f|_C : \begin{array}{ccc} C & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad (C \subset A)$

Définition 4.24 $f|^D : \begin{array}{ccc} A & \to & D \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad (D \subset B)$

Définition 4.25 $f|_C^D : \begin{array}{ccc} C & \to & D \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad (C \subset A, D \subset B)$

4.2.2 Applications

application

Une application $f : A \to B$ associe à chaque élément x de A une **unique** image y dans B.

Définition 4.26 Une application de A dans B est une fonction $f : A \to B$ vérifiant

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : y = f(x)$$

– Dans tout le reste du cours, on notera $f : A \to B$ pour désigner une application de A dans B.

ensemble

Définition 4.27 $\mathcal{F}(A,B) = \{f : A \to B \text{ application}\} = B^A$

image directe

L'image d'un ensemble $C \subset A$ par une application $f : A \to B$ est l'ensemble

Définition 4.28 $f(C) := \{f(x) : x \in C\} \qquad (C \subset A)$

image réciproque

L'image réciproque d'un ensemble $D \subset B$ par une application $f : A \to B$ est l'ensemble

Définition 4.29 $f^{-1}(D) := \{x \in A : f(x) \in D\} \qquad (D \subset B)$

restrictions

Propriété 4.30 Soient $f : A \to B$ une function et deux ensembles $C \subset A$ et $D \subset B$. Alors,

$$f|_C^D \text{ application} \iff \begin{cases} C \subset \mathcal{D}f \\ f(C) \subset D \end{cases}$$

– La restriction d'une application au départ est une application. Autrement dit, on peut toujours restreindre une application au départ (et obtenir une application).

– La restriction d'une application à l'arrivée n'est pas forcément une application.Autrement dit, il faut faire attention lorsque l'on restreind une application à l'arrivée.

Corollaire 4.31 La restriction d'une fonction f au départ à $\mathcal{D}f$ est une application

– Etant donnée une fonction $f : A \to B$, on détermine d'abord l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$, puis on ne travaille plus qu'avec l'application $f|_{\mathcal{D}f}$: c'est plus pratique !

composition

La composée de $f : A \to B$ et $g : B \to C$ est l'application définie par

Définition 4.32 La composée de l'application $f : A \to B$ par l'application $g : B \to C$ est l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

associativité

La loi de composition $\circ$ des applications est associative.

Propriété 4.33 Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, des applications. Alors,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

– Cette composée est notée plus simplement $h \circ g \circ f$.

4.2.3 Injections, surjections et bijections

Dans toute cette section $f : A \to B$ est une application et A et B sont des ensembles non-vides

injection Une application est injective *ssi* chaque élément à l'arrivée admet au plus un antécédent au départ.

Définition 4.34 f injective $\iff \big(\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \implies (x = x')\big)$

– Une application est injective *ssi* elle associe deux images différentes à deux éléments différents.

– Une application injective s'appelle une injection

surjection Une application est surjective *ssi* chaque élément à l'arrivée admet au moins un antécédent au départ.

Définition 4.35 f surjective $\iff f(A) = B$

Propriété 4.36 f surjective $\iff \big(\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)\big)$

– Une application surjective s'appelle une surjection

Une application est bijective *ssi* elle est injective et surjective.

Définition 4.37 f bijective $\iff \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$

Propriété 4.38 f bijective $\iff \big(\forall y \in B, \exists! x \in A : y = f(x)\big)$

– Une fonction f de A dans B est bijective *ssi* chaque élément au départ admet une image à l'arrivée et chaque élément à l'arrivée admet un antécédent au départ

– Une application $f : A \to B$ est bijective *ssi* pour chaque y à l'arrivée, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution au départ.

Méthode 4.39 (étudier si une application $f : A \to B$ est injective, surjective ou bijective)

1. Fixer un élément $y \in B$ quelconque.
2. Résoudre l'équation $y = f(x)$.
3. Si pour chaque élément $y \in B$, il y a :
   a. au plus une solution $x \in A$, f est surjective
   b. au moins une solution $x \in A$, f est injective
   c. exactement une solution $x \in A$, f est bijective.
   De plus, on trouve une formule pour la bijection réciproque : $f^{-1}(y) = x$.

composition La composée de deux bijections est une bijection.

Propriété 4.40 Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$, bijectives. Alors, $g \circ f$ est une bijection

identité L'application identité Id_A d'un ensemble A est définie de la façon suivante

Définition 4.41 $\mathrm{Id}_A : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$

Propriété 4.42 L'identité de A est une bijection ($\mathrm{Id}_A \circ \mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_A$)

réciproque La bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$ d'une bijection $f : A \to B$ est l'application définie par

Définition 4.43 La bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$ d'une bijection $f : A \to B$ est l'application définie par

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \qquad (x \in A, y \in B)$$

– Pour chaque élément y de B, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans A de y par f.

inverse

Propriété 4.44 Soit $f : A \to B$ bijection, alors $g = f^{-1} \iff \begin{cases} f \circ g = \mathrm{Id}_B \\ g \circ f = \mathrm{Id}_A \end{cases}$

– La bijection réciproque de f est l'inverse de f pour la loi $\circ$.

Corollaire 4.45 Soit $f : A \to B$, une bijection. Alors, f^{-1} est bijective

– L'inverse d'une bijection pour la loi $\circ$ est une bijection.

4.3 Combinatoire Séquence 7

programme Dénombrement (cardinal) des ensembles suivants :

- parties d'un ensemble à n éléments
- parties à p éléments d'un ensemble à n éléments
- p-listes d'un ensemble à n éléments
- p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments
- permutations d'un ensemble à n éléments.

On fera le lien entre les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.
On pourra utiliser la représentation arborescente d'un ensemble de p-listes dans les problèmes de dénombrement.
Dans cette section, les lettres majuscules désignent des ensembles. Deux ensembles sont dits « en bijection » ou equipotents *ssi* il existe une bijection de l'un dans l'autre.

4.3.1 Cardinal

partie finie de $\mathbb{N}$

Définition 4.46 Une partie de $\mathbb{N}$ est finie *ssi* elle est majorée

intervalle d'entiers

Définition 4.47 $[\![m : n]\!] := \{k \in \mathbb{Z} : m \leqslant k \leqslant n\} \qquad (m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R})$

– Pour deux entiers $m \leqslant n$, on rencontre également la notation $\{m, \cdots, n\}$.

cardinal

A chaque ensemble E, on associe un cardinal (son nombre d'éléments).

Définition 4.48 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\text{card}(E) = n$ *ssi* $[\![1 : n]\!]$ et E sont en bijection

Convention 4.49 $\text{card}(\varnothing) = 0$

– Lorsque $E = \varnothing$ ou lorsque E est en bijection avec $[\![1 : n]\!]$, le cardinal $\text{card}(E)$ est dit fini. Il est dit infini dans le cas contraire.

ensemble fini

Définition 4.50 Un ensemble est fini *ssi* il est en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$

Propriété 4.51 E fini $\iff \text{card}(E)$ fini

– Un ensemble est fini *ssi* il existe une injection de cet ensemble dans une partie finie de $\mathbb{N}$.

– Un ensemble est fini *ssi* il existe une surjection d'une partie finie de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.

† ensemble dénombrable

Définition 4.52 Un ensemble est dénombrable *ssi* il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$

Propriété 4.53 Un ensemble est dénombrable *ssi* il existe une injection de cet ensemble dans $\mathbb{N}$.

Propriété 4.54 Un ensemble est dénombrable *ssi* il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.

Théorème 4.55 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

équipotence finie

Propriété 4.56 Soit E un ensemble fini. Alors, F en bijection avec $E \iff \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$

inclusion injection surjection

Propriété 4.57 Soit E un ensemble fini. Alors, $\left.\begin{array}{r} F \subset E \\ \exists \text{ injection } F \to E \\ \exists \text{ surjection } E \to F \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{cases} F \text{ fini} \\ \text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E) \end{cases}$

égalité

Propriété 4.58 Soit $F \subset E$ fini, alors $F = E \iff \text{card}(F) = \text{card}(E)$

lien

Propriété 4.59 Soit f application entre ensembles de même cardinal fini, alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective

4.3.2 Opérations

Dans cette section E et F désignent des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p

réunion intersection

Propriété 4.60 $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$

- Si E et F sont disjoints, on a

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

- Si $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont des ensembles disjoints deux à deux, on a

$$\text{Card}\left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} E_k\right) = \text{Card}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \text{Card}(E_1) + \cdots + \text{Card}(E_n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \text{Card}(E_k).$$

duit cartésien

Propriété 4.61 $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = np$

– Si E est de cardinal fini et $n \geqslant 1$, alors

$$\mathrm{Card}(E^n) = \mathrm{Card}(E)^n$$

ensemble des parties

Propriété 4.62 $\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^{\mathrm{Card}(E)} = 2^n$

applications

Propriété 4.63 $\mathrm{Card}\left(F^E\right) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)} = p^n$
C'est le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments

permutations bijections

Propriété 4.64 $\mathrm{Card}\left(\{\text{bijection } E \to E\}\right) = \mathrm{Card}(E)! = n!$
C'est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

arrangements injections

Propriété 4.65 $\mathrm{Card}\left(\{\text{injection } F \to E\}\right) = A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!} \qquad (n \geqslant p)$
C'est le nombre de p-listes sans répétition d'un ensemble à n éléments

– Le nombre A_n^p est aussi le nombre de façons d'arranger (d'établir une liste ordonnée) de p éléments choisis parmi n.

combinaisons parties à k éléments

Propriété 4.66 $\mathrm{Card}\left(\{F \subset E : \mathrm{Card}(F) = p\}\right) = \binom{n}{p} \qquad (0 \leqslant p \leqslant n)$
C'est le nombre de combinaisons (de listes non-ordonnées) de p éléments choisis parmi n

– Le nombre $\binom{n}{p}$ est le nombre de combinaisons (de listes non-ordonnées) de p éléments choisis parmi n.

Ensembles fondamentaux

5 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels Séquence 4

programme

- Valeur absolue. Inégalité triangulaire
- Partie entière d'un réel.
  Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(\cdot)$ est réservée à l'espérance mathématique.
- Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.
  Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.
- Théorème de la borne supérieure. *Résultat admis.*

5.1 Ordre réel

notation ensembliste

Dans cette section, x, s, S désignent des nombres réels et A désigne une partie de $\mathbb{R}$ Pour simplifier les énoncés mathématiques, nous allons employer les notations suivantes

Notation 5.1 non standard
$$\begin{cases} A \leqslant x & \iff & a \leqslant x & (a \in A) \\ x \leqslant A & \iff & x \leqslant a & (a \in A) \end{cases}$$

minorant majorant

Un minorant (resp. majorant) d'un ensemble est un nombre inférieur (resp. supérieur) ou égal à tous les éléments de l'ensemble.

Définition 5.2 x minorant de $A \iff x \leqslant A$

Définition 5.3 x majorant de $A \iff A \leqslant x$

– Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite minorée (resp. majorée) si elle admet un minorant (resp. un majorant).
– Les minorants et majorants de A, lorsqu'ils existent, ne sont pas uniques et n'appartiennent pas forcément à A.

plus petit plus grand élément

Le plus petit (resp. grand) élément d'une partie de $\mathbb{R}$ est l'unique minorant (resp. majorant) de cette partie qui lui appartient.

Définition 5.4 x plus petit élément de $A \iff x \in A$ et $x \leqslant A$

Définition 5.5 x plus grand élément de $A \iff x \in A$ et $A \leqslant x$

– S'il existe, le plus petit (resp. grand) élément de A est unique et il est noté $\min A$ (resp. $\max A$).
– Un ensemble fini et non vide de nombres réels admet toujours un plus petit et un plus grand élément.

– Le plus petit (resp. grand) élément de A est le plus grand des minorants (resp le plus petit des majorants) de A.

orne inférieure
rne supérieure

Définition 5.6 $S = \sup A \iff A \leqslant S$ et $\exists a \in A^{\mathbb{N}},\ \lim a = S$

Définition 5.7 $s = \inf A \iff s \leqslant A$ et $\exists a \in A^{\mathbb{N}},\ \lim a = s$

– Lorsqu'elle existe,la borne supérieure (resp. inférieure) de A est unique et on la note $\sup A$ (resp. $\inf A$).

– Par convention, on note $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$. De même, on note $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$) pour chaque partie A de $\mathbb{R}$ non majorée (resp. non minorée).

existence

Propriété 5.8 Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Propriété 5.9 Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

– Une borne supérieure (resp. inférieure) n'est pas forcément un plus petit (resp. un plus grand) élément. Ainsi,

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant \sqrt{2}\} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

6 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes Séquence 19

programme

L'objectif de l'étude des nombres complexes est d'aboutir au théorème de d'Alembert-Gauss et à la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ de polynômes à coefficients réels. La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme et les acquis de la classe de terminale seront complétés. On évitera toute manipulation trop technique faisant intervenir les nombres complexes. Les résultats concernant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants.

- Notation algébrique d'un nombre complexe,
- partie réelle et partie imaginaire.
- Conjugué d'un nombre complexe.
- Notation exponentielle. Module, argument.
- Formules d'Euler et de Moivre. *On donnera l'interprétation géométrique d'un nombre complexe.*
- Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. *Brève révision de la trigonométrie.Les racines $n^{ièmes}$ de l'unité pourront être étudiées comme exemples d'utilisation de la notation exponentielle.*

6.1 Forme algébrique

6.1.1 Généralités

nbre complexe

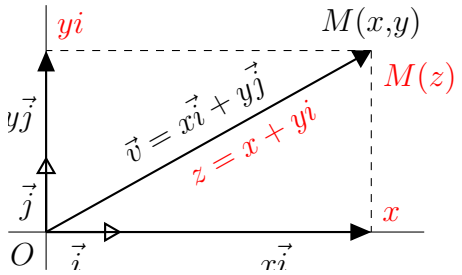
Dans cette section, x, x', y et y' désignent des nombres réels

Définition 6.1 Un nombre complexe est un nombre du type $z = x + iy$ avec x,y réels et $i^2 = -1$.

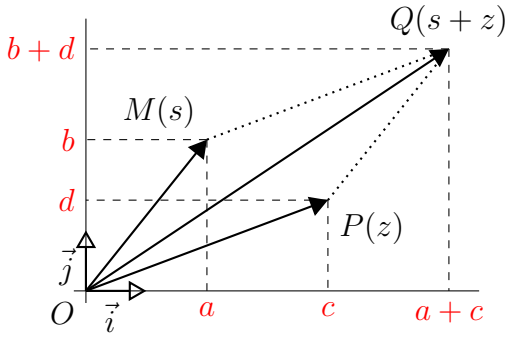
Définition 6.2 $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

Définition 6.3 $(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

Propriété 6.4



Propriété 6.5 Géométriquement, l'addition de deux nombres complexes $s = a + ib$ et $z = c + id$ s'interprètre par la règle du parallèlogramme : en effet, les points O, M, P et Q, d'affixes respectives 0, s, z et $s + z$, forment un parallèlogramme.



6.1.2 Parties réelles et imaginaires

partie réelle
imaginaire

Définition 6.6 Pour x et y réels, les parties réelles et imaginaires du complexe $z = x + iy$ sont les nombres réels $\Re e(z) := x$ et $\Im m(z) := y$

Propriété 6.7
$$\begin{array}{l}\Re e(\lambda s + \mu z) = \lambda \Re e(s) + \mu \Re e(z) \\ \Im m(\lambda s + \mu z) = \lambda \Im m(s) + \mu \Im m(z)\end{array} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.8
$$s = z \iff \begin{cases} \Re e(s) = \Re e(z) \\ \Im m(s) = \Im m(z) \end{cases}$$

Propriété 6.9 Un nombre réel est un nombre complexe de partie imaginaire nulle
$$z \in \mathbb{R} \iff \Re e(z) = z \iff \Im m(z) = 0 \iff \overline{z} = z$$

Propriété 6.10 Un nombre imaginaire pur est un nombre complexe de partie réelle nulle
$$z \in i\mathbb{R} \iff \Re e(z) = 0 \iff i\Im m(z) = z \iff \overline{z} = -z$$

6.1.3 Conjuguaison

Dans cette section, s et z désignent des nombres complexes

Définition 6.11 Pour x et y réels, le conjugué de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$

Propriété 6.12

$$\begin{cases} z = \Re e(z) + i\Im m(z) \\ \overline{z} = \Re e(z) - i\Im m(z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Re e(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \\ \Im m(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Propriété 6.13 $\overline{\lambda s + \mu z} = \lambda \overline{s} + \mu \overline{z} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

Propriété 6.14 $\overline{s \times z} = \overline{s} \times \overline{z}$

Propriété 6.15 $\dfrac{\overline{s}}{z} = \dfrac{\overline{s}}{\overline{z}} \qquad (z \neq 0)$

Propriété 6.16 $\overline{s}^n = \overline{s^n} \qquad (n \in \mathbb{Z}, s \neq 0 \text{ si } n < 0)$

Propriété 6.17 $\overline{\overline{z}} = z$

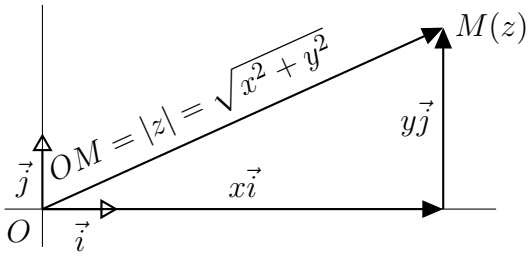
6.2 Forme trigonométrique

6.2.1 Module

Dans cette section, s et z désignent des nombres complexes

Définition 6.18 Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif ou nul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété 6.19



Propriété 6.20 $|z| \in \mathbb{R}+$

Propriété 6.21 $|z| = 0 \iff z = 0$

Propriété 6.22 $\big||s| - |z|\big| \leqslant |s + z| \leqslant |s| + |z|$

Propriété 6.23 $|z| = |\overline{z}|$

Propriété 6.24 $|s \times z| = |s| \times |z| \qquad (s \neq 0)$

Propriété 6.25 $\left|\frac{s}{z}\right| = \frac{|s|}{|z|} \qquad (s \neq 0)$

Propriété 6.26 $|z^n| = |z|^n \qquad (n \in \mathbb{Z}, z \neq 0 \text{ si } n < 0)$

Propriété 6.27 $|z|^2 = z\overline{z}$

Propriété 6.28 $\begin{matrix} \big|\Re e(z)\big| \\ \big|\Im m(z)\big| \end{matrix} \leqslant |z|$

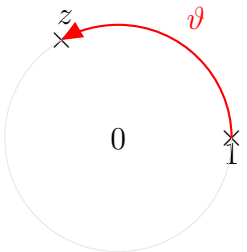
Propriété 6.29 $\underbrace{|x|}_{\text{module}} = \underbrace{|x|}_{\text{valeur absolue}} \qquad (x \in \mathbb{R})$

Méthode 6.30 (pour mettre le quotient $1/z$ sous forme algébrique) Multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué de z.

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

6.2.2 Argument

Définition 6.31 L'argument d'un nombre complexe z de module 1 est la longueur θ en radian de l'arc du cercle trigonométrique allant de 1 à z dans le sens direct. Cette longueur, qui est unique modulo 2π, est notée $\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$.



L'argument d'un nombre complexe $z \neq 0$ est l'argument de $z/|z|$.

Propriété 6.32 $s = z \iff \begin{cases} |s| = |z| \\ \arg(s) \equiv arg(z) \quad [2\pi] \end{cases}$

Propriété 6.33 $\arg(z \times s) = \arg(z) + \arg(s) \quad [2\pi]$

Propriété 6.34 $\arg\left(\frac{z}{s}\right) = \arg(z) - \arg(s) \quad [2\pi]$

Propriété 6.35 $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$

Propriété 6.36 $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$

6.2.3 Exponentielle complexe

Définition 6.37 L'exponentielle réelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est la bijection réciproque du logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$. En d'autres termes
$$y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln(y) \qquad (y > 0, x \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.38 L'exponentielle réelle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = \mathrm{e}^x \qquad (x \in \mathbb{R})$

Définition 6.39 L'exponentielle d'un nombre imaginaire pur $i\theta$ est l'unique nombre complexe z de module 1 et d'argument θ

Définition 6.40 $\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{iy} \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

Corollaire 6.41 $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re e(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \Im m(z) \quad [2\pi]$

Corollaire 6.42 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^s \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = s\mathrm{e}^{2\pi i k}$

Propriété 6.43 $\mathrm{e}^z = 1 \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, z = 2\pi k i)$

Théorème 6.44 $\mathrm{e}^{z+s} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^s \qquad (z \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C})$

Corollaire 6.45 $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z} \qquad (z \in \mathbb{C})$

Corollaire 6.46 $\mathrm{e}^{z-s} = \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^s} \qquad (z \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C})$

Corollaire 6.47 $\mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n \qquad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z})$

Propriété 6.48 $z^n = 1 \iff (\exists k \in [\![1, n]\!], z = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k}{n}}) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

Propriété 6.49 $\mathrm{e}^z \neq 0 \qquad (z \in \mathbb{C})$

6.2.4 Forme trigonométrique

Définition 6.50 $z = |z|\mathrm{e}^{i\arg(z)} \qquad (z \in \mathbb{C}^*)$

Propriété 6.51 $\forall z \in\in \mathbb{C}, \exists! r \geqslant 0, \exists \underbrace{\vartheta \in]-\pi, \pi]}_{\text{unique si } \vartheta \neq 0}, z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$

6.3 Trigonométrie

6.3.1 cosinus et sinus

Définition 6.52
$$\begin{aligned}\cos(\vartheta) &= \mathfrak{R}e\left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)\\ \sin(\vartheta) &= \mathfrak{I}m\left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)\end{aligned} \qquad (\vartheta \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.53 $\mathrm{e}^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta) \qquad (\vartheta \in \mathbb{R})$

Propriété 6.54 Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques et π-antipériodiques sur $\mathbb{R}$

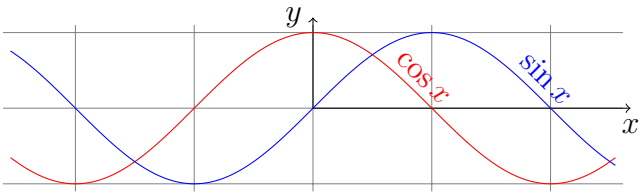
$$\begin{aligned}\cos(x+2\pi) &= \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+\pi) = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Propriété 6.55 La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x)\\ \sin(-x) &= -\sin(x)\end{aligned} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.56 Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &&= -\sin(x)\\ \sin'(x) &= \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &&= \cos(x)\end{aligned} \qquad (x \in \mathbb{R})$$



Propriété 6.57 $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$

Propriété 6.58
$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\end{aligned} \qquad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

Corollaire 6.59

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1\\ \sin(2x) &= 2\sin x \cos x\end{aligned} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.60 $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$

Propriété 6.61 $\cos x = \cos y \iff \underbrace{x \equiv y \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y \quad [2\pi]}_{x \equiv \pm y \quad [2\pi]}$

Propriété 6.62 $\sin x = \sin y \iff x \equiv y \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y \quad [2\pi]$

6.3.2 tangente

Dans cette section, x, a et b désignent des nombres réels

Définition 6.63 La fonction tangente est la fonction définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Propriété 6.64 $\tan = \{x \in \mathbb{R} : x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]\}$

Propriété 6.65 La fonction tangente est π-périodique sur son ensemble de définition

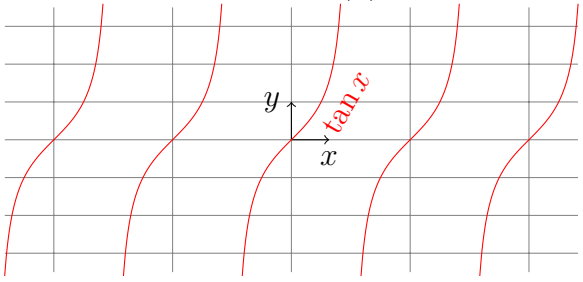
$$\tan(x + \pi) = \tan(x) \qquad (x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$$

Propriété 6.66 La fonction tangente est impaire sur son ensemble de définition

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad (x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$$

Propriété 6.67 La fonction tangente est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition et

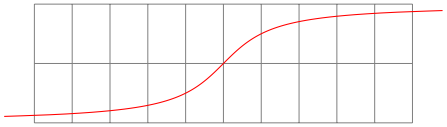
$$\tan'(x) = \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad (x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$$



Propriété 6.68 $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad (a, b \text{ et } a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$

6.3.3 arctangente

Définition 6.69 La fonction arctangente Arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection réciproque de la restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente



Propriété 6.70 La fonction arctangente est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Analyse

7 Suites Séquence 4

programme

- Limite d'une suite, suites convergentes.
  On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.
  On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε,n_0) sans en faire une utilisation systématique.
- Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.
- Unicité de la limite.
- Opérations algébriques sur les suites convergentes.
- Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
- Existence d'une limite par encadrement.
- Suites monotones, croissantes, décroissantes,suites adjacentes.
- Théorème de limite monotone.
  Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étantla borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite.
- Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.
- Rappel des croissances comparées.
  Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(ln(n)^b)$

– Les outils de ce chapitre font partie des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
– Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
– Trouver une formule pour u_n
– Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.
Utilisation en ds/concours : fréquente.

7.1 Généralités

Dans cette section, I désigne une partie non vide de $\mathbb{N}$.

suite Une suite de nombres est essentiellement une liste ordonnée de nombres finie ou non, chaque élément de la liste étant uniquement détérminé par son indice.

Définition 7.1 Une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ indicée par I est une application $u : I \to \mathbb{R}$

– La suite $u : I \to \mathbb{R}$ sera noté plus simplement $u = (u_n)_{n\in I}$.
– La plupart du temps, nous auront $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$.

– Bien qu'elles soient définies à l'aide d'applications, nous n'allons pas nous servir des suites comme nous nous servons des fonctions.

ensemble

L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{R}$ indicées par I est noté $\mathbb{R}^I$.

Définition 7.2 $\mathbb{R}^I = \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$

– Cette nouvelle notation de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$, permet de bien marquer la différence d'usage du même objet, vu comme une suite ou comme une application.

addition multiple produit

Dans la suite de cette section, u et v désignent des suites de $\mathbb{R}^I$.
La somme (resp. Le produit) des suites est la suite des sommes (resp. produits).

Définition 7.3 $(u+v)_n := u_n + v_n \qquad (n \in I)$

Définition 7.4 $(\lambda \cdot u)_n := \lambda u_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, n \in I)$

Définition 7.5 $(u \times v)_n := u_n v_n \qquad (n \in I)$

– Les relations précédentes affirment essentiellement que

$$\begin{cases} (\lambda u + \mu v)_n & = \lambda u_n + \mu v_n \\ (u \times v)_n & = u_n \times v_n \end{cases} \qquad (n \in I).$$

algèbre

Les lois $+$, $\cdot$ et $\times$ des suites héritent leurs propriétés (associativité, commutativité, distributivité, existence d'éléments neutres et d'inverses) des lois $+$, $\cdot$, $\times$ de $\mathbb{R}$.

Propriété 7.6 On calcule dans $(\mathbb{R}^I, +, \cdot, \times)$ comme dans $(\mathbb{R}, +, \cdot, \times)$.

– La suite nulle $0 = (0)_{n\in I}$ est un élément neutre pour la loi $+$ des suites

$$0 + u = u + 0 = u \qquad (u \in \mathbb{R}^I).$$

– La suite constante $1 = (1)_{n\in I}$ est un élément neutre pour la loi $\times$ des suites

$$1 \times u = u \times 1 = u \qquad (u \in \mathbb{R}^I).$$

décalage d'indice

A partir d'une suite, on peut en fabriquer d'autres en décalant ses éléments

Propriété 7.7 Pour $d \in \mathbb{Z}$, la translatée $\mathcal{T}_d(u)$ de la suite u est la suite $w \in \mathbb{R}^{d+I}$ définie par

$$w_n := u_{n-d} \qquad (n \in d + I)$$

– Pour $d \geqslant 0$, les suites $(u_{n+d})_{n\geqslant -d}$ et $(u_{n-d})_{n\geqslant d}$ possèdent les mêmes éléments que u, décalés de d vers la gauche (resp. vers la droite).

n	0	1	$\cdots$	d	$d+1$	$\cdots$	n	$n+1$	$\cdots$
u_n	u_0	u_1	$\cdots$	u_d	u_{d+1}	$\cdots$	u_n	u_{n+1}	$\cdots$
$u_(n+d)$	u_d	u_{d+1}	$\cdots$	u_{2d}	u_{2d+1}	$\cdots$	u_{n+d}	u_{n+d+1}	$\cdots$
u_{n-d}			$\cdots$	u_0	u_1	$\cdots$	u_{n-d}	u_{n-d+1}	$\cdots$

– En pratique, il est aussi utile de restreindre les indices de la suite translatée, en considérant, par example $(u_{n+d})_{n\geqslant 0}$ au lieu de $(u_{n+d})_{n\geqslant -d}$

restriction d'indice

Lorsqu'on s'intéresse aux éléments d'une suite à partir d'un certain rang, il est possible de se ramener à une suite indicée sur $\mathbb{N}$, via une translation et une restriction d'indices

Propriété 7.8 Pour $N \in \mathbb{Z}$ et $I_N := \{n \in I : n \geqslant N\}$, la suite $(u_n)_{n\in I_N}$ appartient à $\mathbb{R}^{I_N}$

7.2 Suites fondamentales

Séquence 1

– Les outils de cette section font parti des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
– Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
– Trouver une formule pour u_n
– Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.
Utilisation en ds/concours : fréquente.

7.2.1 Suites arithmétiques

Dans cette section, r désigne un nombre de $\mathbb{R}$.

suite arithmétique raison

Définition 7.9 u arithmétique de raison $r \iff u_{n+1} - u_n = r \qquad (n \geqslant 0)$

– Une suite est dite arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant en lui ajoutant la même constante

$$u \text{ suite arithmétique} \iff (\exists r \in \mathbb{R} : u \text{ suite arithmétique de raison } r).$$

expression

Propriété 7.10 u arithmétique de raison $r \iff u_n = u_0 + nr \qquad (n \geqslant 0)$

– u diverge si $|r| \neq 0$.

– u est constante si $r = 0$.

somme

La somme des termes d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne des termes aux extrémités

Propriété 7.11 Soit u une suite arithmétique de raison r. Alors,

$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2}(n-m+1) = \text{moyenne aux extrémités}\times\text{nombre de termes} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n).$$

7.2.2 Suites géométriques

Dans cette section, q désigne un nombre de $\mathbb{R}$.

suite géométrique

Définition 7.12 u géométrique de raison $q \iff u_{n+1} = qu_n \qquad (n \geqslant 0)$

– Une suite est dite géométrique lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant en le multipliant par la même constante

$$u \text{ suite géométrique} \iff (\exists q \in \mathbb{R} : u \text{ suite géométrique de raison } q.$$

– Si $q = 0$, les solutions de (7.1) sont nulles à partir du rang 1
– Si $q = 1$, les solutions de (7.1) sont constantes

expression

Propriété 7.13 u géométrique de raison $q \iff u_n = u_0 q^n \qquad (n \geqslant 0)$

– u converge vers 0 si $|q| < 1$.

– u est constante si $q = 1$.

– u diverge lorsque $|q| \geqslant 1$ et $q \neq 1$.

somme

La somme des termes d'une suite géométrique est égale au quotient du terme qui suivrait le dernier moins le premier terme par la raison moins 1. la moyenne des termes auxextrémités

Propriété 7.14 Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors,

$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n} u_k = \frac{u_m - q \times u_n}{1-q} = \frac{\text{premier terme} - \text{terme après le dernier}}{1 - \text{raison}} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n).$$

7.2.3 Suites arithmético-géométriques

Dans cette section, a et b désignent deux nombres de $\mathbb{R}$ et nous considérons les équations du type

$$u_{n+1} = au_n + b \qquad (n \geqslant 0) \qquad (7.1)$$

ite arithméti-o-géométrique

Définition 7.15 u arithmético-géométrique $\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant (7.1)

- Si $a = 0$, les solutions de (7.1) sont constantes à partir du rang 1
- Si $a = 1$, les solutions de (7.1) sont arithmétiques, de raison b
- Si $b = 0$, les solutions de (7.1) sont géométriques, de raison a

formule

Propriété 7.16 Soient $a \neq 1$ et $c = \frac{b}{1-a}$. Alors,

$$u \text{ vérifie (7.1)} \iff u_n = c + a^n(u_0 - c) \qquad (n \geqslant 0).$$

Méthode 7.17 (présentation recommandée)

1. Chercher la suite constante c vérifiant (7.1) en résolvant l'équation $x = ax + b$
2. Soustraire et remarquer que la suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a
3. En déduire la formule de u_n.

7.2.4 Suites vérifiant une récurrence linéaire du second ordre

Dans cette section, nous considérons pour $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$ les équations du type

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \qquad (n \geqslant 0). \tag{7.2}$$

récurrence linéaire homogène d second ordre

Définition 7.18 Une suite u satisfait une récurrence linéaire homogène du second ordre *ssi* il existe des nombres réels $a \neq 0$, b et $c \neq 0$ vérifiant (7.2).

- Une telle suite est complétement déterminée par la donnée de ses 2 premiers termes u_0 et u_1
- Si $a = b = c = 0$, toutes les suites sont solutions de l'équation (7.2), qui n'a aucun intérêt
- Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ avec $a = 0$ ou $c = 0$, les solutions de (7.2) sont aithmético-géométriques

polynôme caractéristique

Définition 7.19 Le polynôme caractéristique associé à (7.2) est le trinôme

$$P = aX^2 + bX + c \tag{7.3}$$

équation caractéristique

Définition 7.20 L'équation caractéristique associée à (7.2) est l'équation $aX^2 + bX + c = 0$

solutions

Propriété 7.21 Si le polynôme caractéristique (7.3) admet une racine double s, une suite réelle u est solution de (7.2) *ssi* il existe des nombres réels λ et μ tels que

$$u_n = \lambda s^n + \mu n z^n \qquad (n \geqslant 0)$$

Propriété 7.22 Si le polynôme caractéristique (7.3) admet deux racines distinctes s et z, une suite réelle u est solution de (7.2) *ssi* il existe des nombres λ et μ tels que

$$u_n = \lambda s^n + \mu z^n \qquad (n \geqslant 0)$$

– Dans le cas où les racines de P sont réelles, les constante λ et μ sont réelles.
– Lorsque les racines de P ne sont pas réelles, elles sont conjuguées. En posant $s = re^{i\vartheta}$ et $z = re^{-i\vartheta}$, on peut alors trouver deux constantes réelles α et β telles que

$$u_n = \alpha r^n \cos(n\vartheta) + \beta r^n \sin(n\vartheta) \qquad (n \geqslant 0)$$

7.3 Suites bornées, minorées, majorées

suites bornées

Dans cette section, u désigne une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite est bornée *ssi* ses éléments appartiennent tous à un même disque.

Définition 7.23 u est bornée *ssi* il existe M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour $n \geqslant 0$

Définition 7.24 u est bornée à partir du rang N *ssi* il existe M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour $n \geqslant N$

calage d'indice

Le fait qu'une suite soit bornée ne dépend pas de ses premiers éléments, mais dépend de ses éléments u_n pour les grandes valeurs de n.

Propriété 7.25 Une suite est bornée *ssi* elle est bornée à partir d'un certain rang

espace des suites bornées

La somme, la multiplication par une constante et le produit de suites bornées est une suite bornée

Propriété 7.26 Les sommes, les multiples et les produits de suites bornées sont des suites bornées.

suite minorée
suite majorée

Définition 7.27 u est majorée *ssi* il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ pour $n \geqslant 0$

Définition 7.28 u est minorée *ssi* il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 0$

– Parler de suites minorées ou majorées n'a de sens que pour les suites réelles car il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$ (écrire $i \leqslant 1$ n'a pas de sens).
– u est minorée *ssi* l'ensemble $\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ admet un minorant
– u est majorée *ssi* l'ensemble $\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ admet un majorant

suites réelles bornées

Propriété 7.29 *u est bornée ssi u est minorée et majorée*

– Le fait qu'une suite soit minorée ou majorée ne dépend pas de ses premiers éléments, mais dépend de ses éléments u_n pour les grandes valeurs de n.

alage d'indice

dre des suites

Notation 7.30 $u \leqslant v \iff u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant 0$

– Cette relation entre suites définit un ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Elle est reflexive, transitive et anti-symétrique :

$$\begin{array}{rlll} u \leqslant u & (u \in \mathbb{R}^I) & & \text{reflexive} \\ (u \leqslant v \text{ et } v \leqslant w) \implies (u \leqslant w) & & (u,v,w \in \mathbb{R}^I) & \text{transitive} \\ (u \leqslant v \text{ et } v \leqslant u) \implies (u \leqslant v) & & (u,v \in \mathbb{R}^I) & \text{anti-symétrique} \end{array}$$

– Cet ordre des suites réelles va permettre d'écrire simplement certaines propriétés fondamentales du calcul de limite (théorème des gendarmes,...).

7.4 Suites convergentes

Dans cette section, u et v désignent des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ℓ désigne un nombre de $\mathbb{R}$.

notation

Définition 7.31 $\left.\begin{array}{c} u \text{ tends vers } \ell \\ u \text{ converge vers } \ell \end{array}\right| \iff \lim(u) = \ell \iff \underset{\text{non standard}}{u \to \ell}$

limite

Définition 7.32 *$u \to \ell$ ssi tout intervalle ouvert contenant ℓ contient u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.*

Définition 7.33 $u \to \ell \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$

unicité

Propriété 7.34 *Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique*

– Lorsqu'elle existe, la limite ℓ de la suite u est notée $\ell = \lim u$ ou $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

e convergente

Définition 7.35 *u converge ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers ℓ*

– On dit qu'une suite converge ou qu'elle est convergente.

ite divergente

Définition 7.36 *u diverge ssi u ne converge pas*

– Lorsque la suite u ne converge pas, on dit qu'elle diverge, qu'elle est divergente.

$$u \text{ diverge} \iff \forall \ell \in \mathbb{R} : u \text{ ne converge pas vers } \ell.$$

– Une suite peut diverger pour diverses raisons :
– Elle n'est pas bornée. Exemple : $u_n = n$.
– Elle oscille entre plusieurs valeurs. Exemple : $u_n = (-1)^n$
– Elle prend des valeurs ératiques dans un disque

condition nécessaire

Propriété 7.37 u converge $\implies$ u bornée

limite nulle

Une suite u converge vers ℓ *ssi* la suite $u - \ell$ converge vers 0.

Propriété 7.38 $u \to \ell \iff u - \ell \to 0$

– Il est plus facile de montrer que la suite $u - \ell$ converge vers 0 que de montrer que la suite u converge vers ℓ.

principe des gendarmes

Une suite réelle inférieure en valeur absolue à une suite de limite nulle converge vers 0.

Propriété 7.39 $\left.\begin{array}{l} |u| \leqslant v \\ v \to 0 \end{array}\right\} \implies u \to 0$

Addition Produit

Théorème 7.40 Soient u et v des suites convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les suites λu, $u + v$ et $u \times v$ convergent et

$$\begin{array}{rcl} \lim(\lambda.u) & = & \lambda.\lim(u) \\ \lim(u+v) & = & \lim(u) + \lim(v) \\ \lim(u \times v) & = & \lim(u) \times \lim(v) \end{array}$$

nite non nulle

Une suite de limite non nulle ne s'annule plus à partir d'un certain rang.

Propriété 7.41 $u \to \ell \neq 0 \implies (\exists N \geqslant 0 : \forall n \geqslant N, u_n \neq 0)$

– On peut obtenir une propriété plus forte. Si $u \to \ell \neq 0$, on a en fait

$$\exists N \geqslant 0 : \forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2} > 0$$

quotient

Si $v \to \ell \neq 0$, alors la suite $u/v := (u_n/v_n)_{n \geqslant N}$ est définie à partir d'un certain rang.

Théorème 7.42 Soient $u \to \ell$ et $v \to \ell' \neq 0$. Alors, $\lim\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{\ell}{\ell'}$

Cv+Cv=Cv
Cv+Dv=Dv
Dv+Dv=?

Propriété 7.43 $\left\{\begin{array}{l} u \text{ converge} \\ v \text{ diverge} \end{array}\right. \implies u + v \text{ diverge}$

– Si u et v sont deux suites divergentes, la suite $u+v$ peut converger ou diverger :
- La somme de $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(-n)_{n\geqslant 0}$ est la suite nulle, qui converge.
- La somme de $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(n)_{n\geqslant 0}$ diverge.

bre des suites convergentes

La somme, la multiplication par une constante et le produit de suites convergentes est une suite convergente

Propriété 7.44 Les sommes, les multiples, les produits de suites convergentes sont convergentes

Dans cette section u, v et w désignent des suites réelles et ℓ et ℓ' des nombres réels.

limite par valeur inférieures supérieures

Notation 7.45
$$u \to \ell^- \iff (u \to \ell \text{ et } u_n < \ell \text{ quand } n \to \infty)$$
$$u \to \ell^+ \iff (u \to \ell \text{ et } u_n > \ell \text{ quand } n \to \infty)$$

égalités larges

Les inégalités larges sont conservées par passage à la limite.

Propriété 7.46 Soient $u \to \ell$ et $v \to \ell'$. Alors, $u \leqslant v \implies \lim u \leqslant \lim v$.

– Les inégalités strictes ne sont en général pas conservées.

$$\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n} > 0 \text{ mais } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

– Utilisez les inégalités larges de préférence aux inégalités strictes.

principe des gendarmes réels

une suite encadrée par deux suites, de même limite ℓ, converge également vers ℓ.

Propriété 7.47 Soient $u \to \ell$ et $w \to \ell$. Alors, $u \leqslant v \leqslant w \implies v \to \ell$

Chaque nombre réel peut être obtenu comme la limite d'une suite de nombres rationnels.

7.5 Suites divergeant vers l'infini

Dans cette section, u et v désignent des suites réelles.

divergence vers $-\infty$

Définition 7.48 Une suite diverge vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert d'extrémité $-\infty$ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Définition 7.49 $u \to -\infty \iff (\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m)$

– Lorsque u tends ver $+\infty$ (on dit également que u diverge vers $+\infty$), on note $\lim u = +\infty$.

divergence vers $+\infty$

Définition 7.50 Une suite diverge vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert d'extrémité $+\infty$ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Définition 7.51 $u \to +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M)$

– Lorsque u tends ver $+\infty$ (on dit également que u diverge vers $+\infty$), on note $\lim u = +\infty$.

addition

Propriété 7.52 $\left.\begin{array}{l} u \to +\infty \\ v \text{ minorée} \end{array}\right\} \Longrightarrow u + v \to +\infty$

– Une suite convergente ou qui diverge vers $+\infty$ est minorée

multiple

Propriété 7.53 $u \to +\infty \implies \left\{\begin{array}{ll} -\lambda u \to -\infty & (\lambda > 0) \\ \lambda u \to +\infty & (\lambda > 0) \end{array}\right.$

produit

Le produit d'une suite divergent vers $+\infty$ et d'une suite minorée par une constante strictement positive diverge vers $+\infty$.

Propriété 7.54 $\left.\begin{array}{c} u \to +\infty \\ v \text{ minorée par } m > 0 \end{array}\right\} \implies uv \to +\infty$

inverse

Propriété 7.55 $u \to +\infty \iff \frac{1}{u} \to 0^+$

Propriété 7.56 $u \to -\infty \iff \frac{1}{u} \to 0^-$

– Pour que la suite de droite ait un sense, il faut évidemment que u ne s'annule pas à partir d'un certain rang

principe des gendarmes

Propriété 7.57 $\left.\begin{array}{l} u \leqslant v \\ u \to +\infty \end{array}\right\} \implies v \to +\infty$

7.6 Suites monotones

Dans cette section, u et v désignent des suites réelles.

croissantes décroissantes

Définition 7.58 u est $\left|\begin{array}{c} \text{croissante} \\ \text{strictement croissante} \\ \text{décroissante} \\ \text{strictement décroissante} \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} u_{n+1} \geqslant u_n \\ u_{n+1} > u_n \\ u_{n+1} \leqslant u_n \\ u_{n+1} < u_n \end{array}\right.$ $(n \geqslant 0)$

monotonie

Définition 7.59 u est strictement monotone (resp. monotone) *ssi* u est strictement décroissante ou strictement croissante (resp. décroissante ou croissante).

– Pour étudier la monotonie d'une suite u, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Méthode 7.60 (étude de monotonie d'une suite)
- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ *(recommandé)*
- Lorsque $u_n > 0$, etudier le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *(seulement si simplification, produits, puissances ou factorielles)*
- Introduire une fonction f vérifiant $f(n) = u_n$ et dresser son tableau de variation

limite monotonie

Une suite croissante (resp. décroissante) converge *ssi* elle est majorée (resp. minorée).

Théorème 7.61 Une suite croissante u converge *ssi* u est majorée. Dans tous les cas, $\lim u = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$

Théorème 7.62 Une suite décroissante u converge *ssi* u est minorée. Dans tous les cas, $\lim u = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

– Une suite croissante qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$ et une suite décroissante qui n'est pas minorée diverge vers $-\infty$

tes adjacentes

Deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tends vers 0

Définition 7.63 u et v sont adjacentes $\iff \begin{cases} u \text{ croissante} \\ v \text{ décroissante} \\ v - u \to 0 \end{cases}$

théorème

Prouver que deux suites sont adjacentes permet de prouver qu'elles convergent, vers la même limite qui plus est.

Théorème 7.64 Deux suites adjacentes convergent vers la même limite finie

7.7 Suites négligeables

Séquence 23

programme

- Suites négligeables. Notation $u_n = o(v_n)$.
- Croissances comparées

Dans cette section u, v, w, U et V désignent des suites de nombres de $\mathbb{R}$.

te négligeable

Une suite est négligeable devant une autre suite lorsqu'elle est égale au produit de cette suite par une suite de limite nulle.

Définition 7.65 $\left.\begin{array}{c} u = o(v) \\ u \text{ négligeable devant } v \end{array}\right| \iff \underbrace{u \prec v}_{\text{non standard}} \iff u = v \times \alpha$ avec $\alpha \to 0$.

– Lorsque v ne s'annule pas, cela revient à dire que u/v tends vers 0.

transitivité

Si u est négligeable devant v qui est négligeable w, alors u est négligeable devant w.

Propriété 7.66 $u \prec v \prec w \implies u \prec w$

somme produit puissance multiple quotient

Les relations suivantes permettent de simplifier des relations faisant intervenir sommes, produit, puissances et quotients.

Propriété 7.67 $\left.\begin{array}{l} u \prec w \\ v \prec w \end{array}\right\} \implies u + v \prec w$

Propriété 7.68 $\left.\begin{array}{l} u \prec U \\ v \prec V \end{array}\right\} \implies uv \prec UV$

Propriété 7.69 $u \prec v \implies u^k \prec v^k \qquad (k \geqslant 1)$

Propriété 7.70 $u \prec v \iff \lambda u \prec \mu v \qquad (\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$

Propriété 7.71 Soient u et v suites ne s'annulant pas. Alors $u \prec v \iff \dfrac{1}{v} \prec \dfrac{1}{u}$

7.8 Suites équivalentes

Séquence 23

programme

- Suites équivalentes. Notation $u_n \sim v_n$.
- $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$
- Compatibilité de l'équivalence avec le produit,le quotient et l'élévation à une puissance.

Dans cette section u, v, w, U et V désignent des suites de nombres de $\mathbb{R}$.

suites équivalentes

Une suite est équivalente à une autre suite lorsqu'elle est égale au produit de cette suite par une suite de limite 1.

Définition 7.72 $\left.\begin{array}{c} u \sim v \\ u \text{ équivalente à } v \end{array}\right| \iff u = v + o(v) \iff u = v \times \alpha$ avec $\alpha \to 1$

- Lorsque v ne s'annule pas, cela revient à dire que u/v tends vers 1.
- La relation précédente peut également s'écrire

$$u \sim v \iff u = v + o(v)$$

- Cette relation est reflexive et symétrique : pour u,$v \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{array}{rll} u \sim v \iff v \sim u & & \text{(symétrie)} \\ u \sim u & & \text{(reflexivité)} \end{array}$$

transitivité Si u est équivalente à v qui est équivalente à w, alors u est équivalente à w.

Propriété 7.73 $u \sim v \sim w \implies u \sim w$

signe Deux suites réelles équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang

Propriété 7.74 Deux suites réelles équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang

- La fonction signe dont il est question dans cette propriété est définie par

$$\text{signe}\,(x) = \begin{cases} \text{positif} & \text{(x>0)} \\ \text{nul} & \text{si (x=0)} \\ \text{négatif} & \text{(x<0)} \end{cases}$$

produit puissance quotient Les relations suivantes permettent de simplifier des relations d'équivalence faisant intervenir produits, puissances et quotients.

Propriété 7.75 $\left.\begin{array}{l} u \sim U \\ v \sim V \end{array}\right\} \implies uv \sim UV$

Propriété 7.76 $u \sim v \implies u^k \sim v^k \qquad (k \geqslant 1)$

Propriété 7.77 Soient u et v deux suites ne s'annulant pas. Alors, $u \sim v \iff \frac{1}{v} \sim \frac{1}{u}$

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents en général, c'est illégal. Pour

$$u_n := 1, \quad U_n := 1, \quad v_n := -1 \quad \text{et} \quad V_n := -1 + \frac{1}{n},$$

par exemple, on a $u_n \sim U_n$, on a $v_n \sim V_n$ et pourtant on a $u_n+v_n = 0 \nsim \dfrac{1}{n} = U_n+V_n$.

limite

Propriété 7.78 $u \to \ell \iff u \sim \ell, \qquad (\ell \neq 0)$

Propriété 7.79 $u \to 0 \iff u = o(1)$

comparaison suites de références

A l'infini, le logarithme croit moins vite qu'un monôme, un monôme croît moins vite qu'une exponentielle et une exponentielle croît moins vite que la factorielle

Théorème 7.80 $\ln(n) \prec n^\alpha \prec \mathrm{e}^{\beta n} \prec n! \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$

8 Séries Séquence 23 et 24

Dans cette section, S désigne la suite des sommes partielles d'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (n \geqslant 0)$$

Remarque : une suite v peut être considérée comme une série de terme général u défini par

$$u_0 = v_0 \text{ et } u_k = v_k - u_{v-1} \qquad (k \geqslant 1)$$

8.1 Généralités

programme

- Série de terme général u_n. *On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).*
- Sommes partielles associées
- Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.
- Combinaison linéaire de séries convergentes.
- Définition de la convergence absolue.
- La convergence absolue implique la convergence. *On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes. Résultat admis.*
- Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Convergence

Définition 8.1 S converge $\iff \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge

Si S converge, on dit que la série de terme général u converge ou qu'elle est de nature convergeante.
Si S diverge, on dit que la série de terme général u diverge ou qu'elle est de nature divergente.

Somme de la série

Définition 8.2 En cas de convergence de la suite S des sommes partielles, sa limite ℓ est appelée somme de la série et est notée

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \ell = \lim S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

uite des restes

Définition 8.3 La suite R des reste d'une série convergente de terme général u est définie par

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \qquad (n \geqslant 0)$$

Propriété 8.4 Si la série de terme général u converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$ pour $n \geqslant 0$

Condition nécéssaire de convergence

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série convergente, alors u converge vers 0.

Propriété 8.5 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge $\implies u \to 0$

Lorsque la suite u ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement

Relation de Chasles

Propriété 8.6 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge $\iff \sum_{k=m}^{\infty} u_k$ converge $\qquad (m \in \mathbb{N})$

Et en cas de convergence, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{m-1} u_k + \sum_{k=m}^{\infty} u_k \qquad (m \in \mathbb{N})$$

– La convergence d'une série ne dépend que de ce qui se passe au voisinage de l'infini.

Linéarité

Propriété 8.7 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et u et v les termes généraux de deux séries convergentes, alors la série de terme général $\lambda u + \mu v$ converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Addition

Propriété 8.8 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge
Si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Convergence absolue

Définition 8.9 On dit qu'une série de terme général u converge absolument si et seulement si la série de terme général $|u|$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge absolument} \iff \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \text{ converge}$$

Convergence olue et simple

Propriété 8.10 Si la série $\sum u_k$ converge absolument, alors la série $\sum u_k$ converge et de plus

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

8.2 Séries à termes positifs

programme

- Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$.
- Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Dans cette section u est à terme positifs ou nuls (mais les énoncés sont aussi valables pour les suites négatives ou nulles quite à tout multiplier par -1)En pratique, il faut que u reste de signe constant à partir d'un certain rang.

équivalent

Propriété 8.11 Soient u et v deux suites à termes positifs ou nuls. Si $u \sim v$, alors les séries de termes généraux u et v ont la même nature *Plus généralement, on a*

$$\left.\begin{array}{c} u \sim v \\ u_n \text{ de signe constant pour } n \geqslant N \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_k \text{ a même nature que } \sum_{n=0}^{\infty} v_k$$

inégalité

Propriété 8.12 Soient u et v deux suites telles que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant 0$.

- Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge
- Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge et on a $0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_k$

petit o

Propriété 8.13 Soient u et v deux suites à termes positifs ou nuls telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge
- Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge.

8.3 Séries de référence

programme

- Convergence des séries de Riemann.
- Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.
- Série exponentielle. $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. *Ce résultat pourra être démontré à l'aide de la formule de Taylor.*

Dans toute cete section, α et x désignent des nombres réels

Série de Riemann

Propriété 8.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$

Série géométrique et dérivées

Propriété 8.15 $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$ convergent *ssi* $-1 < x < 1$.

Propriété 8.16 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$

Propriété 8.17 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1 < x < 1)$

Propriété 8.18 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ $(-1 < x < 1)$

Exponentielle

Propriété 8.19 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ $(x \in \mathbb{R})$

9 Fonctions réelles (comportement local)

programme

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans lesexercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctionsusuelles.
Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.
Aucune démonstration (du cours) n'est exigible des étudiants.

9.1 Limites

Séquence 6

9.1.1 Limites finies

programme

- Définition de la limite d'une fonction d'une variable en un point. *On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I , x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I et ℓ un élément de $\mathbb{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.*
- Unicité de la limite.

Dans cette section, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels, f, g et h désignent des fonctions réelles définie sur un intervalle I et a désigne un élément ou une extrémité finie de I. Pour simplifier, on note

$$\underbrace{f \underset{a}{\to} \ell}_{\text{non standard}} \iff \lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \left| \begin{array}{c} f \text{ tends vers } \ell \text{ en } a \\ f \text{ converge vers } \ell \text{ en } a \\ f \text{ admet } \ell \text{ comme limite en } a \end{array} \right.$$

limite

Définition 9.1 f admet ℓ pour limite en a *ssi* pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$$f \underset{a}{\to} \ell \iff \big(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

unicité de la limite

Propriété 9.2 La limite d'une fonction en un point est unique, lorsqu'elle existe.

9.1.2 Généralisation du concept de limite

programme

- Limites à droite et à gauche.
- Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.
- Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

Il est possible de généraliser la notion de limite en faisant tendre x vers $-\infty$, a par la gauche, a, a par la droite, $+\infty$ et avec $f(x)$ qui tends de même vers $-\infty$, vers ℓ par la gauche, vers ℓ, vers ℓ par la droite, vers $+\infty$.De sorte qu'il existe 25 situations mathématiques différentes.
Il existe un formalisme qui permet d'unifier les 25 différents aspects des limites :
Pour tout voisinage V de la limite ℓ, il existe un voisinage U du point a tel que

$$\underbrace{x \in U}_{\text{quand } x \text{ est proche de } a} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{f(x) \in V}_{f(x) \text{ est proche de } \ell}$$

mais il n'est pas au programme et nous ne l'utilisons ici que pour illustrer et comprendre les concepts de limite, dont nous ne présenteront que quelques variantes

mite à gauche à droite

Définition 9.3 f admet ℓ pour limite à gauche en a *ssi* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a-\alpha, a[$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) & = \ell \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) & = \ell \\ f\left(a^-\right) & = \ell \end{array}\right| \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a-\alpha, a[, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$$

Définition 9.4 f admet ℓ pour limite à droite en a *ssi* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap]a, a+\alpha]$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) & = \ell \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) & = \ell \\ f\left(a^+\right) & = \ell \end{array}\right| \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap]a, a+\alpha], |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$$

mites en $\pm\infty$

Définition 9.5 f tends vers ℓ en $+\infty$ *ssi* pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout élément x de $I \cap [M, +\infty[$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$$f \underset{+\infty}{\to} \ell \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap [M, +\infty[, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$$

Définition 9.6 *f tends vers ℓ en $-\infty$ ssi* pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout élément x de $I \cap]-\infty, m]$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$$f \underset{-\infty}{\to} \ell \iff \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap]-\infty, m], |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$$

imites infinies

Définition 9.7 *f diverge vers $+\infty$ en a ssi* pour tout nombre $M \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x) \geqslant M$

$$f \underset{a}{\to} +\infty \iff \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \left(\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha], f(x) \geqslant M\right)$$

Définition 9.8 *f diverge vers $-\infty$ en a ssi* pour tout nombre $m \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x) \leqslant m$

$$f \underset{a}{\to} -\infty \iff \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \left(\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha], f(x) \leqslant m\right)$$

imites par va-rs supérieures ou inférieures

f tends vers ℓ par valeurs supérieures en $a$ssi f tends vers ℓ, en restant strictement supérieur à ℓ, lorsque x tends vers en a

Notation 9.9 $f \underset{a}{\to} \ell^+ \iff f \underset{a}{\to} \ell$ avec $f(x) > \ell \quad (x \to a)$

f tends vers ℓ par valeurs inférieures en a ssi f tends vers ℓ, en restant strictement inférieur à ℓ, lorsque x tends vers en a

Notation 9.10 $f \underset{a}{\to} \ell^- \iff f \underset{a}{\to} \ell$ avec $f(x) < \ell \quad (x \to a)$

9.1.3 Opérations

programme

- Opérations algébriques sur les limites.
- Compatibilité avec la relation d'ordre.
- Existence d'une limite par encadrement.
- Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ.
- Limite d'une fonction composée.

Dans cette section, nous considérons principalement les opérations concernant les limites finies en un point réel. Au besoin, on utilisera le bon sens pour déterminer

les opérations correspondantes pour les autres variantes de limite, car il n'est pas question de les expliciter toutes.

valeur absolue

Propriété 9.11 $f \underset{a}{\to} \ell \implies |f| \underset{a}{\to} |\ell|$

Addition
Produit

Théorème 9.12 $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\to} \ell \\ g \underset{a}{\to} \ell' \end{array}\right\} \implies f+g \underset{a}{\to} \ell+\ell'$

Théorème 9.13 $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\to} \ell \\ g \underset{a}{\to} \ell' \end{array}\right\} \implies f \times g \underset{a}{\to} \ell \times \ell'$

– Autrement dit, on a

$$\begin{array}{rcl} \lim_a(\lambda.f) & = & \lambda.\lim_a(f), \\ \lim_a(f+g) & = & \lim_a(f)+\lim_a(g), \\ \lim_a(f\times g) & = & \lim_a(f)\times\lim_a(g). \end{array}$$

– Cette propriété est également valable pour des limites infinies, qui ne donnent pas d'indetermination (essentiellement $-\infty+\infty$ et $0\times\infty$)

mite non nulle

Une fonction de limite non nulle en a ne s'annule pas autour de a.

Propriété 9.14 $f \underset{a}{\to} \ell \neq 0 \implies (\exists \alpha > 0 : \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, f(x) \neq 0)$

quotient

Si $\lim_a g(x) \neq 0$, alors la fonction f/g est définie autour de a.

Théorème 9.15 $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\to} \ell \\ g \underset{a}{\to} \ell' \end{array}\right\} \implies \frac{f}{g} \underset{a}{\to} \frac{\ell}{\ell'} \qquad (\ell' \neq 0)$

– Autrement dit, on a

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a(f)}{\lim_a(g)}$$

– Cette propriété est également valable pour des limites infinies, qui ne donnent pas d'indetermination (essentiellement $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$)

composition

Théorème 9.16 Soient I et J des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des applications, ℓ et b des nombres réels et a un élément ou une extrémité de I. Alors,

$$\left.\begin{array}{l} f(I) \subset J \\ f \underset{a}{\to} b \\ g \underset{b}{\to} \ell \end{array}\right\} \implies g \circ f \underset{a}{\to} \ell$$

suite

Théorème 9.17 Soient $\ell \in \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité d'un intervalle I, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et u une suite à valeurs dans I. Alors,

$$\left.\begin{array}{c} u \to a \\ f \underset{a}{\to} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow f(u_n) \to \ell$$

égalités larges Les inégalités larges sont conservées par passage à la limite.

Propriété 9.18 Soient f et g deux fonctions réelles convergentes en a. Alors, $f \leqslant g \implies \lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$

- Les inégalités strictes ne sont en général pas conservées.
- Utilisez les inégalités larges de préférence aux inégalités strictes.

principe des gendarmes

Propriété 9.19
$$\left.\begin{array}{c} f \leqslant g \leqslant h \\ f \underset{a}{\to} \ell \\ h \underset{a}{\to} \ell \end{array}\right\} \implies g \underset{a}{\to} \ell$$

principe des gendarmes Une fonction inférieure en valeur absolue à une fonction de limite nulle en a converge vers 0 en a.

Corollaire 9.20
$$\left.\begin{array}{c} |f| \leqslant g \\ g \underset{a}{\to} 0 \end{array}\right\} \implies f \underset{a}{\to} 0$$

9.1.4 Généralisations et opérations

De même qu'il existe de multiples situations applicables au concept de limite, il existe une multitude d'opérations possibles entre limites. Le but de cette section est de permettre de distinguer les opérations possibles des autres via le concept de forme indeterminée.
Pour simplifier les notations, nous utiliserons la notation symbolique et pratique suivante *(à utiliser au brouillon seulement, car ne faisant pas partie officiellement du cours)*

$$\ell + \infty = +\infty$$

qui résume le théorème suivant $\left.\begin{array}{c} f \underset{a}{\to} \ell \\ g \underset{a}{\to} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow f + g \underset{a}{\to} +\infty.$

- **Opérations légales.** Les opérations de la section précédente restent valides lorsque x tends vers un point du type $-\infty$, a^-, a, a^+, $+\infty$.

  Par contre, lorsque les limites sont du type $-\infty$, ℓ^-, ℓ^+ ou $+\infty$, cela peut être différent.

  Quelques opérations valides (utilisant la notation précédente et parfois ∞ à la place de $+\infty$) :

$$\begin{array}{ll} \infty+\infty=+\infty & \ell+\infty=+\infty \qquad (\ell\in\mathbb{R}) \\ \infty\times\infty=+\infty & \ell\times\infty=+\infty \qquad (\ell>0) \\ -\infty\times\infty=-\infty & -\infty\times(-\infty)=+\infty \\ \frac{1}{+\infty}=0^+ & \frac{1}{0^+}=+\infty \\ \ell'+\ell^+=(\ell'+\ell)^+ & -(\ell^-)=(-\ell)^+ \qquad (\ell\in\mathbb{R},\ell'\in\mathbb{R}) \end{array}$$

- **Formes indeterminées.** Les formes indeterminées les plus fréquentes sont

$$-\infty+\infty, \qquad 0\times\infty, \qquad 1^\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \textit{etc.}$$

  En général, on utilise le bon sens pour déterminer si une opération est légale ou pas, les formes indeterminées apparaissant dès qu'il y a un conflit entre deux limites (l'une allant dans un sens contrecarré par l'autre)

principe des gendarmes

Propriété 9.21 $\left.\begin{array}{c} f\leqslant g \\ f\underset{a}{\to}+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow\ g\underset{a}{\to}+\infty$

9.2 Continuité en un point

Séquence 6

programme

- Définition de la continuité d'une fonction d'une variable en un point.
  On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I , x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I et ℓ un élément de $\mathbb{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon>0$, il existe un nombre $\alpha>0$ tel que pour tout élément x de $I\cap[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$, $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$; ainsi, lorsque x_0 appartient à I,f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.
- Opérations algébriques
- Prolongement par continuité en un point.

Dans toute cette section, $f : I \to \mathbb{R}$ désigne une application définie sur un intervalle I contenant a

9.2.1 Généralités

continuité à gauche à droite

Définition 9.22 f continue en $a \iff f \underset{a}{\to} f(a)$

– La continuité de f en a est une notion locale. Elle ne dépend que de ce qui se passe pour f lorsque x est très proche de a.

– f est continue à gauche en a *ssi* $f(a^-) = f(a)$

– f est continue à droite en a *ssi* $f(a) = f(a^+)$

– f est continue en a *ssi* $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$

Définition 9.23 f continue à gauche en $a \iff f \underset{a^-}{\to} f(a) \iff f(a^-) = f(a)$

Définition 9.24 f continue à droite en $a \iff f \underset{a^+}{\to} f(a) \iff f(a^+) = f(a)$

– La continuité de f à gauche (resp. à droite) en a n'a de sens que si f est définie sur un intervale du type $]b,a]$ (resp. $[a,b[$).

lien

Propriété 9.25 f continue en $a \iff f(a^-) = f(a) = f(a^+) \iff \begin{cases} f \text{ continue à gauche en } a \\ f \text{ continue à droite en } a \end{cases}$

prolongement par continuité

Théorème 9.26 Soient I un intervalle contenant a et une application $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}$. Alors, l'application $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{est continue en } a$$

– Cette application $\tilde{f}$ est égale à f en tout point de I sauf en a, où elle est continue et f n'est pas définie. C'est la raison pour laquelle on l'appelle « prolongement par continuité de f en a » et, très souvent on la note simplement f au lieu de $\tilde{f}$ *(léger abus de notation, consistant à remplacer f par $\tilde{f}$)*

9.2.2 Opérations

addition multiple produit

La somme, les multiples et le produit de fonctions continues est continue.

Propriété 9.27 Soient f et g des fonctions continues en a. Alors, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et λf sont continues en a pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

– En particulier, une combinaison linéaire de fonctions continues en a est continue en a.

quotient Le quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas en a, de deux fonctions continues en a est continue en a.

Propriété 9.28 Soient f et g des fonctions continues en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et continue en a.

composée Lorsque cela a un sens, la composée d'une fonction f continue en a et d'une fonction continue en $f(a)$ est continue en a.

Théorème 9.29 Soient deux applications $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $a \in I$. Alors,

$$\left.\begin{array}{c} f(I) \subset J \\ f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ continue en } a$$

9.3 Dérivée en un point

Séquence 12

programme

- Dérivées à gauche et à droite.
- Dérivée en un point.*Interprétation graphique.*
- Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit,dérivée d'une composée. Exemples.
- Dérivée d'un polynôme.
- Dérivation des fonctions réciproques.

9.3.1 Généralités

Dans cette section, f désigne une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle contenant au moins 2 points, dont a. Pour la dérivée à gauche (resp. à droite), I doit contenir un point à gauche (resp. à droite) de a.

nombre dérivée Le nombre dérivée de f en a est la limite de son taux d'accroissement en a.

Définition 9.30 $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Propriété 9.31 Le nombre dérivé en a est unique lorsqu'il existe.

Définition 9.32 f est dérivable en a *ssi* f admet un nombre dérivé en a

– Le nombre dérivée est la limite des taux d'accroissements en a et on utilise aussi le changement de variable $x = a + h$ pour écrire que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

La propriété suivante permet de transformer un renseignement de dérivabilité en approximation utile pour déterminer des limites non-triviales

Propriété 9.33 Si f est dérivable en a, il existe une fonction $\alpha \to a0$ telle que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\alpha(x) \qquad (x \in I)$$

– Une réciproque de cette propriété sera énoncée et établie dans la section sur les développements limités

dérivée à gauche à droite

Définition 9.34 $f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Définition 9.35 $f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Propriété 9.36 Lorsqu'elles existent, les dérivées à droite et à gauche en a sont uniques

Propriété 9.37 Soit I un intervalle contenant un point à gauche et à droite de a. Alors, $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a *ssi* f admet des dérivées à gauche et à droite égales en a. De plus, dans ce cas

$$f'_g(a) = f'(a) = f'_d(a)$$

condition nécessaire

Propriété 9.38 f dérivable en $a \Longrightarrow f$ continue en a

– La continuité en a est une condition nécéssaire pour que f soit dérivable en a.

9.3.2 Opérations

Dans cette section f, g et h désignent des fonctions dérivbles en a, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un intervalle I contenant au moins 2 points, dont a.

somme multiple produit

Propriété 9.39 $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Propriété 9.40 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ est dérivable en a et $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$

Propriété 9.41 $f \times g$ est dérivable en a et $(f\times g)'(a) = f'(a)\times g(a) + f(a)\times g'(a)$

– Les fonctions polynômes $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

quotient

Propriété 9.42 Soient f et g des fonctions dérivables en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}$$

– Une fonction g dérivable en a est continue en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, la fonction g ne s'annule pas autour de a, le quotient $1/g$ est définie autour de a, dérivable en a et satisfait

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

En particulier, on peut dériver le quotient $f/g = f \times \frac{1}{g}$ en écrivant

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \times \frac{1}{g(a)} + f(a) \times \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

– Les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont dérivables sur $\mathbb{R}$ privé des points annulant leur dénominateur.

composée

Théorème 9.43 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a, avec $f(I) \subset J$, et soit $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a)$$

bijection réciproque

Théorème 9.44 Soit f une bijection dérivable en a, avec $f'(a) \neq 0$. Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(b)\Big)}$$

étude des réciproques

Lorsque l'on connait bien les propriétés d'une bijection f, il est généralement possible d'en déduire des propriétés pour sa bijection réciproque, en s'inspirant du procédé suivant

Méthode 9.45 (pour retrouver la dérivée d'une bijection réciproque)
Illustration à l'aide des bijections réciproques tan *et Arctan*

1. Remarquer que $f^{-1} \circ f(x) = x \qquad (x \in I)$

$$\text{Arctan}\,\big(\tan(x)\big) = x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Dériver la relation précédente pour obtenir que $f'(x)\times\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big)=1 \qquad (x\in I)$

$$\tan'(x)\times \mathrm{Arctan}'\big(\tan(x)\big)=1 \qquad \Big(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Big)$$

3. Diviser par $f'(x)\neq 0$ et simplifier en utilisant que $y=f(x)$ avec $x=f^{-1}(y)$ pour obtenir que

$$\big(f^{-1}\big)'(y)=\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)}$$

Après division par $\tan'(x)=\tan(x)^2+1$, *il vient*

$$\mathrm{Arctan}'\big(\tan(x)\big)=\frac{1}{\tan'(x)}=\frac{1}{\tan(x)^2+1} \qquad \Big(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Big)$$

Comme $y=tan(x)$ *avec* $x=Arctan(y)$ *pour* $y\in\mathbb{R}$ *et* $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, *il suit*

$$Arctan'(y)=\frac{1}{y^2+1} \qquad (y\in\mathbb{R})$$

9.4 Comparaison des fonctions

Séquence 27

9.4.1 Fonctions négligeables

programme

- Fonction négligeable au voisinage de a. *Notation* $f=o_a(g)$
- Extension au cas $a=\pm\infty$
- Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini, des fonctions puissances et logarithmes en 0.*On présentera à nouveau les croissances comparées rappelées au premier semestre.*

Dans cette section, a désigne un nombre réel ou un symbole $a=+\infty$ ou $a=-\infty$ et f, g, h, F, G et ε désignent des fonctions définies autour de $a\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire sur un intervalle I admettant a comme élément ou comme extrémité. Pour simplifier, on note

$$\underbrace{f\prec_a g}_{\text{non standard}} \iff \Big|\ \begin{array}{c} f=o_a(g) \\ f \text{ est négligeable devant } g \text{ en } a\end{array}$$

fonction négligeable

Une fonction est négligeable en a devant une autre fonction lorsqu'elle est égale au produit de cette fonction par une fonctionde limite nulle en a.

Définition 9.46 $f = o_a(g) \iff f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$

– Lorsque g ne s'annule pas autour de a, cela revient à dire que f/g tends vers 0 en a.

transitivité

En a, si f est négligeable devant g qui est négligeable h, alors f est négligeable devant h.

Propriété 9.47 $f \underset{a}{\prec} g \underset{a}{\prec} h \implies f \underset{a}{\prec} h$

somme produit puissance multiple quotient

Les relations suivantes permettent de simplifier des relations faisant intervenir sommes, produit, puissances et quotients.

Propriété 9.48 $f \prec g \iff \lambda f \prec \mu g \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}^*)$

Propriété 9.49 $(f \underset{a}{\prec} h \text{ et } g \underset{a}{\prec} h) \implies f + g \underset{a}{\prec} h$

Propriété 9.50 $(f \underset{a}{\prec} F \text{ et } g \underset{a}{\prec} G) \implies fg \underset{a}{\prec} FG$

Propriété 9.51 $f \prec g \implies f^k \prec g^k \qquad (k \geqslant 1)$

Propriété 9.52 $f \underset{a}{\prec} g \implies \dfrac{1}{g} \underset{a}{\prec} \dfrac{1}{f} \qquad (f \text{ non nulle autour de } a)$

9.4.2 Fonctions équivalentes

programme

- Fonction équivalentes au voisinage de a. *Notation* $f = \underset{a}{\sim}(g)$
- $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g)$
- Extension au cas $a = \pm\infty$
- Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.

Dans cette section, a désigne un nombre réel ou un symbole $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et f, g, h, F, G et β désignent des fonctions définies autour de $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire sur un intervalle I admettant a comme élément ou comme extrémité.

fonctions équivalentes

Une fonction est équivalente en a à une autre fonction lorsqu'elle est égale au produit de cette fonction par une fonction de limite 1 en a.

Définition 9.53

$$\begin{array}{c} f \underset{a}{\sim} g \\ f \text{ est équivalente à } g \text{ en } a \end{array} \quad \Big| \quad \iff f(x) = g(x) \times \beta(x) \text{ avec } \beta \underset{a}{\to} 1$$

– Lorsque g ne s'annule pas, cela revient à dire que f/g tends vers 1 en a.

Propriété 9.54 $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g)$

Propriété 9.55 $f \underset{a}{\sim} f$

Propriété 9.56 $f \underset{a}{\sim} g \iff g \underset{a}{\sim} f$

transitivité En a, si f est équivalente à g qui est équivalente à h, alors f est équivalente à h.

Propriété 9.57 $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$

signe Deux fonctions réelles équivalentes en a ont même signe autour de a.

Propriété 9.58 $f \underset{a}{\sim} g \implies f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes signes autour de a : ils sont tous les deux nuls, strictement positifs ou strictement négatifs

produit puissance quotient Les relations suivantes permettent de simplifier des relations d'équivalence faisant intervenir produits, puissances et quotients.

Propriété 9.59 $(f \underset{a}{\sim} F$ et $g \underset{a}{\sim} G) \implies fg \underset{a}{\sim} FG$

Propriété 9.60 $f \underset{a}{\sim} g \implies f^k \underset{a}{\sim} g^k$

Propriété 9.61 $f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$ (f non nul autour de a)

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents en général, c'est illégal. Pour

$$f(x) := 1, \quad F(x) := 1, \quad g(x) := -1 \quad \text{et} \quad G(x) := -1 + x,$$

par exemple, on a $f(x) \underset{0}{\sim} F(x)$, on a $g(x) \underset{0}{\sim} G(x)$ et pourtant on a

$$f(x) + g(x) = 0 \underset{0}{\not\sim} x = F(x) + G(x).$$

limite

Propriété 9.62
$$\begin{array}{lcll} f \underset{a}{\to} \ell & \iff & f \underset{a}{\sim} \ell & (\ell \neq 0) \\ f \underset{a}{\to} 0 & \iff & f \underset{a}{\prec} 1 & \end{array}$$

comparaison fonctions de références

A l'infini et en zéro, un logarithme croit moins vite qu'un monôme. A l'infini, un monôme croît moins vite qu'une exponentielle (qu'une puissance).

Théorème 9.63 $\ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{\prec} x^\beta \underset{+\infty}{\prec} \mathrm{e}^{\gamma x} \qquad (\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)$

Théorème 9.64 $\ln(x)^\alpha \underset{0^+}{\prec} x^{-\beta}$

9.5 Développements limités

Séquence 23 et 33

programme

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

- Définition d'un développement limité. *On fera le lien entre un développement limité à l'ordre* 1 *et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation* $x_n\varepsilon(x)$ *avant l'utilisation éventuelle de la notation* $o(x^n)$.
- Somme et produit de développements limités.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^n *(Résultat admis)*
- Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus).

Dans cette section, n désigne un nombre entier positif ou nul, f désigne une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I, contenant au moins deux points, dont $a \in \mathbb{R}$ est un élément ou une extrémité.Nous abbrégeons « développement limité à l'ordre n en a » par DL_a^n (notation non standard) et nous notons le DL_a^n d'une fonction f de la façon suivante :

$$\underbrace{\mathrm{DL}_a^n[f]}_{\text{non standard}} = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

Par ailleurs, nous utilisons la notation $A \overset{*}{=} B$ pour exprimer que le terme A de gauche est égal à la troncature (obtenue en supprimant les termes négligeables) du terme B de droite

9.5.1 Généralités

Développement limité

Une fonction admet un développement limité à l'ordre n en a *ssi* elle se comporte essentiellement au voisinage de a comme un polynôme de degré inférieur à n

Définition 9.65 f admet un DL_a^n *ssi* il existe des nombres $c_0, \cdots, c_n$ de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o_a\big((x-a)^n\big)$

Propriété 9.66 Lorsqu'il existe, le $\mathrm{DL}_a^n[f]$ est unique ($c_0, \cdots, c_n$ sont uniques).

– Si f admet en a un développement limité à l'ordre n, alors f admet pour chaque entier $m \in [\![0,n]\!]$ un développement limité en a à l'ordre m et vérifie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k(x-a)^k + o_a\big((x-a)^m\big)$$

Autrement dit, le DL à l'ordre m de f est la troncature à l'ordre m du DL de f à l'ordre n (i.e. on ne garde que les termes de degré inférieur à m).

– Une fonction f a un DL_a^n *ssi* sa translatée $x \mapsto f(a+x)$ a un DL_0^n.

$$f \text{ a un } \mathrm{DL}_a^n \iff \exists (c_0, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : f(a+u) = \sum_{k=0}^{n} c_k u^k + o_a\big(u^n\big)$$

9.5.2 Opérations

existence La somme, le produit et les multiples de fonctions avec un DL_a^n admettent un DL_a^n.

Propriété 9.67 Si f et g ont un DL_a^n, alors $\mathrm{DL}_a^n[\lambda f] = \lambda\,\mathrm{DL}_a^n[f] \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

Propriété 9.68 Si f et g ont un DL_a^n, alors $\mathrm{DL}_a^n[f+g] = \mathrm{DL}_a^n[f] + \mathrm{DL}_a^n[g]$

Propriété 9.69 Si f et g ont un DL_a^n, alors $\mathrm{DL}_a^n[f \times g] \overset{*}{=} \mathrm{DL}_a^n[f] \times \mathrm{DL}_a^n[g]$

9.5.3 Développements limités de référence

quotient

Propriété 9.70 $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n) \qquad (n \in \mathbb{N})$

– Cette formule est la plus important de toutes car elle permet d'effectuer les quotient de développment limités.

– Sans somme, cettte formule devient

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

A connaître

Propriété 9.71 $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n) \qquad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.72 $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n) \qquad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.73 $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.74 $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.75 $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!} + o_0(x^n) \qquad (n \in \mathbb{N})$

9.5.4 Formule de Taylor-Young

Formule de Taylor-Young

Une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point a admet un DL_a^n.

Théorème 9.76 Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a\big((x-a)^n\big).$$

primitive

Les primitives F d'une fonction f admettant un DL_a^n admettent un DL_a^{n+1}.

Propriété 9.77 Soit F une primitive d'une fonction f admettant un DL_a^n, alors F admet un DL_a^{n+1}, que l'on trouvre en intégrant celui de f. autrement dit,

$$\mathrm{DL}_a^{n+1}[F]' = \mathrm{DL}_a^n[f]$$

– Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur I et admet le DL_a^n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a\big((x-a)^n\big),$$

alors, une primitive F de f admet le DL_a^{n+1}

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_a\big((x-a)^{n+1}\big).$$

Plus simplement, le DL d'une primitive est une primitive du DL

– on peut intégrer un DL_a pour trouver de DL d'une primitive (on y gagne un ordre de précision). Ne pas oublier la constante d'intégration

dérivée

Propriété 9.78 Si f admet un $\mathrm{DL}_a^{n+1}[f]$ et si f' existe et admet un $\mathrm{DL}_a^n[f']$, alors

$$\mathrm{DL}_a^{n+1}[f]' = \mathrm{DL}_a^n[f']$$

– Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' admet le DL_a^n suivant

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a\big((x-a)^n\big),$$

alors, la fonction f admet un DL_a^{n+1} donné par

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_a\Big((x-a)^{n+1}\Big).$$

Plus simplement, le DL d'une dérivée est, lorsqu'il existe, la dérivée du DL

– Si f' admet un DL_a, alors f admet aussi un DL_a que l'on peut dériver pour trouver celui de f' (on y perd un ordre de précision).

10 Fonctions réelles (comportement global) Séquence 11

10.1 Fonctions réciproques

programme Représentation graphique de la fonction réciproque

Propriété 10.1 Soient f une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J. Alors, le graphe de f est le symétrique du graphe de f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$

10.2 Fonctions minorées, majorées et bornées

programme Fonctions majorées, minorées, bornées.
Dans toute cette section, m et M désignent des nombres réels, f désigne une fonction réelle et D un ensemble non vide inclus dans son ensemble de définition

ction minorée
ction majorée

Définition 10.2 f est majorée sur D *ssi* il existe M tel que $f(x) \leqslant M$ $(x \in D)$

Définition 10.3 f est minorée sur $Dssi$ il existe m tel que $m \leqslant f(x)$ $(x \in D)$

Définition 10.4 f est bornée sur $Dssi$ il existe M tel que $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in D)$

Propriété 10.5 f est bornée sur D *ssi* f est minorée et majorée sur D

Propriété 10.6 Les fonctions constantes sont bornées sur $\mathbb{R}$

Propriété 10.7 L'ensemble des fonctions bornées sur D est stable par addition, multiplication externe et multiplication. En particulier, c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$

10.3 Fonctions monotones

programme

- Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.
- Théorème de limite monotone. *Toute fonction monotone sur* $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de* $]a,b[$. *Comportement en* a *et* b.

Dans cette section, I est un intervalle contenant au moins 2 points et f est une fonction à valeurs réelle définie sur I

croissance décroissance

Définition 10.8

$$f \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{croissante} \\ \text{strictement croissante} \end{array} \right. \text{ sur } I \iff \left| \begin{array}{l} f(y) \geqslant f(x) \\ f(y) > f(x) \end{array} \right. \qquad (x < y \text{ dans } I)$$

Définition 10.9

$$f \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{décroissante} \\ \text{strictement décroissante} \end{array} \right. \text{ sur } I \iff \left| \begin{array}{l} f(y) \leqslant f(x) \\ f(y) < f(x) \end{array} \right. \qquad (x < y \text{ dans } I)$$

monotonie

Définition 10.10 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, alors f est strictement monotone (resp. monotone) *ssi* f est strictement décroissante ou strictement croissante (resp. décroissante ou croissante).

Méthode 10.11 (Pour étudier la monotonie d'une fonction f)

1. Fixer $x < y$ dans I
2. Etudier le signe de $f(y) - f(x)$

ıoration//majoration

Propriété 10.12 Une fonction monotone sur un segment est bornée

Propriété 10.13 Une fonction croissante sur $[a,b[$ est minorée sur $[a,b[$

Propriété 10.14 Une fonction croissante sur $]a,b]$ est majorée sur $]a,b]$

Propriété 10.15 Une fonction décroissante sur $]a,b]$ est minorée sur $]a,b]$

Propriété 10.16 Une fonction décroissante sur $[a,b[$ est majorée sur $[a,b[$

ite monotone

Théorème 10.17 Une fonction monotone sur un intervalle ouvert I admet une limite finie à droite et à gauche en chaque point de I

Pour la suite de cette section $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et f désigne une foinction définie sur $[a,b[$.

Théorème 10.18 Soit f une fonction croissante sur $[a,b[$. Alors,

$$f \text{ majorée} \iff f \text{ admet une limite finie en } b$$
$$f \text{ non majorée} \iff f \text{ diverge vers } +\infty \text{ en } b$$

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{[a,b[} f(x)$.

Théorème 10.19 Soit f une fonction décroissante sur $[a,b[$. Alors,

$$f \text{ minorée} \iff f \text{ admet une limite finie en } b$$
$$f \text{ non minorée} \iff f \text{ diverge vers } -\infty \text{ en } b$$

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{[a,b[} f(x)$.

– On peut également écrire des variantes de ce théorème sur des intervalles ouverts à gauche $]b,a]$.

10.4 Fonctions paires et impaires

programme

Fonctions paires et impaires.

10.4.1 Généralités

Dans cette section, $f : I \to \mathbb{R}$ désigne une application définie sur un ensemble I symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire vérifiant

$$x \in I \iff -x \in I \tag{10.1}$$

Remarque : dans la proposition (10.1), on peut remplacer le symbôle $\iff$ par $\implies$

parité

Définition 10.20 f est paire sur $I \iff f(-x) = f(x) \quad (x \in I)$

imparité

Définition 10.21 f est impaire sur $I \iff f(-x) = -f(x) \quad (x \in I)$

déterminer la parité d'une fonction sur I

Méthode 10.22 (Pour déterminer la parité d'une fonction sur I)

1. Vérifier rapidement que I satisfait (10.1)
2. Fixer $x \in I$ et simplifier $f(-x)$ *(étape généralement simple, mais parfois technique).*
3. Si l'on obtient $f(x)$, la fonction f est paire.
   Si l'on obtient $-f(x)$, la fonction est impaire.
   Dans les autres cas, la fonction est en général ni paire, ni impaire mais pas toujours.

– Il n'est quasiment jamais demandé (cela ne sert pas) de prouver qu'une fonction n'est pas paire ou qu'elle n'est pas impaire.
Pour y arriver, il faut exhiber un contre-exemple

fonctions de référence

Propriété 10.23 Les fonctions constantes sont paires sur $\mathbb{R}$

Propriété 10.24 La fonction identité de $\mathbb{R}$ est impaire sur $\mathbb{R}$

ndition nécessaire d'imparité

Propriété 10.25 Si $0 \in I$ et si f est impaire sur I, alors $f(0) = 0$

10.4.2 Opérations

Dans cette section, nous détaillons rapidement quelques opérations qui permettent de déterminer plus rapidement (que par le calcul) si une fonction est paire ou impaire.Pour expliciter ces opérations, nous utilisons une notation pratique mais non standard

$$\begin{array}{rl}
\text{paire} + \text{paire} = \text{paire} & \text{impaire} + \text{impaire} = \text{impaire} \\
\text{paire} \times \text{paire} = \text{paire} & \text{paire} \times \text{impaire} = \text{impaire} \\
\text{impaire} \times \text{impaire} = \text{paire} & \frac{\text{paire}}{\text{paire}} = \text{paire} \\
\frac{\text{paire}}{\text{impaire}} = \text{impaire} & \frac{\text{impaire}}{\text{paire}} = \text{impaire} \\
\frac{\text{impaire}}{\text{impaire}} = \text{paire} & \text{fonction} \circ \text{paire} = \text{paire} \\
\text{impaire} \circ \text{impaire} = \text{paire} & \text{paire} \circ \text{impaire} = \text{paire}
\end{array}$$

Comme pour les limites, il existe quelques opérations, dont il n'est pas possible à priori de prévoir le resultat (formes indeterminées), sans faire un calcul détaillé, comme « paire + impaire = ? »

dérivation

Propriété 10.26 Soit f une fonction dérivable sur I. Alors,

$$\begin{array}{rcl}
f \text{ paire sur } I & \Longrightarrow & f' \text{ impaire sur } I \\
f \text{ impaire sur } I & \Longrightarrow & f' \text{ paire sur } I
\end{array}$$

réciproque

Propriété 10.27 Soit $f : I \to J$ une bijection impaire. Alors, J satisfait (10.1) et la bijection réciproque f^{-1} est impaire sur J

– Une fonction paire ne peut pas être bijective

10.5 Fonctions périodiques

programme Fonctions périodiques

10.5.1 Généralités

Dans cette section, T désigne un nombre réel non nul et $f : I \to \mathbb{R}$ désigne une application définie sur un ensemble I invariant par la translation suivante

$$x \in I \iff x + T \in I \tag{10.2}$$

Remarque : dans la proposition (10.2), on ne peut pas remplacer le symbôle $\iff$ par le symbôle $\implies$

périodicité

Définition 10.28 $\left.\begin{array}{c} f \text{ est } T\text{-pérodique sur } I \\ f \text{ admet la période } T \text{ sur } I \end{array}\right| \iff f(x+T) = f(x) \quad (x \in I)$

– Une fonction périodique ne peut pas être bijective

nti-périodicité

Définition 10.29 $\left.\begin{array}{c} f \text{ est } T \text{ anti-pérodique sur } I \\ f \text{ admet l'anti-période } T \text{ sur } I \end{array}\right| \iff f(x+T) = -f(x) \quad (x \in I)$

déterminer la riodicité d'une fonction sur I

Méthode 10.30 (Pour déterminer la périodicité d'une fonction sur I)

1. Intuiter le plus petit nombre réel (en valeur absolue) pour lequel I satisfait (10.1) et qui semble convenir pour f
2. Fixer $x \in I$ et simplifier $f(x+T)$ *(étape généralement simple, mais parfois technique).*
3. Si l'on obtient $f(x)$, la fonction f est périodique, de période T.
   Si l'on obtient $-f(x)$, la fonction est antipériodique, d'anti-période T.
   Dans les autres cas, la fonction est en général ni périodique, ni antipériodique mais pas toujours.

– Il n'est quasiment jamais demandé (cela ne sert pas) de prouver qu'une fonction n'est pas périodique ou qu'elle n'est pas antipériodique.
Pour y arriver, il faut exhiber un contre-exemple

périodes

Propriété 10.31 T période $\implies k \times T$ période $\qquad (k \in \mathbb{Z}^*)$

Propriété 10.32 T anti-période $\implies \begin{cases} k \times T & \text{période} & (k \in \mathbb{Z}^* \text{ pair}) \\ k \times T & \text{anti-période} & (k \in \mathbb{Z}^* \text{ impair}) \end{cases}$

– Il est souvent utile de trouver la plus petite période (ou anti-période) d'une fonction. En général, on la cherche parmi les diviseurs d'un nombre convenable $T \neq 0$ précédemment trouvé

fonctions de référence

Propriété 10.33 Pour $T \neq 0$, les fonctions constantes sont T-périodiques sur $\mathbb{R}$

10.5.2 Opérations

Dans cette section, nous détaillons rapidement quelques opérations qui permettent de déterminer plus rapidement (que par le calcul) si une fonction est périodique (pour

le même $T \neq 0$) ou antipériodique.Pour expliciter ces opérations, nous utilisons une notation pratique mais non standard

$$\begin{array}{rl} \text{périodique} + \text{périodique} = \text{périodique} & \text{antipériodique} + \text{antipériodique} = \text{antipériodique} \\ \text{périodique} \times \text{périodique} = \text{périodique} & \text{périodique} \times \text{antipériodique} = \text{antipériodique} \\ \text{antipériodique} \times \text{antipériodique} = \text{périodique} & \frac{\text{périodique}}{\text{périodique}} = \text{périodique} \\ \frac{\text{périodique}}{\text{antipériodique}} = \text{antipériodique} & \frac{\text{antipériodique}}{\text{périodique}} = \text{antipériodique} \\ \frac{\text{antipériodique}}{\text{antipériodique}} = \text{périodique} & \text{fonction} \circ \text{périodique} = \text{périodique} \end{array}$$

Comme pour les limites, il existe quelques opérations, dont il n'est pas possible à priori de prévoir le resultat (formes indeterminées), sans faire un calcul détaillé, comme

$$\text{périodique} + \text{antipériodique} = ? \qquad \text{fonction} \circ \text{antipériodique} = ?$$

dérivation

Propriété 10.34 Soit f une fonction dérivable sur I. Alors,

$$\begin{array}{rcl} f\ T\text{-périodique sur } I & \Longrightarrow & f'\ T \text{ périodique sur } I \\ f\ T\text{-antipériodique sur } I & \Longrightarrow & f'\ T\text{-antipériodique sur } I \end{array}$$

10.6 Fonctions continues

programme

- Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
  L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment). *Notations* $max_{[a,b]}\ f$ *et* $min_{[a,b]} f$.
- Théorème de la bijection. *Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation.On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$.En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie.*
- Représentation graphique de la fonction réciproque.

10.6.1 Généralités

Dans cette section, D désigne un ensemble et $f : A \to \mathbb{R}$ une application définie sur un domaine A réel

continuité sur un ensemble

Définition 10.35 f continue sur $D \iff (f$ est continue en a pour $a \in D)$ $\quad (D \subset D_f)$

– Lorsqu'on dit qu'une fonction est continue, sans préciser sur quelle ensemble, cela sous-entend qu'elle l'est sur son ensemble de définition. En cas d'ambiguité, il faut l préciser.

Propriété 10.36 Les fonctions constantes sont continues.

Propriété 10.37 La fonction identité est continue.

Propriété 10.38 Les fonctions polynômes sont continues.

espace

Définition 10.39 $\mathcal{C}(D,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(D,\mathbb{R}) = \{f : D \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$

Propriété 10.40 $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-SEV de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$

opérations algébriques

Propriété 10.41 La somme, les multiples et le produit de fonctions continues sur un ensemble D est continue sur D.

– En particulier, on calcule avec les fonctions continues comme avec les nombres réels

quotient

Le quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de deux fonctions continues est continue.

Propriété 10.42 Soient f et g des fonctions continues sur D telles que $g(a) \neq 0$ $(a \in D)$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie et continue sur D.

composée

Lorsque cela a un sens, la composée de deux fonctions continues est conctinue

Théorème 10.43 Soient deux applications $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\left.\begin{array}{c} f(I) \subset J \\ f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } J \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ continue sur } I$$

réciproque

La bijection réciproque d'une bijection f continue est continue.

Propriété 10.44 Soit $f : I \to J$ une bijection continue sur I. Alors, la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J.

10.6.2 Théorèmes fondamentaux

théorème fondamental

Théorème 10.45 L'image d'un intervalle par une fonction continue réelle est un intervalle

Théorème 10.46 L'image d'un segment par une fonction continue réelle est un segment

– Ce théorème est à la fois un théorème de compacité (concernant les majorations, minima et maxima globaux de la fonction) et un théorème de connexité (affirmant que l'image de l'ensemble de départ (qui est en un morceau) est en un morceau)

Corollaire 10.47 Une fonction continue sur un segment est bornée

Corollaire 10.48 Une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée

théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 10.49 Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$

– Autrement dit, pour chaque $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$. Toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes entre a et b par la fonction f.

– Ce théorème est un corrolaire du théorème précédent

Le corrolaire suivant est communément utilisé pour remplir plus rapidement la ligne du signe de f' dans les tableaux de variation

Corollaire 10.50 Une fonction réelle continue sur $[a,b]$ qui s'annule uniquement en a et en b est soit strictement positive sur $]a,b[$, soit strictement négative sur $]a,b[$

théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 10.51
$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur }]a,b[\\ f \underset{a^+}{\to} \ell \\ f \underset{b^-}{\to} \ell' \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad]\ell,\ell'[\subset f\big(]a,b[\big)$$

– Autrement dit, pour chaque $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$. Toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes entre a et b par la fonction f.

– Ce théorème est un corrolaire du théorème précédent

théorème de la bijection

Théorème 10.52 Soit f une application réelle, continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors, f est une bijection strictement monotone de I sur $J = f(I)$, qui est un intervalle. La bijection réciproque f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation que f

caractérisation

Lorsqu'une fonction réelle possède sur un intervalle I deux des caractéristiques suivantes : bijective, monotonie stricte, continuité, elle possède également la troisième.

Théorème 10.53 Soit f une application réelle définie sur un intervalle I. Alors,

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ monotone stricte sur } I \end{cases} \iff \begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ bijective sur } I \end{cases} \iff \begin{cases} f \text{ bijective sur } I \\ f \text{ monotone stricte sur } I \end{cases}$$

– En particulier, la bijection réciproque d'une bijection strictement monotone sur un intervalle est également strictement monotone, de même sens de variation.

10.6.3 Continuité par morceaux

Séquence 17

programme

Fonction continue par morceaux. *Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que les restritions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i,a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i,a_{i+1}]$. On exclut toute étude approfondie des fonctions continues par morceaux.*

subdivisions

Définition 10.54 Une subdivision d'un segment $[a,b]$ est une suite strictement croissante finie $\sigma = \{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, on a

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n}_{\text{subdivision } \sigma} = b.$$

fonctions continues par morceaux

Définition 10.55 Etant donné un segment $[a,b]$, on dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0,\cdots,x_n\}$ du segment $[a,b]$ telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la restriction à l'intervalle $]x_{i-1},x_i[$ de f soit prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_{i-1},x_i]$.

Propriété 10.56 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ *ssi* il existe une subdivision $\sigma = \{x_0,\cdots,x_n\}$ du segment $[a,b]$ telle que

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur }]x_{i-1},x_i[\\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_{i-1} \\ f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_i \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

– autrement dit, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction f doit être continue sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1},x_i[$ et admet une limite à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i.

– une telle subdivision σ est alors dite adaptée (ou subordonnée) à f.

– on se moque totalement des valeurs de f aux points $x_0,x_1,\cdots,x_n$.

Méthode 10.57 (pour prouver qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux)

1. Déterminer une subdivision $\sigma = \{x_0, \cdots, x_n\}$ adaptée à f *(les morceaux)*
2. Fixer $i \in [\![1,n]\!]$ et se restreindre à l'étude de f sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1},x_i[$ *(en général, on dispose d'une formule pour f sur cet intervalle)*
   a. Prouver que f est continue sur $]x_{i-1},x_i[$
   b. Prouver que f admet une limite finie à droite en x_{i-1} *(il n'est pas nécéssaire de la calculer)*
   c. Prouver que f admet une limite finie à gauche en x_i *(il n'est pas nécéssaire de la calculer)*

Propriété 10.58 Une fonction continue sur un segment est continue par morceaux sur ce segment

Propriété 10.59 L'ensemble des fonctions continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est stable par addition, par multiplication externe et par produit. En particulier, c'est un SEV de $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

– la composée $g \circ f$ d'une fonction g continue avec une fonction f continue par morceaux est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

10.7 Fonctions dérivées

Séquence 12

programme

- Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. *Notation f'.*
- Dérivée d'un polynôme.
- Dérivation des fonctions réciproques.
- Théorème de Rolle.
- Égalité et inégalités des accroissements finis.
  – *Si $m < f' < M$ sur un intervalle I, alors :*$\forall (a,b) \in I^2, a < b, m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$.
  – *Si $|f'| < k$ sur un intervalle I , alors :*$\forall (a,b) \in I^2, |f(b) - f(a)| < k|b-a|$.
  Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(un)$. *Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.*
- Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.*Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geq 0$ sur I , f' ne s'annulant qu'en unnombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.*
- Définition et dérivation de la fonction Arctan. *L'étude de cette fonction se limitera strictement à ces deux points.*

10.7.1 Généralités

Dans cette section, D désigne un ensemble non vide inclus dans l'ensemble de définition d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$

érivabilité sur un ensemble

Définition 10.60 f dérivable sur D *ssi* f dérivable en chaque point $x \in D$

– La dérivabilité en un point a est une notion locale alors que la dérivabilité sur un intervalle est une notion globale. Cette définition est le lien entre les deux notions.

nction dérivée

Définition 10.61 La fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$

Propriété 10.62 $\mathcal{D}f' = \{x : f \text{ dérivable en } x\} = \{x : f'(x) \text{ existe}\}$

– La restriction au départ de f' à l'ensemble de dérivabilité de f est une application

– La fonction dérivée f' de l'application f est plus rarement notée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou encore Df

– Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables en aucun point.

Propriété 10.63 $\mathcal{D}f' \subset \mathcal{D}f$

classe $\mathcal{C}^1$

Définition 10.64 $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable sur } I : f' \in \mathcal{C}^0(I)\}$

Propriété 10.65 $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable sur } I : f \text{ et } f' \text{ continues sur } I\}$

– f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I *ssi* f est continue sur I.

– f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I *ssi* f est dérivable de dérivée continue sur I.

Propriété 10.66 $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-SEV de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

10.7.2 Opérations

Dans cette section, f et g désignent des fonctions dérivables sur le même intervalle $I \neq \emptyset$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, les opérations décrites sont également valables si l'on remplace « dérivable » par « de classe $\mathcal{C}^1$ » dans toute la section

somme multiple linéarité

Propriété 10.67 $f + g$ est dérivable sur I

Propriété 10.68 $\lambda \cdot f$ est dérivable sur I

Propriété 10.69 $f \times g$ est dérivable sur I

– Les constantes et l'application identité $x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

– Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont des polynômes. A fortiori, on peut les dériver indéfiniment.

quotient

Propriété 10.70 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur I telles que $g(x) \neq 0 \quad (x \in I)$. alors, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I

composée

Théorème 10.71 Soient deux applications $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J telles que $f(I) \subset J$. Alors, la composée $g \circ f$ est dérivable sur I

– Cette propriété est également valable si l'on remplace la condition « de classe $\mathcal{C}^n$ » par « n fois dérivable ».

bijection réciproque

Théorème 10.72 Soit f une bijection de I dans J, dérivable sur I telle que $f'(x) \neq 0 \quad (x \in I)$. Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur J.

10.7.3 Monotonie

Dans cette section,$f : I \to \mathbb{R}$ désigne une fonction dérivable sur I, intervalle contenant au moins deux points.

fonctions constantes

Théorème 10.73 f constante sur $I \iff f'(x) = 0 \quad (x \in I)$

monotonie

Propriété 10.74
$$\begin{array}{rcl} f \text{ croissante sur } I & \iff & f'(x) \geqslant 0 \quad (x \in I) \\ f \text{ décroissante sur } I & \iff & f'(x) \leqslant 0 \quad (x \in I) \end{array}$$

– Cette propriété est vraie également lorsque f est continue mais pas dérivable aux extrémités de I

cte monotonie

Propriété 10.75
$$\begin{array}{rcl} f'(x) > 0 \quad (x \in I) & \Longrightarrow & f \text{ croissante stricte sur } I \\ f'(x) < 0 \quad (x \in I) & \Longrightarrow & f \text{ décroissante stricte sur } I \end{array}$$

– Cette propriété est vraie également lorsque f est continue mais pas dérivable aux extrémités de I

Théorème 10.76 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I, contenant au moins deux points, dont la dérivée s'annule au plus en un nombre fini de points. Alors,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) \geqslant 0 \quad (x \in I) & \Longrightarrow & f \text{ croissante stricte sur } I \\ f'(x) \leqslant 0 \quad (x \in I) & \Longrightarrow & f \text{ décroissante stricte sur } I \end{array}$$

– Il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée s'annule, comme $x \mapsto x^3$.

10.7.4 Théorèmes fondamentaux

Dans cette section, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

théorème de Rolle

Théorème 10.77 $f(a) = f(b) \Longrightarrow (\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0)$

égalité des accroissements finis

Théorème 10.78 $\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

galités des accroissements finis

Théorème 10.79

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M \quad (a < x < b) \quad \Longrightarrow \quad m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Théorème 10.80

$$\left|f'(x)\right| \leqslant M \quad (a < x < b) \quad \Longrightarrow \quad \left|f(b) - f(a)\right| \leqslant M|b-a|$$

– si la dérivée f' d'une application $f : I \to \mathbb{C}$ est majorée par M sur I, alors, l'application f est M-lipschitzienne sur I.

longement $\mathcal{C}^1$

Théorème 10.81 Soit I un intervalle contenant au moins 2 points, dont a, et f une fonction continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ telle que f' admet une limite finie en a. Alors, l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

10.7.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ Séquence 27

programme

- Fonction p fois dérivable en un point.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.
- Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.
- La dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

Dans cette section, $n \geqslant 2$ désigne un nombre entier et f désigne une fonction définie sur un intervalle I contenant au moins 2 points

fonction dérivable n fois

Définition 10.82 f dérivable n fois sur $I \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{dérivable } n-1 \text{ fois sur } I \end{cases}$

Définition 10.83 La dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une application f dérivable n fois sur I est l'application $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ définie par $f^{(n)}(x) := (f')^{(n-1)}(x) \quad (x \in I)$

Convention 10.84 La derivée d'ordre 0 de f est l'application $f^{(0)} = f$

– Etant donnés une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, par convention, on note

$$\forall x \in I, \qquad f^{(0)}(x) := f(x).$$

La fonction $f^{(0)} = f$ est parfois appelée dérivée d'ordre 0 de la fonction f.

– Etant donnée une application $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I, on a

$$\forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) := \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{n \text{ dérivations successives}} f(x)$$

– la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f se note $f^{(n)}$ ou plus rarement $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f$ ou $D^n f$.

onction indéfi-nent dérivable

Définition 10.85 f indéfiniment dérivable sur *ssi* f est dérivable n fois pour $n \in \mathbb{N}$

Propriété 10.86 Les fonctions constantes et identité $x \mapsto x$ sont de class $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Pour la suite de cette section, $n \geqslant 1$ et f désigne une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant au moins 2 points

dérivations successives

Propriété 10.87 $f^{(n)} = \left(f^{(p)}\right)^{(n-p)}(x) \qquad (0 \leqslant p \leqslant n)$

espace $\mathcal{C}^k$

Définition 10.88 $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable} : f' \in \mathcal{C}^{n-1}(I,\mathbb{R})\} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

Propriété 10.89 $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ forme un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$

– Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $(\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}), +, .)$ est constitué des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, c'est à dire des applications $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables n fois sur I dont les dérivées f, f', f'', $\cdots$, $f^{(n)}$ sont continues sur I.

Propriété 10.90 $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \iff f$ dérivable n fois sur I et $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \text{ continue sur } I \end{cases}$

Propriété 10.91 $\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \qquad (n \in \mathbb{N})$

– La suite des ensembles $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, construite par récurence à partir de $n = 1$, est décroissante au sens de l'inclusion.

– On note souvent $\mathcal{C}^n(I)$ plutôt que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

espace $\mathcal{C}^\infty$

Définition 10.92 $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ indéfiniment dérivable}\}$

Propriété 10.93 $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})\}$

– f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I *ssi* elle est indéfiniment dérivable sur I

Propriété 10.94 $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ forme un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

10.7.6 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ Séquence 27

Dans cette section, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g sont des fonctions dérivables n fois sur le même intervalle $I \neq \emptyset$. Par ailleurs, les propriétés décrites sont également valables si l'on remplace « dérivable n fois » par « de classe $\mathcal{C}^n$ » et « indéfiniment dérivables » par « de classe $\mathcal{C}^\infty$ » dans toute la section

somme multiple linéarité

Propriété 10.95 Les sommes, les multiples et les produits de fonctions dérivables n fois sur I sont dérivables n fois sur I

Corollaire 10.96 Les fonctions polynômes sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Propriété 10.97 $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \qquad (x \in I)$

Propriété 10.98 $(\lambda \cdot f)^{(n)}(x) = \lambda \cdot f^{(n)}(x) \qquad (x \in I)$

– Dériver n fois est une opération linéaire. En particulier, pour $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}^n(I)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

formule de Leibniz

Théorème 10.99 $(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x) \qquad (x \in I)$

– Cette propriété est également valable lorsque l'on remplace la condition « de classe $\mathcal{C}^n$ » par « n fois dérivable »

quotient

Propriété 10.100 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des applications dérivables n fois sur I telles que $g(x) \neq 0 \quad (x \in I)$. Alors, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable n fois sur I

– Cette propriété est également valable si l'on remplace la condition « de classe $\mathcal{C}^n$ » par « n fois dérivable ».

– Les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ privé des points annulant leur dénominateur.

composée

Théorème 10.101 Soient deux applications $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable n fois sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable n fois sur J telles que $f(I) \subset J$. Alors, la composée $g \circ f$ est dérivable n fois sur I

– Cette propriété est également valable si l'on remplace la condition « dérivable n fois » par « de classe $\mathcal{C}^n$ ».

bijection réciproque

Théorème 10.102 Soit $f : I \to J$ une bijection n fois dérivable sur I telle que $f'(x) \neq 0 \quad (x \in I)$. Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable n fois sur J.

10.8 Étude globale des fonctions d'une variable

Dans cette section, nous cherchons à étudier une fonction f qui n'est connue que par la donnée d'une formule pour $f(x)$

gorithme classique d'étude

Méthode 10.103 (Algorithme classique d'étude)

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$ de f
2. Etudier la périodicité de f pour réduire l'étude à un ensemble de longueur T bien choisi *(optionnel mais réduit le travail)* .
3. Etudier la parité de f pour réduire l'étude à la partie positive d'un ensemble symétrique par rapport à 0 *(optionnel mais réduit le travail)*
4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}f'$ de f
5. Déterminer le signe de la dérivée sur l'ensemble d'étude. *c'est la partie technique de l'algorithme, dans les cas les plus difficiles, il n'est pas rare de devoir dresser le tableau de variation d'une autre fonction bien choisie pour y arriver*
6. Dresser un tableau de variation de f (reporter $+$, $-$ et 0 dans la ligne du signe de f' et les flèches de monotonie et valeurs pour f)
7. Compléter le tableau de variation avec les limites (aux extrémités des flèches)
8. Déterminer les tangentes (dans la ligne des éléments géométriques) *(optionnel mais nécéssaire pour obtenir un graphe ressemblant)*

9. Etudier les branches infinies (branches paraboliques, asymptotes, position par rapport aux asymptotes) *(optionnel, augmente légérement la précision du graphe)*
10. tracer l'allure du graphe de f

10.9 Recherche d'extrema

Séquence 34, 35, et 36

10.10 Fonctions convexes

Séquence 34, 35, et 36

convexité

Définition 10.104 Soient $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle.

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall x,y \in I, f(ax+by) \geqslant af(x)+bf(y)$$

– De manière identique, la concavité est définie par :

$$f \text{ concave sur } I \iff \forall x,y \in I, f(ax+by) \leqslant af(x)+bf(y)$$

– une fonction est convexe (resp. concave) si tout sous-arc de son graphe est sous (resp. au dessus de) sa corde.

inégalité de convexité

Propriété 10.105 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

$$\forall n \geqslant 2, \forall x_1, \cdots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k f(x_k).$$

caractérisation

Propriété 10.106 Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

$$f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I$$

Propriété 10.107 Soit $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$.

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0.$$

– f est convexe sur I *ssi* $-f$ est concave sur I.

– On a la même propriété avec « concave » à la place de « convexe » et « décroissante » à la place de « croissante »

– Si elle est convexe (resp. concave), une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ est située au dessus (resp. au dessous) de ses tangentes.

– Etant donnée une courbe convexe (resp. concave), les cordes dont l'une extrémité est fixée sur la courbe et dont l'autre extrémité décrit la courbe (dans le sens positif) sont de pente croissante (resp. décroissante).

11 Intégration

11.1 Primitives — Séquence 17

programme

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.*Résultat admis.*

Dans cette section, F et f désignent des fonctions définies sur un intervalle I

primitives

Définition 11.1 F est une primitive de f sur l'intervalle I *ssi* F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x) \quad (x \in I)$

Notation 11.2 Une primitive F de f sur un intervalle I se note $F(x) = \int f(t)\mathrm{d}t \qquad (x \in I)$

Propriété 11.3 Si F et G sont deux primitives à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'une fonction f sur un intervalle I, alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + c \quad (x \in I)$

– Ne jamais oublier la constante d'intégration lorsque l'on intégre !

Propriété 11.4 Une primitive sur I d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I

existence de primitives

Théorème 11.5 Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

primitives de référence

Propriété 11.6 $\displaystyle\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1, x > 0)$

Propriété 11.7 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \qquad (x > 0 \text{ ou } x < 0)$

Propriété 11.8 $\displaystyle\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R})$

Propriété 11.9 $\displaystyle\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R})$

Propriété 11.10 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$

Propriété 11.11 $\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c \qquad (x > 0)$

Propriété 11.12 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R})$

11.2 Intégrales sur un segment

Séquence 17 et 18

11.2.1 Intégrale des fonctions continues

programme

Intégrale d'une fonction continue sur un segment
Si f est continue sur un intervalle I , pour tout $(a,b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par $\int f_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I . Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.
Dans cette section, f désigne une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur un segment $[a,b]$

Définition 11.13 L'intégrale de a à b d'une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F désigne n'importe laquelle des primitives de f sur le segment $[a,b]$

– La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive F choisie pour la calculer

Théorème 11.14 Soit f une fonction continue sur un intervalle I, contenant a. Alors, l'unique primitive de f sur I, s'annulant en a, est l'application F définie par

$$\begin{array}{rl} F : I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Par ailleurs, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

Propriété 11.15 Pour toute primitive F sur un intervalle I d'une fonction f continue sur I, on a

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = [F]_a^x = F(x) - F(a) \qquad (x \in I).$$

En particulier, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = [f]_a^x = f(x) - f(a).$$

11.2.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

programme Intégrale d'une fonction continue sur un segment
Si f est continue sur un intervalle I , pour tout $(a,b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par $\int f_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I . Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

intégrale

Définition 11.16 L'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur$[a,b]$ est

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t,$$

où $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ désigne une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

– Cette intégrale ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie. Par ailleurs, chaque petite intégrale est définie en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue (le prolongement par continuité à $[x_{k-1},x_k]$ de la restriction de f à $]x_{k-1},x_k[$

Méthode 11.17 (en présence d'une intégrale) Vérifier qu'elle est bien définie, c'est-à-dire qu'on intégre une fonction continue (par morceaux) sur $[a,b]$, avant de la manipuler

– L'aire (algèbrique) de la zone délimitée, pour $a \leqslant x \leqslant b$, par l'axe des abscisses et le graphe d'une fonction f continue par morceaux est, par définition, l'intégrale de f de a à b.

– Modifier les valeurs d'une fonction en un nombre fini de points ne modifie pas son intégrale.

11.2.3 Propriétés

programme

- Relation de Chasles.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
- Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance. *Si f est continue sur $[a,b]$ et $a < b$,*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| < \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

- Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.

- Intégration par parties.
- Changement de variable. *Les changements de variable non affines devront être indiqués aux candidats.*

Dans cette section, f et g désignent des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux sur un segment $[a,b]$?

Propriété 11.18 Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur un segment contenant a, b et c. Alors, $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Propriété 11.19 $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

Propriété 11.20 $a \leqslant b$ et $\underbrace{f(x) \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b)}_{f \geqslant 0} \implies \int_a^b f \geqslant 0$

Propriété 11.21 $a \leqslant b$ et $\underbrace{f(x) \geqslant g(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)}_{f \geqslant g} \implies \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$

Propriété 11.22 L'application $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Caractérisation

Théorème 11.23 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue et à valeurs positives ou nulles. Alors,

$$\underbrace{f(x) = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b)}_{f=0} \iff \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Dans cette section, I désigne un intervalle et les nombres réels a et b vérifient $a < b$.

Intégration par parties

Théorème 11.24 Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

changement de variables

Théorème 11.25 Soient f une fonction continue (par morceaux) sur $[c,d]$ et $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 11.26 Soient f une fonction continue (par morceaux) sur $[c,d]$ et $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

– C'est le théorème précédent avec appliqué pour $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$, $a = \varphi^{-1}(c)$ et $b = \varphi^{-1}(d)$

11.2.4 Sommes de Riemann

programme Sommes de Riemann à pas constant. *La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Interprétation de l'intégrale en termes d'aire.*

Théorème 11.27 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

– Methode des trapezes pour calculer des intégrales. Plutôt que de calculer l'aire en utilisant des rectangles à l'aide de la formule $(x_{i+1} - x_i)f(y_i)$, on calcule l'aire en utilisant des trapèzes à l'aide de la formule

$$(x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

donnant l'aire du trapeze passant par $A(x_i,0)$, $B(x_i,f(x_i))$, $C(x_{i+1},0)$ et $D(x_{i+1},f(x_{i+1}))$. Ainsi, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

11.3 Intégrales sur un intervalle quelconque Séquence 28

11.3.1 Intégrale généralisée simple

dans cette section, f et g désignent des fonctions continues par morceaux sur chaque segment inclus dans un intervalle I fermé en $a \in \mathbb{R}$ et ouvert en b, qui peut être un nombre réel ou l'un des symbôles $-\infty$ ou $+\infty$.

Définition 11.28 L'intégrale suivante converge et est égale à

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

si, et seulement si, la limite existe et est finie. Dans le cas contraire, l'intégrale diverge.

Propriété 11.29 Si f admet une limite finie en $b \in \mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge. *Notant $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en b, on a*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \underbrace{\tilde{f}(t)}_{\text{continue sur le segment } [a,b]}\mathrm{d}t$$

11.3.2 Intégrales des fonctions positives

Dans cette section, f et g désignent des fonctions continues et positives sur l'intervalle $[a,b[$ ou $a \in \mathbb{R}$ et ou b est un nombre réel ou le symbôle $+\infty$.

Propriété 11.30 $\int_a^b f$ converge $\iff$ $\underbrace{\exists \mathrm{M} \geq 0, \int_a^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt} \leq \mathrm{M} \qquad (\mathrm{a} \leq \mathrm{x} < \mathrm{b})}_{\text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a,b[}$

Théorème 11.31 Supposons que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $a \leq x < b$.

- Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et $0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Théorème 11.32 Supposons que $f = o_b(g)$. Alors,

- Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge et $\int_a^x f = o_b\big(\int_a^x g\big)$ (hors programme)
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et $\int_x^b f = o_b\big(\int_x^b g\big)$ (hors programme)

Théorème 11.33 Supposons que $f \underset{b}{\sim} g$. Alors, $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ ont même nature.

- En cas de divergence, $\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$ (hors programme)
- En cas de convergence, $\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g$ (hors programme)

11.3.3 Intégrales généralisées réelles

Dans cette section, f désigne une fonction continue sur $]a_1,a_2[\cup\cdots\cup]a_{n-1},a_n[$ ou $\bigcup_{k=1}^n]a_k,a_{k+1}[$, où $a = a_1 < \cdots < a_n = b$ désignent des nombres réels ou les symbôles $-\infty$ et $+\infty$

Définition 11.34 L'intégrale suivante converge et vaut

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \left(\int_{a_k}^{c_k} f + \int_{c_k}^{a_{k+1}} f \right)$$

ssi pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $c_k \in]a_k, a_{k+1}[$ quelconque, les intégrales $\int_{a_k}^{c_k} f$ et $\int_{c_k}^{a_{k+1}} f$ convergent.

Propriété 11.35 $\int_c^b f$ converge $\iff$ $\int_a^b f$ converge $\qquad (c \in I)$
Lorsque les intégrales convergent, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Propriété 11.36 $\int_a^b \lambda f$ converge $\iff$ $\int_a^b f$ converge $\qquad (\lambda \neq 0)$
De plus, en cas de convergence $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

Propriété 11.37

- Si $\int_a^b f$ converge et si $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b (f+g)$ diverge.
- Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (f+g)\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Corollaire 11.38 Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}).$$

Convergence absolue

Définition 11.39 $\int_a^b f$ converge absolument *ssi* $\int_a^b |f|$ converge

Propriété 11.40 Si $a \leqslant b$ et si $\int_a^b f$ converge absolument, alors

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

11.3.4 théorème fondamentaux

En ECS, il est clairement indiqué que les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) doivent être pratiquées sur des intégrales sur un segment. A fortioti, pour appliquer ces techniques à une intégrale généralisée, il faudra d'abord « poser un x » et écrire que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

puis appliquet les théorèmes, vus au premier semestre à l'intégrale $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
Comme la formulation du programme officiel n'interdit pas le calcul de primitive

sur un intervalle ou l'usage de la notation $[f]_{-\infty}^{+\infty}$*, il pourra nous arriver d'utiliser les propriétés suivantes :*

Notation 11.41 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a,b[$, où a et b sont des nombres réels où les symbôles $-\infty$ ou $+\infty$. Lorsque les limites suivantes sont toutes les deux définies, on note

$$\Big[f(t)\Big]_a^b = \lim_{t\to b} f(t) - \lim_{t\to a} f(t)$$

Propriété 11.42 Soit F une primitive sur un intervalle $[a,b[$ d'une fonction f continue. Alors,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b\,,$$

l'intégrale étant convergente *ssi* le crochet admet une limite finie

11.3.5 Intégrales de référence

Comme les intégrales ci dessous peuvent se calculer facilement via une primitive, on peut éviter d'invoquer les propriétés suivantes (mais elles sont utiles comme référence pour les études de nature)

Propriété 11.43 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge $\iff \alpha > 0$

Propriété 11.44 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

Propriété 11.45 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$

Algèbre

Dans tout cette partie, le symbole $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12 Polynômes Séquence 20

12.1 Forme additive

12.1.1 Généralités

Définition 12.1 Un polynôme (formel) à coefficients dans $\mathbb{K}$ (de l'indeterminée X) est une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres de $\mathbb{K}$, nulle à partir d'un certain rang n, que l'on note

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

espace L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Notation 12.2

$$\mathbb{K}[X] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : n \geqslant 0 \text{ et } a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

fonction polynôme Une fonction polynôme peut être associée à chaque polynôme en substituant une variable à l'indeterminée.

Définition 12.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction polynôme *ssi* il existe $N \in \mathbb{R}$ et $a_0, \cdots, a_N$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

– Le nombre $P(x)$ est la valeur (numérique) du polynôme P en x.
Calculer cette valeur revient à substituer x à la place de X dans l'expression de P

Propriété 12.4 La fonction polynôme associée à un polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ est la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \end{array}$$

égalité

Propriété 12.5 Soient P et Q deux polynômes. Alors, $P = Q \iff \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = Q(x)$

– Deux polynômes sont égaux *ssi* leurs fonctions polynômes associées sont les mêmes.

– Autrement dit, deux polynômes ayant en tout point de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ même valeur numérique ont mêmes cœfficients.

Les détails techniques subtils de la définition des polynômes formels ne sont pas à connaître. En particulier, on pourra librement les identifier aux fonctions polynomiales. Cependant, pour la suite de ce chapitre, les propriétés seront exprimés dans le formalisme des polynômes (parce que c'est plus naturel), dont le maniement est familier : on les manipule comme les expressions comportant des variables

12.1.2 Opérations algébriques

Dans cette section,P et Q désignent deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$$

addition multiple

La somme et les multiples (plus généralement les combinaisons linéaires) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 12.6 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(a_k + b_k)}_{c_k} X^k$

Définition 12.7 $\displaystyle\lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\lambda a_k)}_{c_k} X^k \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$

Propriété 12.8 $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

produit

Le produit de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 12.9 $\displaystyle\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m\right) \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m+n=k} a_m \times b_n\right)}_{c_k} X^k$

algèbre

Propriété 12.10 On calcule avec les polynômes comme avec les nombres réels

– Autrement dit, on calcule avec les polynômes comme on calcule avec les nombres réels en ce qui concerne sommes, multiples et produits. Les propriétés classiques (distributivité, associativité, commutativité, …) sont valables pour les polynômes.

Identité algébrique

Propriété 12.11 $P^n - Q^n = (P-Q)\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k} \qquad (n \in \mathbb{N})$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $P^0 = Q^0 = I_n$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

Binôme de Newton

Propriété 12.12 $(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N})$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $P^0 = Q^0 = 1$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

12.1.3 Dérivation

dérivée

La dérivée d'un polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 12.13 $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right)' := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$

somme multiple produit

Propriété 12.14 $(P+Q)' = P' + Q'$

Propriété 12.15 $(\lambda \cdot P)' = \lambda \cdot P'$

Propriété 12.16 $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$

– La dérivée d'une combinaison linéaire de polynômes est lacombinaison linéaire de leurs dérivées

$$(\lambda.P + \mu.Q)' = \lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'$$

Formule de Leibniz

Théorème 12.17 $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} \qquad (n \in \mathbb{N})$

12.1.4 Substitution

composée

La composée de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 12.18 $Q(P) = Q \circ P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P^k \qquad (P \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \text{ dans } \mathbb{K}[X])$

Propriété 12.19 $Q(X) = Q \qquad (Q \in \mathbb{K}[X])$

formules de Taylor

Théorème 12.20 $P(X+a) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(a)\frac{X^k}{k!} \qquad (P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K})$

Théorème 12.21 $P(X+a) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(X)\frac{a^k}{k!} \qquad (P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K})$

– La somme est finie car les dérivées de P sont toutes nulles à partir d'un certain rang.

– Pour les polynômes (uniquement), la variante (beaucoup moins utile) suivante est également satisfaite

$$P(X+a) = \sum_{k\geqslant 0} P^{(k)}(X)\frac{a^k}{k!}$$

12.1.5 Degré

degré

Définition 12.22 $\deg\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k}_{P}\right) = \max\{k : a_k \neq 0\} \qquad (P \neq 0)$

Convention 12.23 $\deg(0) = -\infty$

Propriété 12.24 $\deg(c) = 0 \qquad (c \in \mathbb{K}^*)$

– Le degré d'un polynôme non nul est un nombre entier positif.

Propriété 12.25 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k \qquad (P \neq 0)$

– Pour un polynôme non nul, le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé coefficient du monôme dominant de P

polynôme unitaire

Définition 12.26 $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ unitaire} \iff \begin{cases} P \neq 0 \\ a_{\deg(P)} = 1 \end{cases}$

somme multiple produit dérivation

Propriété 12.27
$$\begin{aligned} \deg(P+Q) &= \max\{\deg(P), \deg(Q)\} && \text{si } \deg(P) \neq \deg(Q) \\ &\leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\} && \text{sinon} \end{aligned}$$

Propriété 12.28 $\deg(\lambda P) = \deg(P) \qquad (P \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}^*)$

Propriété 12.29 $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q) \qquad (P \neq 0, Q \neq 0)$

Propriété 12.30
$$\begin{aligned} \deg(P') &= \deg(P) - 1 && \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ &= -\infty && \text{sinon} \end{aligned}$$

space $\mathbb{K}_n[X]$ L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 12.31 $\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leqslant n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 12.32 $P \in \mathbb{K}_n[X] \iff \exists (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} : P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 12.33 $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$

12.2 Forme multiplicative

12.2.1 Diviseurs

diviseur Un polynôme P est un diviseur de Q *ssi* Q est un multiple de P.

Définition 12.34 Q divise $P \iff Q|P \iff \exists R \in \mathbb{K}[X], P = Q \times R$

Définition 12.35 P multiple de $Q \iff Q|P \iff Q$ diviseur de P

- Lorsque P est un diviseur de Q, on dit également que P divise Q et l'on note $P|Q$.
- Le polynôme 0 est un multiple de tout polynôme (tous les polynômes divisent 0).

Propriété 12.36 $0|P \iff P = 0$

Propriété 12.37 $Q|P \implies 0 \leqslant \deg(Q) \leqslant \deg(P) \qquad (P \neq 0)$

division euclidienne

Propriété 12.38 Soient deux polynômes P et $D \neq 0$. Alors, il existe deux polynômes Q et R, uniques, tels que $P = QD + R$ et $\deg(R) < \deg(D)$

Définition 12.39 $P \neq 0$ est reductible dans $\mathbb{K}$ *ssi* P admet un diviseur $D \in \mathbb{K}[X]$ de degré vérifiant $0 < \deg(D) < \deg(Q)$
Dans le cas contraire, P est dit irreductible dans $\mathbb{K}$

12.2.2 Racines et multiplicités

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et P désigne un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

équation polynomiale

L'équation algèbrique (polynômiale) associée à un polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ est l'équation $\tilde{P}(x) = 0$, c'est à dire

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant N} a_k x^k = 0$$

d'inconnue x variant dans $\mathbb{K}$.

zéro racine

Un zéro (ou une racine) d'un polynôme P est une solution de l'équation polynômiale $P(x) = 0$.

Définition 12.40 $\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ racine de } P \\ \alpha \text{ zéro de } P \end{array}\right| \iff P(\alpha) = 0$

Propriété 12.41 $P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) | P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha)Q$

multiplicité

Définition 12.42 α est une racine de P de multiplicité n *ssi*

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(n)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Propriété 12.43 La multiplicité n de z en tant que racine d'un polynôme P est un entier de $\mathbb{N}$.

Si z est racine de P, $n \geqslant 1$ et sinon $n = 0$

Propriété 12.44 α racine de multiplicité n de $P \iff P = (X - \alpha)^n R$ et $R(\alpha) \neq 0$
$\iff (X - \alpha)^n | P$ et $(X - \alpha)^{n+1} \not| P$

– La multiplicité de α en temps que racine de P est le plus grand entier $n \geqslant 1$ pour lequel il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^n R.$$

C'est aussi le plus grand entier $n \geqslant 1$ pour lequel on a

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0, \\ P'(\alpha) = 0, \\ \vdots \\ P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Propriété 12.45 Les nombres deux à deux distincts $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont des racines de P de multiplicité respective $n_1, \cdots, n_k$ *ssi* $(X-\alpha_1)^{n_1} \cdots (X-\alpha_k)^{n_k}$ divise P.

cines et degré

Théorème 12.46 Un polynôme $P \neq 0$ admet au plus $\deg(P)$ racines distinctes

Corollaire 12.47 Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$

théorème de Gauss

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 12.48 $\deg(P) \geqslant 1 \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : P(\alpha) = 0$

Corollaire 12.49 P irreductible dans $\mathbb{C} \Longleftrightarrow P \in \mathbb{C}_1[X]^*$

12.2.3 Décomposition en produit

Dans cette section, $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^n$ désigne un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont les racines complexes $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ admettent respectivement les multiplicité $n_1, \ldots, n_p$.

décomposition

Théorème 12.50 $\exists (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n, P = c_n \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - z_k)$

- Les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont uniques (à une permutation près). Ce sont les racines de P

Théorème 12.51 $P = c_n \prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (X-\alpha_k)^{n_k}$
Cette décomposition est unique à permutation des racines près

- Cette identité constitue la décomposition de P en produit de polynômes irreductibles.
- Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, pas forcéme nt distinctes.

Propriété 12.52 $n1 + \cdots + n_p = n$

Corollaire 12.53 Un polynôme non nul admet autant de racines complexes, comptées avec multiplicité, que son degré

elations coefficients-racines

Propriété 12.54 Les racines de $X^2 - sX + p$ sont z et z' *ssi*
$$\begin{cases} s = z + z' \\ p = zz' \end{cases}$$

– On obtient ces relations en développant l'identité

$$X^2 - sX + p = (X - s)(X - z)$$

et en identifiant les coefficients des monômes X^0 et X^1.

Décomposition des polynômes réels

Pour la suite de cette section P désigne un polynôme à coefficients réels

olynômes réels

Propriété 12.55 α racine de $P \iff \overline{\alpha}$ racine de P

Corollaire 12.56 Les racines complexes de P sont conjuguées. *(en particulier, on peux rassembler les racines de P qui ne sont pas réeelles par paires)*

Corollaire 12.57 P irreductible dans $\mathbb{R} \iff (P \in \mathbb{R}_1[X]^*$ ou P trinôme de discriminant $\Delta < 0)$

Propriété 12.58 Deux racines complexes conjuguées de P ont la même multiplicité.

– On obtient un polynôme réel en couplant les racines conjuguées, en effet

$$(X - \alpha)^n (X - \overline{\alpha})^n = \left[(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})\right]^n = \left[X^2 - 2\Re e(\alpha)X + |\alpha^2|\right]^n$$

Si $\alpha \notin \mathbb{R}$, on remarque de plus que $\Delta = 4\Re e(\alpha)^2 - 4|\alpha|^2 < 0$.

Propriété 12.59 Un polynôme réel $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ de degré $n \geqslant 1$ se décompose de manière unique sous la forme

$$P = c_n \prod_{\ell=1}^{p} (X - \beta_\ell)^{n_\ell} \times \prod_{\ell=1}^{q} (X^2 + a_\ell X + b_\ell)^{m_\ell}$$

où les $\beta_1, \ldots, \beta_p$ sont des racines réelles de P et où le discriminant du trinôme réel $X^2 + a_\ell X + b_\ell$ est strictement négatif (il ne possède dont que des racines complexes irréelles conjuguées) et où

$$n = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant p} n_\ell + 2 \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant q} m_\ell$$

racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité

Propriété 12.60 $X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \mathrm{e}^{2\pi i k/n}\right) \qquad (n \geqslant 1)$

13 Systèmes linéaires Séquence 9

programme

Tout développement théorique est hors programme.

- Définition d'un système linéaire.
- Système homogène. Système de Cramer.
- Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  La méthode sera présentée à l'aide d'exemples.On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ *avec* $i \neq j$, $L_i \leftarrow aL_i$ *avec* $a \neq 0$,$L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ $(a \neq 0,\ i \neq j)$.
- Écriture matricielle d'un système linéaire.
- Calcul de l'inverse de la matrice A par la réso-lution du système $AX = Y$.
- Inversibilité des matrices triangulaires, diagonales.

– Les outils de ce chapitre font parti des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
– Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
– Trouver une formule pour u_n
– Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.
Utilisation en ds/concours : fréquente.

13.1 Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, m et n désignent des entiers, a_i, b_i et $a_{i,j}$ désignent des constantes de $\mathbb{K}$ et x_i désignent des variables qui prennent des valeurs dans $\mathbb{K}$

uation linéaire econd membre

Une équation linéaire de n variables $x_1, \cdots, x_n$ avec second membre est une équation du type

Définition 13.1 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

L'équation est dite « homogène » ou « sans second membre » lorsque $b = 0$. Dans le cas contraire, elle est dite « avec second membre ».

système

Un système linéaire est un système constitué d'équations linéaires.

Définition 13.2 (S) $\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = & \cdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$

Le système est dit « homogène » ou « sans second membre » lorsque toutes ses équations sont sans second membre. Il est dit « avec second membre » dans le cas contraire.

– Le système homogène associé à (S) est le système

$$(H) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \cdots & +a_{1,n}x_n & = 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & \cdots & +a_{2,n}x_n & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = \cdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & \cdots & +a_{m,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

système de Cramer

Définition 13.3 Un système linéaire est de Cramer *ssi* il a une unique solution

système carré rectangulaire

Un système linéaire est dit « carré » lorsqu'il possède autant d'équations que d'inconnues ($m = n$) et « rectangulaire » dans le cas contraire ($m \neq n$).

système triangulaire

Un système linéaire carré est dit « triangulaire supérieur » lorsque ses coefficients en dessous de la diagonale principale (les $a_{i,j}$ pour $i > j$) sont nuls.

– On dit aussi qu'un système rectangulaire est triangulaire supérieur lorsque les coefficients du carré supérieur gauche en dessous de la diagonale principale sont tous nuls.

– La notion de système triangulaire inférieur existe aussi, mais traditionnellement, on travaille plutôt avec des systèmes triangulaires supérieurs

– Un système triangulaire supérieur se résoud relativement facilement, par réinjection dans les lignes supérieures.

tème diagonal

Un système linéaire carré est dit « diagonal » lorsque ses coefficients en dehors de la diagonale principale (les $a_{i,j}$ pour $i \neq j$) sont nuls.

– Un système diagonal est trivial à résoudre.

– On dit aussi qu'un système rectangulaire est diagonal lorsque les coefficients du carré supérieur gauche en dehors de la diagonale principale sont tous nuls.

systèmes équivalents

Deux systèmes sont dits équivalents *ssi* ils ont les même solutions.

Définition 13.4 Deux systèmes sont équivalents *ssi* ils ont les même solutions.

▷ Simplification de systèmes

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

13.2 Opérations élémentaires

Echange de lignes

En intervertissant deux lignes (opération élémentaire $Li \longleftrightarrow L_j$), on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.

Propriété 13.5

$$\begin{cases} \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \end{cases}$$

– Souvent, il n'est pas nécessaire d'intervertir les lignes

▷ Système « diagonale » ou « triangulaire » :

$$\begin{cases} & 2y & = 6 \\ 3x & & = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x & & = 9 \\ & 2y & = 6 \end{cases}$$

ltiple de ligne

En multipliant une ligne par un nombre non nul (opération élémentaire $Li \longleftarrow \lambda L_i$), on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.

Propriété 13.6

$$\begin{cases} \cdots \\ L_i \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \cdots \\ \lambda L_i \\ \cdots \end{cases} \qquad (\lambda \neq 0)$$

▷ Simplification de ligne :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Combinaison éaire de lignes

En ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (opération élémentaire $Li \longleftarrow Li + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$), on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.

Propriété 13.7

$$\begin{cases} \cdots \\ L_i \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \cdots \\ L_i + \displaystyle\sum_{j \neq i} \lambda_j L_j \\ \cdots \end{cases} \qquad (\lambda_j \in \mathbb{K})$$

▷ Pivot : $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{cases} \boxed{\text{x}} - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Pivot (sans division)

Pour éviter un pivot de Gauss sans effectuer de division, il est utile d'avoir recours à l'opération suivante

Corollaire 13.8

$$\begin{cases} \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \cdots \\ aL_i + bL_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \end{cases} \qquad (a \neq 0, b \in \mathbb{K})$$

▷ Pivot : $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{cases} \boxed{\text{x}} - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

suite d'opérations

En effectuant plusieurs opérations élémentaires, on transforme un système linéaire en système équivalent à condition de les éffectuer successivement (en série).
– On évitera d'effectuer plusieurs opérations élémentaires simultanément (en parallèle) car cela ne transforme pas forcément un système linéaire en système équivalent.

$$\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x-6y=9 \end{cases} \not\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x-2y=15 \\ 5x-2y=15 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1+L2 \\ L_2 \longleftarrow L_2+L1 \end{matrix}$$

– Lorsque le résultat de plusieurs opérations élémentaires ne dépend pas de l'ordre dans lequel elles sont effectuées (prendre le temps de le vérifier), on pourra les effectuer en parallèle.

$$\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x-6y=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x-2y=3 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1/2 \\ L_2 \longleftarrow L_2/3 \end{matrix}$$

substitution

En isolant dans une ligne une variable que l'on substitue dans les autres lignes, on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.
– Cette opération n'est pas élémentaire mais revient à effectuer plusieurs opérations élémentaires
– La substitution est déconseillée parce qu'elle conduit plus facilement à des erreurs qui, par effet boule de neige, sont le plus souvent catastrophiques et difficilement corrigeables

13.3 Résolution

résolution

Pour résoudre un système linéaire, on lui applique successivement des transformations pour le simplifier et obtenir un système équivalent triangulaire ou diagonal.

réduction par substitution

Pour résoudre le système, on procède par substitutions en diminuant progressivement le nombre de variables.
– Ceux qui utilisent cette technique de résolution sont con-damnés à commettre des erreurs.

méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à résoudre le système, en procèdant par pivots pour éliminer des variables et rendre le système soit diagonal *recommandé*, soit triangulaire.
– Il est recommandé d'utiliser cette technique de résolution : les calculs sont simples, rapides, compréhensibles et moins sujets aux erreur, qui sont elles mêmes, faciles à trouver et à corriger.

Méthode 13.9 (Méthode de Gauss)

1. choisir un pivot non nul *(de préférence un petit nombre entier)*
2. Effectuer l'opération $L_i \longleftarrow aL_i - bL_{\text{pivot}}$ pour éliminer les variables sur la colonne du pivot
   a. Factoriser et simplifier les lignes au besoin
   b. Enlever les lignes $0=0$ (*dédupliquer les lignes identiques*)
   c. En cas de ligne $0 \neq 0$ (*ou de relations incompatibles*), le système n'a pas de solution.
3. Recommencer en choisissant un pivot sur une autre ligne et une autre colonne
4. Lorsque le système est diagonal, faire passer les variables supplémentaires à droite de l'égalité

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + 3z = 7 \\ x + 3y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2y + 4z = 6 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + z = 4 \\ y + 2z = 3 \\ -3z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 4 \\ y + 2z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

**utions des sys-
es homogènes**

Théorème 13.10 Un système linéaire homogène a | soit la solution nulle
soit une infinité de solutions

**structure
des solutions**

La solution générale d'un système linéaire S est la somme d'une de ses solutions particulières et de la solution générale du système linéaire homogène (H) associé.

Théorème 13.11 Soit x_0 une solution particulière de S, de système homogène associé H. Alors,

$$x \text{ solution de } S \iff x - x_0 \text{ solution de } H$$

– Lorsqu'un système linéaire admet une infinité de solutions, il est possible d'exprimer une partie des variables en fonctions des autres, qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles.

$$x + y = 1 \iff x = 1 - y \qquad (y \in \mathbb{R}) \iff y = 1 - x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**utions des sys-
èmes linéaires**

Corollaire 13.12 Un système linéaire a | soit aucune solution
soit une unique solution
soit une infinité de solutions

14 Matrices Séquence 13

programme

- Matrices rectangulaire
  - Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  - Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  - Produit matriciel.
  - Transposée d'une matrice et transposition d'un produit, *Notation* ${}^tA$.
  - Addition, multiplication par un scalaire. *On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B.*

- Cas des matrices carrées
  - Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  - Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.
  - Matrices inversibles, inverse d'une matrice. *On admettra que pour une matrice carrée, uninverse à gauche ou à droite est l'inverse.*
  - Ensemble $\mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$.
  - Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.
  - Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

– Les outils de ce chapitre font parti des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
– Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
– Trouver une formule pour u_n
– Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.
Utilisation en ds/concours : fréquente.

14.1 Matrices

matrice

Définition 14.1 Une matrice à p lignes et q colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$ est un tableau de pq nombres de $\mathbb{K}$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}\right\} p \text{ lignes}}_{q \text{ colonnes}}$$

– Les matrices à p lignes et *une* colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes à n lignes/composants.

– Les matrices à n lignes et n colonnes sont appelées matrices carrées de taille n.

– Les matrices à une ligne et q colonnes sont appelées matrices lignes

– Une matrice est dite carrée si elle a autant de colonnes que de lignes

– La taille d'une matrice carrée est son nombre de colonnes et de lignes

espace des matrices

L'ensemble des matrices, à p lignes et q colonnes, d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Définition 14.2 $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) := \{A : \text{ matrice à } p \text{ lignes et } q \text{ colonnes d'éléments de } \mathbb{K}\}$

– Par convention, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

matrice nulle

La matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice, notée 0, dont tous les coefficients sont nuls.

Notation 14.3 $0 = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{\text{non standard}}$

– Une manière alternative (et plus officielle) de représenter la matrice nulle est

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

matrice unité identité

La matrice unité (ou identité) de taille n est la matrice carré de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs.

Notation 14.4 $I_n := \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{n \text{ colonnes}} n \text{ lignes} \qquad (n \geqslant 1)$

– Une manière alternative (et plus officielle) de représenter la matrice identité est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.2 Opérations

Dans cette section n, p et q désignent des entiers strictement positifs et A et B désignent des matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

14.2.1 Sommes

somme

La somme de deux matrices est la matrice de la somme de leurs coefficients.

Définition 14.5 $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} + \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} := \left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$

– La matrice $A+B$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,q}+b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{i,j}+b_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1}+b_{p,1} & \dots & a_{p,q}+b_{p,q} \end{pmatrix}$$

14.2.2 Multiples

multiple

Le produit d'un nombre et d'une matrice est la matrice obtenue en multipliant chacun de ses coefficients par le nombre.

Définition 14.6 $\lambda \cdot \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} := \left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$

– La matrice $\lambda \cdot A$ est la matrice

$$\lambda.A := \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \lambda a_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{p,1} & \dots & \lambda a_{p,q} \end{pmatrix}$$

14.2.3 Produits

produit

Définition 14.7 Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Alors, $A \times B := \left(\underbrace{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{i,k} b_{k,j}}_{c_{i,j}} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$

– Pour que le produit de A par B soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

– Le produit $A \times B$ a autant de lignes que A et de colonnes que B.

– pour effectuer rapidement un produit de matrices, la construction mentale suivante est recommandée :

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \vdots & & \vdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \vdots & \text{Colonne } j \longrightarrow & \vdots & b_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & \vdots & & \vdots & b_{n,q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \longrightarrow \text{Ligne } i \longrightarrow & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{1,1} & \vdots & \vdots & c_{1,k} \\ \dots & & & \dots \\ & & c_{i,j} & \\ \dots & & & \dots \\ c_{m,1} & \vdots & \vdots & c_{m,k} \end{pmatrix}$$

– Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite de cette section, les lettres A, B et C désignent des matrices dont les dimensions rendent possibles les opérations considérées.

associativité

Théorème 14.8 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) =: A \times B \times C$

bilinéarité

Propriété 14.9 $\begin{array}{ll} (\lambda A + \mu B)C & = \lambda AC + \mu BC \\ C(\lambda A + \mu B) & = \lambda CA + \mu CB \end{array} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

scalaire mobile

Propriété 14.10 $(\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \times B) \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$

lément neutre à gauche à droite aux deux

Propriété 14.11 Pour $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $I_p \times A = A$ et $A \times I_q = A$

– La matrice I_n est un élément neutre (à droite et à gauche) pour $\times$ dans l'ensemble des matrices carrées de taille n

$$I_n \times A = A \times I_n = A \qquad (A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$$

14.2.4 Transposition

Dans cette section, les lettres p et q désignent des entiers strictement positifs et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ désigne une matrice.

transposition

Définition 14.12 ${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}}$

– La transposée de la matrice

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}\right\} p \text{ lignes}}_{q \text{ colonnes}}$$

est la matrice obtenue par symétrie de la matrice A par rapport à sa diagonale principale

$${}^{\mathrm{t}}A := (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{p,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{p,2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,q} & a_{2,q} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}\right\} q \text{ lignes}}_{p \text{ colonnes}}$$

– Les lignes $L_1, \cdots, L_p$ de A deviennent les colonnes $C'_1, \cdots, C'_p$ de ${}^{\mathrm{t}}A$.

– Les colonnes $C_1, \cdots, C_q$ de A deviennent les lignes $L'_1, \cdots, L'_q$ de ${}^{\mathrm{t}}A$.

– La transposée d'une matrice $n \times p$ est une matrice $q \times p$. En particulier, la transposée d'une matrice carrée de taille n est une matrice carrée de taille n.

Dans la suite de cette section, les lettres A et B désignent des matrices dont les dimensions rendent possibles les opérations considérées.

involution
linéarité
produit

Propriété 14.13 ${}^{\mathrm{t}}\left({}^{\mathrm{t}}A\right) = A$

Propriété 14.14 ${}^{\mathrm{t}}(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^{\mathrm{t}}A + \mu\, {}^{\mathrm{t}}B \qquad (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

Propriété 14.15 ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\, {}^{\mathrm{t}}A$

14.2.5 Inverse

Dans cette section, A et B désignent des matrices carrées de taille n.

inverse

Définition 14.16 B inverse de $A \iff A \times B = B \times A = I_n$

Propriété 14.17 Lorsqu'il existe, l'inverse d'une matrice A est unique et est noté A^{-1}

- Une matrice A est inversible *ssi* elle admet un inverse
- Si A et B vérifient cette relation, alors A et B sont nécéssairement carrées, de taille n
- Une matrice carrée A est inversible *ssi* $AX \neq 0$ pour chaque vecteur colonne $X \neq 0$.

inversibilité

Définition 14.18 A est inversible *ssi* il existe une matrice B inverse de A

Dans la suite de cette section, A et B désignent des matrices inversibles de même taille.

produit transposée

Propriété 14.19 $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Propriété 14.20 ${}^{\mathrm{t}}\left(A^{-1}\right) = \left({}^{\mathrm{t}}A\right)^{-1}$

- Atttention à ne pas se tromper dans l'ordre du produit

14.2.6 Rang

rang

A chaque matrice A, on peut associer un nombre entier unique $\mathrm{rg}(A)$, appelé rang de A

Définition 14.21 $\mathrm{rg}(A) = r \iff \exists P,Q$ inversibles telles que $A = P \times \begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix} \times Q$

- Le rang r d'une matrice $n \times p$ vérifie

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant n \\ 0 \leqslant r \leqslant p \end{cases}$$

En particulier, on a $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$.

transposée

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Propriété 14.22 Soit A matrice, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left({}^{\mathrm{t}}A\right)$

– A fortioti, le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

multiplication

On ne change pas le rang en multipliant une matrice par une matrice inversible.

Propriété 14.23 $\mathrm{rg}(A) = \left| \begin{array}{l} \mathrm{rg}(A \times B) \\ \mathrm{rg}(B \times A) \end{array} \right.$ (B inversible)

– Les opérations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice. En effet, les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) reviennent à multiplier la matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible.

matrice nulle
inverse

Propriété 14.24 $A = 0 \iff \mathrm{rg}(A) = 0$

Propriété 14.25 A inversible $\iff$ A carrée et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{taille}(A)$

Méthode 14.26 (Pour calculer le rang d'une matrice A)

1. choisir un pivot non nul *(de préférence un petit nombre entier)*
2. Utiliser le pivot pour eliminer les autres nombres sur la même colonne (resp. la ligne)
3. Utiliser le même pivot pour éliminer les autres nombres sur la même ligne (resp. la colonne)
4. Recommencer jusqu'à ce que tous les nombres non nuls de la matrice soient seuls sur leur ligne et leur colonne
5. (optionnel) Faire des échanges de lignes, de colonnes, multiplier des lignes ou des colonnes par une constante non nulle pour obtenir des 1 sur la diagonnale principale
6. Le rang est la quantité de nombres non nuls isolés sur leur ligne et leur colonne

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} && \left\{ \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right. \\
= \ & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} && \left\{ \begin{array}{l} C_2 \longleftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \longleftarrow C_4 - 4C_1 \end{array} \right. \\
= \ & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} && \left\{ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \right. \\
= \ & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \left\{ \begin{array}{l} C_3 \longleftarrow C_3 - 2C_2 \\ C_4 \longleftarrow C_4 - 3C_2 \end{array} \right. \\
= \ & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= \ & 2
\end{aligned}
$$

14.3 Matrices carrées

Dans cette section, les lettres A,B et C désignent des matrices carrées de même taille.

14.3.1 † Trace

trace

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients sur la diagonale principale.

Définition 14.27

$$\operatorname{Tr}(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,i}$$

– La trace d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un nombre de $\mathbb{K}$.

linéarité produit

Propriété 14.28 $\operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr} A + \mu \operatorname{Tr} B \qquad (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

Propriété 14.29 $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$

14.3.2 Matrices diagonales

matrice diagonale

Une matrice carrée est dite diagonale si ses coefficients en dehors de sa diagonale principale sont tous nuls

Définition 14.30 A **diagonale** $\iff A = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \iff a_{i,j} = 0 \qquad (i \neq j)$

matrice diagonale

Les multiples, les sommes et les produits de matrices diagonales sont des matrices diagonales.

Propriété 14.31 Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, A,B diagonales.

$$\left.\begin{matrix} \lambda A + \mu B \\ AB \end{matrix}\right\} \text{ sont diagonales}$$

inverse diagonal

Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Propriété 14.32

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \text{ inversible } \iff \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \vdots \\ \gamma \neq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

– L'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale. En particulier, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

14.3.3 Matrices triangulaires supérieures

matrice triangulaire

Une matrice carrée est dite triangulaire supérieure si ses coefficients en dessous de sa diagonale principale sont tous nuls

Définition 14.33

$$A \textbf{ triangulaire supérieure} \iff a_{i,j} = 0 \qquad (i > j)$$
$$\iff A = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \ddots & \end{pmatrix}$$

– Une matrice carrée est dite triangulaire inférieure si ses coefficients en dessous de sa diagonale principale sont tous nuls

$$(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ triangulaire inférieure } \iff (i<j \implies a_{i,j}=0)$$

lien Une matrice est triangulaire supérieure *ssi* sa transposée est triangulaire inférieure.

Propriété 14.34 A triangulaire supérieure $\iff {}^{\mathrm{t}}A$ triangulaire inférieure

matrice triangulaire Les multiples, sommes et produits de matrices traingulaires supérieures sont des matrices traingulaires supérieures.

Propriété 14.35 Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, A,B triang. sup..

$$\left.\begin{array}{c} \lambda A+\mu B \\ AB \end{array}\right\} \text{ sont triang. sup.}$$

– Si A est triangulaire supérieure et inversible alors A^{-1} est triangulaire supérieure.

inverse triangulaire Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Propriété 14.36 $\begin{pmatrix} \alpha & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \gamma \end{pmatrix}$ inversible $\iff \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \vdots \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$

– L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure

– L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire inférieure

14.3.4 Matrices symétriques

matrice symétrique Une matrice carrée est symétrique *ssi* elle est égale à sa transposée.

Définition 14.37 A symétrique $\iff {}^{\mathrm{t}}A = A$

– Une matrice est symétrique *ssi* elle est symétrique par rapport à sa diagonale principale. Autrement dit, *ssi* ses coefficients de part et d'autre de la diagonale principale sont égaux

14.3.5 Matrices anti-symétriques

matrice anti-symétrique Une matrice carrée est symétrique *ssi* elle est égale à l'opposée de sa transposée.

Définition 14.38 A anti-symétrique $\iff {}^{t}A = -A$

– Une matrice est anti-symétrique *ssi* ses coefficients sur la diagonale principale sont nuls et ses coefficients de part et d'autre de la diagonale principale sont opposés.

14.3.6 Matrices qui commuttent

commuter

Définition 14.39 A et B commuttent $\iff AB = BA$

– Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice λI_n commute avec toutes les matrices carrées de taille n.

Identité algébrique

L'identité algèbrique suivante est satisfait par des matrices qui commuttent

Propriété 14.40 Soient $n \in \mathbb{N}$ et A et B des matrices carrées qui commuttent. Alors, $A^n - B^n = (A-B) \sum_{k+\ell=n-1} A^k B^\ell$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $A^0 = B^0 = I_n$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

Binôme de Newton

Le binôme de Newton est satisfait par des matrices qui commuttent

Propriété 14.41 Soient A,B matrices carrées avec $AB = BA$, $n \in \mathbb{N}$.

$$(A+B)^n = \sum_{k+\ell=n} \binom{n}{k} A^k B^\ell$$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $A^0 = B^0 = I_n$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

14.4 Matrices et systèmes linéaires

Dans cette section, $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$ désigne une matrice rectangulaire de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$.

lien entre systèmes et matrices

Définition 14.42 $AX = B \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 & \cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & \cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_p \end{cases}$

– Les matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ $X := (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $B := (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont dites associées au système linéaire.

– Le système linéaire est homogène *ssi* B est la matrice nulle.

$$AX = 0 \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 & \cdots & +a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & \cdots & +a_{n,p}x_p & = & 0 \end{cases}$$

système de Cramer

Propriété 14.43 $AX = B \iff X = A^{-1}B \qquad (A \text{ inversible})$

– Un système linéaire est de Cramer *ssi* il admet une unique solution.

– Un sytème $n \times p$ est de cramer *ssi* $n = p = r$ où r est le rang du système.

– On peut utiliser cette relation pour inverser une matrice inversible

14.5 Rang d'une matrice

Dans cette section, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

14.5.1 Généralités

Soient n et p deux nombres entiers strictement positifs. Alors, le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille constituée par ses colonnes $C_1, \cdots, C_p$ dans l'espace vectoriel des colonnes à n lignes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est à dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Définition 14.44 $\mathrm{Rg}(M) = \mathrm{Rg}(C_1, \cdots, C_p) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_p)$

Propriété 14.45 M est inversible $\iff \mathrm{rg}(M) = n \qquad \big(M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)$

Propriété 14.46 Le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ne change pas si on la multiplie par une matrice carrée inversible.

Théorème 14.47 Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée

Propriété 14.48 $0 \leqslant \mathrm{rg}(M) \leqslant \min(n,p) \qquad \big(M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)$

Propriété 14.49 Une matrice, qui contient une sous-matrice de rang r, est au moins de rang r

Propriété 14.50 Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ est de rang r *ssi* il existe $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{G}l_p(\mathbb{K})$ tels que $P \times M \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

– pour calculer le rang d'une matrice M, on peut la transformer à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ET les colonnes afin d'obtenir une matrice du type J_r. Le rang de la matrice est alors le nombre entier r obtenu pour la matrice de type J_r.

15 Espaces vectoriels Séquence 10

programme

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Structure d'espace vectoriel.
- Sous-espaces vectoriels. *Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbb{K}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions).*
- Combinaisons linéaires.
- Sous-espace engendré. *On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.*
  Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.
- Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base. *On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini. Exemple de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

15.1 Espaces vectoriels

15.1.1 Loi interne

Dans toute cette section, E désigne un ensemble non vide et $*$ désigne une loi interne de E, c'est-à-dire une application $f : E \times E \to E$ dont le résultat est noté $x * y = f(x,y)$

loi interne

Définition 15.1 $*$ loi interne de $E \iff x * y \in E \qquad (x \in E, y \in E)$

– Autrement dit, le nombre $x * y$ existe et appartient à E quels que soient $x,y \in E$.

commutativité

Définition 15.2 $*$ loi commutative $\iff x * y = y * x \qquad (x \in E, y \in E)$

– Le résultat du calcul ne dépend pas de l'ordre (spatial) dans lequel il est effectué : le résultat est le même si l'on échange de place x et y.

associativité

Définition 15.3 $*$ loi associative $\iff (x*y)*z = x*(y*z) \quad (x \in E, y \in E, z \in E)$

– Le résultat du calcul ne dépend pas de l'ordre (temporel) dans lequel il est effectué

lément neutre

Définition 15.4 e neutre pour $* \iff e \in E$ et $x * e = x = e * x \qquad (x \in E)$

– Multiplier à gauche ou à droite par un élément neutre ne change rien.

Propriété 15.5 Une loi interne admet au plus un élément neutre.

– La multiplication admet 1 comme élément neutre dans $\mathbb{N}$ mais n'en admet aucun dans $2\mathbb{N}$.

– 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$.

– 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.

inversabilité

Définition 15.6 Soit $*$ une loi interne de E admettant un élément neutre e. Alors,

$$x \text{ inverse de } y \text{ pour } * \iff x * y = e = y * x$$

Propriété 15.7 Il existe au plus un inverse d'un élément

– Multiplier à gauche ou à droite par l'inverse donne l'élément neutre.

– Un élément x de E est inversible pour $*$ *ssi* x admet un inverse dans E pour $*$

– On utilise le mot « opposé » de préférence à « inverse » pour l'addition

15.1.2 Loi externe

Dans cette section, $+$ désigne une loi interne d'un ensemble non vide E et $\cdot$ désigne une loi externe de E selon le corps des scalaires $\mathbb{K}$, une application $f : \mathbb{K} \times E \to E$ dont le résultat est noté $\lambda \cdot x = f(\lambda,x)$

loi externe

Définition 15.8 $\cdot$ loi externe de $E \iff \lambda \cdot x \in E \qquad (\lambda \in \mathbb{K},x \in E)$

– Autrement dit, le nombre $\lambda \cdot x$ existe et appartient à E quels que soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

associativité

Définition 15.9 $\cdot$ loi associative $\iff (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \qquad (\lambda \in \mathbb{K},\mu \in \mathbb{K},x \in E)$

– Le résultat du calcul ne dépend pas de l'ordre (temporel) dans lequel il est effectué

distributivité

Définition 15.10

$$\cdot \text{ distributive sur } + \iff \begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x & (\lambda \in \mathbb{K},\mu \in \mathbb{K},x \in E) \\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y & (\lambda \in \mathbb{K},x \in E,y \in E) \end{cases}$$

15.1.3 Espace vectoriel

pace vectoriel

Définition 15.11 Soient $+, \cdot$ lois de E.

$$(E,+,\cdot)\ \mathbb{K}\text{-espace vectoriel} \iff \begin{cases} + \text{ loi interne, associative, commutative,} \\ \text{admettant un élément neutre noté } 0, \\ \text{tous les } x \in E \text{ sont inversibles pour } + \\ \cdot \text{ loi externe, associative, distributive sur } + \\ \forall x \in E, 1 \cdot x = x \end{cases}$$

– Un tel ensemble sera également appelé un « espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ».

– Pour simplifier, un espace vectoriel est un ensemble E plutôt sympathique dont on peut ajouter les éléments ou en prendre des multiples.

– Un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

– Un espace vectoriel contient au moins un élément : l'élément neutre 0_E.

– Pour simplifier les notations, on écrira λx à la place de $\lambda \cdot x$.

espace $\mathbb{K}^n$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ définies par

$$\begin{cases} (x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n) & := & (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n) \\ \lambda\cdot(x_1,\cdots,x_n) & := & (\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n) \end{cases}$$

forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Propriété 15.12 Pour $n \geqslant 1$, $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

espace de fonctions

Propriété 15.13 Soient A un ensemble non vide et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors, L'ensemble $\mathcal{F}(A,F)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies pour f et G dans $\mathcal{F}(A,F)$ par

$$\begin{array}{rcll} (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) & (x \in A) \\ (\lambda\cdot f)(x) & = & \lambda\cdot f(x) & (\lambda \in \mathbb{K}, x \in A) \end{array}$$

forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 15.14 L'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, muni des opérations $+$ et $\cdot$ usuelles, forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

ace des suites

Corollaire 15.15 L'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni des lois $+$ et $\cdot$ usuelles, forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Dans la suite de cette section $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

vecteur scalaire

Définition 15.16 x vecteur $\iff x \in E$
λ scalaire $\iff \lambda \in \mathbb{K}$

multiple nul

Le produit d'un scalaire par un vecteur est nul si, et seulement si le scalaire est nul ou le vecteur est nul.

Propriété 15.17 $\lambda.x = 0 \iff \lambda = 0$ ou $x = 0$

Combinaisons linéaires

Définition 15.18 x combi. linéaire de $x_1, \cdots, x_n \in E$ pour les coeffs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \iff x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$

– Les coefficients $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réalisant cette décomposition de x sur les $x_1, \cdots, x_n$ ne sont pas nécessairement uniques.

– Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$x_1, \cdots, x_n \in E \text{ et } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda_1.x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n.x_n \in E$$

15.2 Sous-espaces vectoriels

15.2.1 Généralités

Dans toute cette section, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel F inclus dans E tels que les lois de F soient la restriction à F des lois de E.

Définition 15.19 $F(+, .)$ SEV de $E \iff \begin{cases} F \subset E \\ F(+, \cdot)\mathbb{K}\text{-EV} \end{cases}$

– pour simplifier, un sous-espace vectoriel F de E est un espace vectoriel plus petit que E (au sens de l'inclusion), muni des mêmes lois.

– Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\{0\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 15.20 Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E = 0_F$

caractérisation

Propriété 15.21 Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$F \text{ SEV de } E \iff \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \emptyset \\ F \text{ stable par combi. linéaires} \end{cases}$$

– Autrement dit, F forme un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E $F \neq \emptyset$, $F \subset E$ et

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \qquad \forall (x,y) \in F^2, \qquad \lambda.x + \mu.y \in F,$$

c'est-à-dire stable par addition et par la multiplication exterieure

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in F^2, & x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, & \lambda.x \in F \end{cases}$$

Méthode 15.22 (Pour montrer que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

1. Montrer que $F \subset E$, pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de référence E
2. Montrer que $F \neq \emptyset$. Pour cela, il est conseillé de montrer que $0_E \in F$
3. Montrer que F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$$

intersection

Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

Propriété 15.23 $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un SEV de E $\qquad$ ($(F_i)_{i \in I}$ des SEV de E)

15.2.2 Espaces vectoriels engendrés

Dans cette section, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A désigne une partie non vide de E

pace engendré

Le (sous-) espace vectoriel (de E) engendré par une partie $A \subset E$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant A.

Définition 15.24 $\text{Vect}(A) := \bigcap_{A \subset F \text{ sev de } E} F$ $\qquad$ ($A \subset E$)

caractérisation

Propriété 15.25

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \geqslant 1, x_1 \in A, \cdots, x_n \in A, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \qquad (A \subset E)$$

– Le sous espace vectoriel engendré par une partie A est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ qu'il est possible de former avec les éléments de A.

famille finie

Corollaire 15.26

$$\text{Vect}(x_1,\cdots x_n)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k : (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\} \qquad (n\geqslant 1 \text{ et } (x_1,\cdots,x_n)\in E^n)$$

15.2.3 Familles de vecteurs

Dans cette section, $\mathcal{F}=(x_1,\cdots,x_n)$ désigne une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

famille génératrice

Une famille de vecteurs de E est génératrice *ssi* son espace vectoriel engendré est E

Définition 15.27 $\mathcal{F}$ engendre $E \iff E=\text{Vect}(\mathcal{F})$

– Une famille $\mathcal{F}$ est génératrice si l'on peut fabriquer touls les vecteurs de l'espace avec des combinaisons linéaires de ses éléments

$$\mathcal{F}\text{ engendre}E \iff \forall x\in E,\exists n\geqslant 1,\exists(e_1,\cdots,e_n)\in\mathcal{F},\exists\lambda 1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} : x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n.$$

Pour une famille finie, on peut écrire plus simplement

$$(e_1,\cdots,e_n)\text{ engendre}E \iff \forall x\in E,\exists\lambda 1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} : x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n.$$

<example>La famille constitué des vecteurs (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) engendrent $\mathbb{R}^3$. </example>

– Si $(x_1,\cdots,x_n)$ engendre E, on peut écrire tout vecteur x de E comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille

$$\forall x\in E,\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_n : x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$$

famille libre

Une famille de vecteurs est libre *ssi* il existe une seule combinaison linéaire nulle de ces vecteurs (celledont tous les coefficients sont nuls).

Définition 15.28 $(x_1,\cdots,x_n)$ libre $\iff \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0 \iff \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0\right)$

– On dit également que la famille $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ est linéarement indépendante dans E.

– Une famille infinie de vecteur est libre *ssi* chacune de ses sous-familles finie de vecteurs est libre.

– Si $(x_1,\cdots,x_n)$ est libre, on peut identifier les coefficients :

$$\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n=\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n \Longrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!]\lambda_i=\mu_i$$

famille liée

Définition 15.29 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ liée $\iff$ $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ non libre $\iff \exists(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,\cdots,0) : \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k = 0$

– On dit également que la famille $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ est linéarement dépendante ou qu'elle admet une relation de dépendance linéaire.

base

Définition 15.30 $\mathcal{F}$ base de $E \iff \mathcal{F}$ est libre et génératrice dans E

– Les bases d'un espace vectoriel E sont les familles libres et génératrices de E

– Autrement dit, on a

$$(e_1,\cdots,e_n) \text{ base de } E \iff \forall x\in E, \exists!(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) : x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$$

Les nombres $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ sont appelés coordonnées (ou composantes) du vecteur x dans la base $(e_1,\cdots,e_n)$.

– L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est muni d'une base "canonique" (qui s'introduit naturellement) : la famille $(e_1,\cdots,e_n)$ constituée des vecteurs

$$\forall i\in\{1,\cdots,n\}, \qquad e_i := (0,\cdots,0,\underset{i}{1},0,\cdots,0).$$

La méthode suivante sera admise et utilisée judicieusement (avec 11 semaines d'avance)

Méthode 15.31 (ECS*) Si $\mathcal{B}=\{e_1,\cdots,e_k\}$ est une base de E, alors
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff \text{rg}\left(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \text{card}(\mathcal{F})$
- $\mathcal{F}$ est génératrice dans $E \iff \text{rg}\left(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = k$

15.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Séquence 21 et 22

programme

- Espaces admettant une famille génératrice finie.
- Existence de bases
- Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.
- Dimension d'un espace vectoriel. *Notation* $\dim(E)$
- Caractérisation des bases. *Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.*
- Rang d'une famille finie de vecteurs.

- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel. *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si* $\dim(F) = \dim(E)$ *, alors* $F = E$.

15.3.1 Dimension

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

dimension finie

Définition 15.32 E de dimension finie $\iff$ E contient une famille génératrice finie

inégalité

Propriété 15.33 $\left.\begin{array}{l}(e_1,\cdots,e_m) \text{ libre dans } E\\ (f_1,\cdots,f_n) \text{ génératrice de } E\end{array}\right\} \Longrightarrow m \leqslant n$

Propriété 15.34 E de dimension infinie $\iff$ E contient une famille libre infinie

théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un espace vectoriel E, engendré par une famille finie $\mathcal{F}$, peut être complétée avec des vecteurs de $\mathcal{F}$ pour en constituer une base.

Théorème 15.35

$$\left.\begin{array}{l}(e_1,\cdots,e_m) \text{ libre}\\ (f_1,\cdots,f_n) \text{ génératrice}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r}\exists p \in [\![0,n]\!] \text{ et } 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n :\\ (e_1,\cdots,e_m,f_{i_1},\cdots,g_{i_p}) \text{ base}\end{array}$$

Corollaire 15.36 Tout espace de dimension fini admet au moins une base

Pour la suite de cette section, $E \neq \{0\}$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

dimension

Etant donné un espace vectoriel engendré par une famille finie, il existe un unique nombre entier positif ou nul, appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$, égal à la fois au nombre d'éléments de toutes les bases (d'une base) de E, au nombre d'éléments de la plus grande (en nombre) famille libre de E et au nombre d'éléments de la plus petite (en nombre) famille génératrice de E

Convention 15.37 $\dim(\{0\}) = 0$

Définition 15.38 $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \text{card}(\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ base de E)
En particulier, la dimension d'un espace vectoriel est indépendante de la base choisie pour la calculer

Théorème 15.39

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{K}}(E) &= \max\{\text{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset E \text{ et libre}\}\\ &= \min\{\text{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ engendre } E\}\end{aligned}$$

– le théorème précédent ne s'appliquant pas à l'espace vectoriel $\{0\}$, par convention, il sera dit de dimension 0.

caractérisation

Dans un espace de dimension finie n, une famille de n vecteurs est une base *ssi* ellle est libre *ssi* elle est génératrice

Propriété 15.40 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors,

$$\begin{aligned}(e_1,\cdots,e_n) \text{ libre} &\iff (e_1,\cdots,e_n) \text{ génératrice}\\ &\iff (e_1,\cdots,e_n) \text{ base}\end{aligned}$$

sous-espace

Un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie est lui même de dimension finie, plus petite. De plus, ils sont égaux *ssi* leurs dimensions sont égales

Propriété 15.41 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$

Propriété 15.42 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors,

$$F = E \iff \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

– Pour prouver que deux ensembles E et F sont égaux, on procède en général par double inclusion mais pour les espaces vectoriels, on utilise de préférence la méthode plus facile suivante :

- Prouver que $F \subset E$. Cela implique que $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$.
- Prouver l'égalité des dimensions ou établir que $\dim_{\mathbb{K}}(F) \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

15.3.2 Bases canoniques et dimensions de référence

Propriété 15.43 Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base $\{e_1,\cdots,e_n\}$ alors, E est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\{e_1,ie_1,e_2,ie_2,\cdots,e_n,ie_n\}$. En particulier

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2\dim_{\mathbb{C}}(E)$$

***n*-uplets**

Propriété 15.44 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille $\{e_1,\cdots,e_n\}$ définie par $e_k = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{k^{\text{ième}}\text{ position}},0,\cdots,0)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$

Théorème 15.45 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2n$

La base canonique de $\mathbb{C}^n$, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, est la famille $\{e_1,f_1,\cdots,e_n,f_n\}$ définie par

$$\begin{aligned}e_k &= (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{k^{\text{ième}}\text{ position}},0,\cdots,0)\\ f_k &= (0,\cdots,0,\underbrace{i}_{k^{\text{ième}}\text{ position}},0,\cdots,0) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)\end{aligned}$$

Polynômes

Propriété 15.46 $\mathbb{K}[X]$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie

Propriété 15.47 $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$
La base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est la famille de polynômes $(X^0, X^1, \cdots, X^n)$

Matrices

Propriété 15.48 $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = pq$
Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})$ définie pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, où E_i,j désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls saut celui sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, qui vaut 1.

Fonctions

Propriété 15.49 Les espaces vectoriels $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont de dimension infinie pour $n \in \mathbb{N}$ et I intervalle contenant au moins deux points.

Suites

Propriété 15.50 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel de dimension infinie

15.3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Dans cette section, $\mathcal{F}$ désigne une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *(E est de dimension finie)* et x désigne un vecteur de E.

rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace qu'ils engendrent.

Définition 15.51 $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$

– Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ est le nombre d'éléments de sa plus grande sous famille libre $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Matrice des coordonnées

Définition 15.52 $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

– $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$

– Bien faire attention à ne pas confondre les coordonnées d'un vecteur, avec le vecteur lui même (cette confusion est d'autant plus probable lorsque E est $\mathbb{K}^n$ ou un espace de matrices)

caractérisation

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de leurs matrices coordonnées (dans n'importe quelle base)

Propriété 15.53 Soient $X_1, \cdots, X_n$ les matrices des vecteurs $x1, \cdots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors,

$$\mathrm{rg}(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{rg}(X_1,\cdots,X_n)=\dim \mathrm{Vect}(X_1,\cdots,X_n)$$

– C'est aussi le rang de la matrice rectangulaire dont les colonnes sont $X_1,\cdots,X_n$.

famille génératrice//libre

Une famille finie est génératrice *ssi* son rang est égal à la dimension de l'espace la contenant. Une famille finie est libre si son rang est égal à son nombre d'éléments

Propriété 15.54 $\mathcal{F}$ famille génératrice de $E \iff \mathrm{rg}(\mathcal{F})=\dim(E)$

Propriété 15.55 $\mathcal{F}$ famille libre dans $E \iff \mathrm{rg}(\mathcal{F})=\mathrm{card}(\mathcal{F})$

15.4 Produits cartésiens, sommes et supplémentaires Séquence 20 et 21

programme

- Somme de deux sous-espaces vectoriels
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. *Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.*
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Somme et somme directe de k sous-espaces vectoriels.
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
- Dimension d'une somme de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension d'un supplémentaire. *Si F et G sont supplémentaires,* $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.
- Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.
- Concaténation de bases de sous espaces vectoriels. *Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.*

15.4.1 Produit cartésien

duit cartésien

Propriété 15.56 Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $E\times F$ l'est également pour les opérations définies par

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y') \qquad \text{pour } (x,y) \text{ et } (x',y') \text{ dans } E\times F\\ \lambda.(x,y) &= (\lambda.x,\lambda.y) \qquad \text{pour } \lambda\in\mathbb{K} \text{ et } (x,y) \text{ dans } E\times F\end{aligned}$$

Propriété 15.57 Si E et F sont de dimensions finies, $E\times F$ l'est aussi et
$\dim_{\mathbb{K}}(E\times F)=\dim_{\mathbb{K}}(E)+\dim_{\mathbb{K}}(F)$

Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de E et $f_1, \cdots, f_k$ est une base de F, alors $(e_1,0), \cdots, (e_n,0), (0,f_1), \cdots, (0,f_k)$ est une base de $E \times F$.

15.4.2 Sommes et supplémentaires

Sommes d'espaces vectoriels

Définition 15.58 La somme de n sous-espaces vectoriels $E_1, \cdots E_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est l'espace vectoriel

$$E_1 + \cdots + E_n = \{x_1 + \cdots + x_n : x_1 \in E_1, \cdots, x_n \in E_n\}$$

Somme directe

Définition 15.59 La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe et notée $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ *ssi*

$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0 \qquad (x_1 \in E_1, \cdots x_n \in E_n)$$

Dimension d'une somme directe

Propriété 15.60 Soient $E_1, \cdots, E_n$ sont des sous-espaces de dimension finie de E, qui sont en somme directe. Alors, $\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$

Propriété 15.61 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\begin{array}{ll} F + G & = \{x + y : x \in F, y \in G\} \\ F \oplus G & \iff \quad F \cap G = \{0\} \end{array}$$

Propriété 15.62 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors

$$\begin{array}{ll} \dim(F + G) & = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ \dim(F \oplus G) & = \dim(F) + \dim(G) \end{array}$$

Propriété 15.63 Soient F et G des sous-espaces de E. Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \quad \iff \quad E = F \oplus G \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{c} E = F + G \\ F \oplus G \end{array} \right.$$

Propriété 15.64 Tout sous-espace F d'un espace E de dimension finie admet un supplémentaire G dans E et $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$

Propriété 15.65 Soient $E_1, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases (finies) $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$. Alors

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \quad \iff \quad \big(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n\big) \text{ est une base de } E_1 + \cdots + E_n$$

15.5 Applications linéaires Séquence 16 *et 26*

A la séquence 16, on pourra utiliser (avec 10 semaines d'avance) les outils de cette section en remplaçant éventuellement la phrase « de dimension finie n » par « admettant une base de n vecteurs ». Cela sera détaillé plus explicitement en cours.

Dans cette section E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

15.5.1 Applications linéaires

Dans cette section, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ est une application

linéarité

Définition 15.66 $f$linéaire $\iff f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{K}, x,y \in E)$

Méthode 15.67 (Pour prouver que $f : E \to F$ est une application linéaire)

1. S'assurer que E et F sont bien des espaces vectoriels
2. Vérifier que $f : E \to F$ est une application : pour $x \in E$, montrer que $f(x)$ existe et appartient à F
3. Etablir la linéarité de f : pour λ et μ dans $\mathbb{K}$ et x et y dans E, vérifier que
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

morphismes

Définition 15.68 f morphisme $\iff$ f application linéaire

Définition 15.69 f endomorphisme $\iff$ $E = F$ et f application linéaire

Définition 15.70 f isomorphisme $\iff$ f application linéaire bijective

Définition 15.71 f automorphisme $\iff$ $E = F$ et f linéaire et bijective

- Une application linéaire est également appelé un « morphisme d'espaces vectoriels »
- Deux espaces vectoriels sont isomorphes *ssi* il existe un isomorphisme entre eux
- Une application linéaire $f : E \to F$ est une forme linéaire *ssi* $F = \mathbb{K}$.

espaces

Notation 15.72 $\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F \text{ application linéaire}\}$

Notation 15.73 $\mathcal{L}(E) = \{f : E \to E \text{ application linéaire}\}$

Muni de l'addition et de la multiplication externe des applications, l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires $f : E \to F$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 15.74 $\big(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ sur $\mathbb{K}$

composition

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Propriété 15.75 $\left.\begin{array}{l} f\in\mathcal{L}(E,F)\\ g\in\mathcal{L}(F,G)\end{array}\right\}\Longrightarrow g\circ f\in\mathcal{L}(E,G)$

domorphismes i commuttent

Définition 15.76 Soient u et v deux endomorphismes de E. Alors, u et v commuttent $\iff$ $u\circ v=v\circ u$

bijection réciproque

Propriété 15.77 f linéaire et bijective $\Longrightarrow$ f^{-1} linéaire et bijective

roupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est un groupe (non-commutatif) pour la composition des applications, appelé groupe linéaire de E.

Notation 15.78 $\mathcal{A}ut(E)=\mathcal{G}l(E)=\{f\in\mathcal{L}(E)\text{ bijective}\}\qquad(E\ \mathbb{K}\text{-EV})$

– L'élément neutre de $(\mathcal{G}l(E),\circ)$ est l'identité Id_E.

algèbre

Propriété 15.79 On calcule dans $(\mathcal{L}(E),+,\cdot,\circ)$ comme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot,\times)$, c'est à dire un peu comme avec les nombres rééls en se rappelant que la composition n'est pas commutative

– Plus simplement, la loi de composition $\circ$peut intéragir avec les lois $+$ et $\cdot$ pour les applications linéaires. Ainsi, la loi $\circ$ est distributive sur la loi $+$

$$\begin{cases}\forall f,g\in\mathcal{L}(F,G),\forall h\in\mathcal{L}(G,H),h\circ(f+g)=h\circ f+h\circ g.\\ \forall h\in\mathcal{L}(H,F),\forall f,g\in\mathcal{L}(F,G),(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h\end{cases}$$

La loi $\circ$ respecte la loi du scalaire mobile (elle commute avec $\cdot$)

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\qquad\forall f\in\mathcal{L}(E,F),\qquad\forall g\in\mathcal{L}(F,G),\qquad\lambda.g\circ f=(\lambda g)\circ f=g\circ(\lambda f).$$

puissances

Convention 15.80 $u^0=\mathrm{Id}_E\qquad\big(u\in\mathcal{L}(E)\big)$

Notation 15.81 $u^n=\underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{n\text{ fois}}\quad(u\in\mathcal{L}(E),n\geqslant 1)$

Notation 15.82 $u^{-n}:=\underbrace{u^{-1}\circ\cdots\circ u^{-1}}_{n\text{ fois}}\qquad(u\in\mathcal{G}l(E),n\geqslant 1)$

identité algébrique

Théorème 15.83 Soient u et v deux endomorphismes de E qui commuttent. Alors,

$$u^n - v^n = (u - v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ v^{n-1-k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

binôme de Newton

Théorème 15.84 Soient u et v deux endomorphismes de E qui commuttent. Alors,

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

15.5.2 Noyau et image

Dans cette section, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

ge réciproque

L'image réciproque d'un espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel

Propriété 15.85 $f^{-1}(H)$ est un SEV de E (H SEV de F)

Noyau

Le noyau d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs (au départ) dont l'image par f est nulle

Définition 15.86 $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in E : f(x) = 0\}$

- Déterminer le noyau d'une application linéaire u, c'est résoudre l'équation

$$u(x) = 0.$$

Propriété 15.87 Le noyau d'un morphisme $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E

Injectivité

Propriété 15.88 f injective $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

Méthode 15.89 (Pour étudier si une application linéaire est injective) Calculer son noyau

Image directe

Propriété 15.90 $f(H)$ est un SEV de F (H SEV de E)

Image

L'image d'une application linéaire est l'ensemble des images (à l'arrivée) par f des vecteurs au départ

Définition 15.91 $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) : x \in E\} = f(E)$

– Déterminer le noyau d'une application linéaire u, c'est résoudre l'équation

$$u(x) = 0.$$

surjectivité

Propriété 15.92 f surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F \qquad (f : E \to F \text{ linéaire})$

– déterminer le noyau (l'injectivité) d'une application linéaire est en général beaucoup plus facile que déterminer son image (sa surjectivité). La dimension des espaces vectoriels, que nous introduirons plus tard, va nous permettre de déterminer l'image (la surjectivité) BEAUCOUP plus facilement.

uation linéaire affine

Propriété 15.93
$$\{x \in E : u(x) = b\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } b \notin \mathrm{Im}(u) \\ x_0 + \mathrm{Ker}(u) & \text{si } b = u(x_0) \end{cases} \qquad (b \in F)$$

– L'ensemble solution S de l'équation $u(x) = 0$ n'est jamais vide, c'est l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$.

– Lorsque $b \neq 0$, l'ensemble solution de l'équation $u(x) = b$ est vide si b n'est pas une image de u et est égal à

$$x_0 + \mathrm{Ker}(u) = \{x_0 + h : h \in \mathrm{Ker}(u)\}$$

lorsque b est une image $b = u(x_0)$.

15.5.3 Homothétie, projections, symétries.

Dans cette section, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Homothéties

homothétie

Définition 15.94 f est une homothétie de rapport $\lambda \iff h = \lambda \mathrm{Id}_E \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$

Propriété 15.95 Une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un automorphisme de E, de bijection réciproque l'homothétie de rapport inverse $\lambda^{-1}\mathrm{Id}_E$

– Une propriété remarquable des homothéties vectorielles est qu'elles commutent avec tous les endomorphismes de E. Autrement dit,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \qquad (\lambda_E^{\mathrm{Id}}) \circ f = f \circ (\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda f.$$

En particulier, on peut utiliser le binôme de Newton pour les homothéties.

Propriété 15.96 Les homothéties commuttent avec tous les endomorphismes de E

Projections

Dans cette section, p désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $E = F \oplus H$.

projection

Définition 15.97 p est un projecteur sur F parallèlement à $H \iff \begin{cases} p(x) = x & (x \in F) \\ p(x) = 0 & (x \in G) \end{cases}$

- Une telle projection est un projecteur

Propriété 15.98 Soit p un projecteur sur F parallèlement à H. Alors, $\begin{cases} F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \\ G = \mathrm{Ker}(p) \end{cases}$

caractérisation

Propriété 15.99 p projecteur $\iff p^2 = p$

- En dehors des rares cas pour lesquels $E = \{0\}$ ou $p = \mathrm{Id}_E$, aucun projecteur n'est bijectif
- On utilise également le mot « projecteur » à la place de « projection »

Symétries

Dans cette section, s désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $E = F \oplus H$.

symétrie

Définition 15.100 s symétrie de F parallèlement à $G \iff \begin{cases} s(x) = x & (x \in F) \\ s(x) = -x & (x \in G) \end{cases}$

Propriété 15.101 Une symétrie s de E est un automorphisme, dont la bijection réciproque est elle-même

Propriété 15.102 Soit s une symétrie de F parallèlement à H. Alors, $\begin{cases} F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \\ G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) \end{cases}$

symétries

Propriété 15.103 s symétrie $\iff s^2 = s$

15.5.1 Rang

Dans cette section, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

espaces isomorphes

Définition 15.104 E et F sont isomorphes *ssi* il existe un isomorphisme $f : E \to F$ entre eux

lien avec $\mathbb{K}^n$

Théorème 15.105 E isomorphe avec $\mathbb{K}^n \iff \dim(E) = n$

- Plus précisément , pour chaque base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k e_k \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- le théorème précédent affirme que :
- Tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension $n \geqslant 1$ ont la même structure.
- Plutôt que de travailler dans un espace théorique E, on peut fixer une base et travailler dans l'espace $\mathbb{K}^n$ avec les coordonnées.
- Le choix de la base détermine l'isomorphisme.

isomorphisme et dimension

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes *ssi* ils ont même dimension

Corollaire 15.106 Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes *ssi* ils ont la même dimension

base

Théorème 15.107 Soient E,F de dim finie. Alors, $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F)$

Propriété 15.108 Si $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_p\}$ sont des bases respectives de E et F, alors la famille d'applications linéaires $\{g_{i,j}\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ définie par

$$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \qquad g_{i,j}(\lambda_1 \mathrm{e}_1 + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}_n) := \lambda_i f_j$$

forme une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

rang

Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image (lorsqu'elle est de dimension finie).

Définition 15.109 Soit u une application linéaire dont l'image est de dimension finie. Alors, $\mathrm{rg}(u) := \dim \mathrm{Im}(u)$

caractérisation

Propriété 15.110 Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff \text{rg}(u) = n$$

composition

On ne change pas le rang d'une application linéaire de rang fini en la composant à gauche ou/et à droite par un isomorphisme.

Propriété 15.111 On ne change pas le rang fini d'une application linéaire en la composant à gauche ou à droite par un isomorphisme

15.5.2 Matrices

Dans cette section, x désigne un vecteur de E, un espace vectoriel de base $\mathcal{E} := \{e_1, \cdots, e_p\}$, et F désigne un espace vectoriel de base $\mathcal{F} := \{f_1, \cdots, f_q\}$.

matrice d'un vecteur

Définition 15.112 $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

Propriété 15.113 La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{E}$ est unique. De plus, l'application réalisant cette association est un isomorphisme

– A chaque vecteur x de E est associée la matrice (unique) de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$. L'application réalisant cette association est l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \mathcal{M}at_{\mathcal{E}}(x) \end{array}$$

– Parfois, les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. C'est pratique mais il faut savoir que c'est dangereux d'identifier des vecteurs colonnes à des n-uplets que l'on écrit en ligne...

famille de vecteurs

La matrice d'une famille de vecteurs est la matrice dont les colonnes sont les matrices des vecteurs.

Définition 15.114 Soient $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs de E, de matrice $V_1, \cdots, V_n$ dans $\mathcal{E}$. Alors, $\mathcal{M}at_{\mathcal{E}}(v_1, \cdots, v_q) = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{pmatrix}$

– Autrement dit, on a

$$\forall j \in [\![1,q]\!] v_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} a_{i,j} e_i \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{E}}(v_1, \cdots, v_q) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

application linéaire

Définition 15.115 Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors, $\mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathcal{M}at_{\mathcal{F}}\big(u(e_1), \cdots, u(e_p)\big)$

– Autrement dit, notant $\mathcal{F} := \{f_1, \cdots, f_q\}$ la base finie de F, on a

$$\forall j \in [\![1,q]\!] u(e_j) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} a_{i,j} f_i \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{E}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

Propriété 15.116 La matrice de l'application linéaire u associée aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est unique. De plus, l'application réalisant cette association est un isomorphisme

– Cette propriété est fondamentale car, elle permet de transformer un problème théorique portant sur des applications linéaires en problème calculatoire et concret portant sur des matrices de coordonnées.

– En bref, le fait de fixer une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F permet d'associer de manière **unique** à chaque application linéaire $u : E \to F$ une matrice U de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et réciproquement.

– L'application précédente étant un isomorphisme, on a

$$\forall u,v \in \mathcal{L}(E,F), \qquad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \qquad \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) + \mu \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(v).$$

caractérisation Une application linéaire est complétement caractérisée par la donnée de ses images sur une base (ou plus généralement sur une famille génératrice)

Propriété 15.117

$$\forall (v_1, \cdots v_p) \in F^p, \quad \exists! u \in \mathcal{L}(E,F) : \quad u(e_i) = v_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

égalité Deux applications linéaires sont égales *ssi* elles coincident sur une base (ou plus généralement sur une famille génératrice)

Propriété 15.118 Soient u et v deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$u = v \quad \iff \quad u(e_i) = v(e_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

rang

Propriété 15.119 Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors, $\operatorname{rg} u = \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$

En particulier, le rang d'une application linéaire est indépendant des bases choisies pour le calculer

– Le rang d'une application linéaire, comme le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice qui leur est associée

caractérisation

Propriété 15.120 Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ bases de E et F. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors, u bijective $\iff \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ inversible

image

Propriété 15.121 Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{F}}\big(u(x)\big) = \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{E}}(x) \qquad (x \in E)$$

– Autrement dit, si X est la matrice des coordonnéees de $x \in E$ dans la base $\mathcal{E}$, si U est la matrice de l'endomorphisme u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et si Y est la matrice des coordonnées de $y \in F$ dans la base $\mathcal{F}$, on a

$$y = u(x) \iff Y = UX.$$

composée La matrice d'une composée est le produit des matrices (dans le même ordre)

Théorème 15.122 Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux application linéaires avec $\mathcal{G}$ base de l'espace vectoriel de dimension finie G. Alors,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathcal{M}at_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$

inverse La matrice d'une bijection réciproque est l'inverse de la matrice de la bijection

Théorème 15.123 Soit $u : E \to F$ un isomorphisme. Alors, on a

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}.$$

Matrice de passage La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est la matrice de l'identité de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$, c'est aussi la matrice des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ décomposés sur la base $\mathcal{B}$

Définition 15.124 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors, $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Propriété 15.125 Une matrice de passage est inversible

inverse La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$

Propriété 15.126 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases d'un même espace vectoriel de dimension finie. Alors,

$$\mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) = \mathcal{M}at(\mathcal{C} \to \mathcal{B})^{-1}$$

changement de base vecteur

Propriété 15.127 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases d'un même espace vectoriel E de dimension finie. alors,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) \qquad (x \in E)$$

changement de bases application linéaire

Propriété 15.128 Soit $u : E \to F$ un morphisme entre des espaces de dimension finie E, de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, et F, de bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Alors,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = \mathcal{M}at_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathrm{Id}_F) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E)$$

Probabilités

programme L'objectif au premier semestre est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en nefaisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

16 Espaces probabilisés Séquence 7 et 8

16.1 Expériences aléatoires

programme

- Observation d'une expérience aléatoire - Événements
  - Expérience aléatoire. *On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.*
  - Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles. *On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.*
  - Système complet d'événements fini. *Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes :$A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$*

expérience aléatoire

Définition 16.1 Une expérience aléatoire est un processus (renouvelable) de résultat incertain

– Chaque renouvellement de l'expérience est appelé une épreuve. Une épreuve peut combiner plusieurs épreuves élémentaires, consécutives ou simultanées. Par exemple, le jet de deux dés peut être considéré comme la combinaisons de deux épreuves élémentaires.

univers

L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé univers des possibles ou univers des résultats observables.

Définition 16.2 $\Omega = \{\text{résultats possibles}\}$

– L'univers des possibles est finis *ssi* l'ensemble Ω est de cardinal fini.

– L'univers des possibles est traditionnellement noté Ω.

16.2 *Tribus* Séquence *24*

tribu

Définition 16.3 $\mathcal{T}$ tribu de $\Omega \iff \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ stable pour $\begin{cases} \text{complémentaire} \\ \text{union (dénombrable)} \end{cases}$

– Lorsque l'ensemble Ω est dénombrable (en particulier lorsque Ω est fini), l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

Propriété 16.4 $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu de Ω

– La tribu grossière de Ω est la plus petite tribu de Ω au sens de l'inclusion

Propriété 16.5 $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω

– $\mathcal{P}(\Omega)$ la plus grande tribu de Ω au sens de l'inclusion

16.3 Espaces probabilisables

Dans cette section Ω désigne un ensemble non vide

espace probabilisable

Un espace probabilisable est un ensemble muni d'une tribu.

Définition 16.6 $(\Omega,\mathcal{T})$ espace probabilisable $\iff \mathcal{T}$ tribu de Ω

événements

Les résultats potentiels d'une expérience aléatoire sont appelés des événements. Un événement d'un espace probabilisable est un élément de sa tribu.

Définition 16.7 Soient $(\Omega,\mathcal{T})$, un espace probabilisable. Alors, A événement $\iff$ $A \in \mathcal{T}$

Définition 16.8 $\emptyset$ est l'événement impossible

– L'événement $\emptyset$ n'est jamais réalisé.

Définition 16.9 Ω est l'événement certain

– L'événement Ω est toujours réalisé.

Définition 16.10 Un événement est élémentaire, lorsqu'il contient exactement un élément de Ω.

Convention 16.11 On dit que « l'événement A implique l'événement B » lorsque $A \subset B$.

Pour la suite de cette section, les lettres majuscules representent des événements

opérations

Propriété 16.12 l'ensemble $\bar{A} = \complement_\Omega A$ est l'événement contraire de A.

Propriété 16.13 l'ensemble $A \cup B$ est l'événement « A ou B ».

Propriété 16.14 l'ensemble $A \cap B$ est l'événement « A et B ».

Propriété 16.15 l'ensemble $A \setminus B$ est l'événement « A mais pas B ».

Corollaire 16.16 Le complémentaire d'un événement est un événement

Corollaire 16.17 Une réunion finie *(resp. dénombrable)* d'événements est un événement

Corollaire 16.18 Une intersection finie *(resp. dénombrable)* d'événements est un événement

vénements incompatibles

Deux événements sont incompatibles si'ils sont disjoints.

Définition 16.19 A et B incompatibles $\iff A \cap B = \emptyset$

Définition 16.20 Les évenements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement incompatibles *ssi* $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$

stème complet

Définition 16.21 Pour I ensemble fini *(resp. dénombrable)*, les événements $(E_i)_{i\in I}$ forment un système complet fini *(resp. dénombrable) ssi* $\begin{cases} E_i \cap E_j = \emptyset & (i \neq j) \\ \bigcup\limits_{i\in I} E_i = \Omega \end{cases}$

16.4 Espaces probabilisés

programme

- Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. *Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans* [0,1] *et vérifiant* $P(\Omega) = 1$. *Cas de l'équiprobabilité.*
- Notion d'espace probabilisé. *Lors du premier semestre, on se restreindra à la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.*
- Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.

Dans cette section, $(\Omega,\mathcal{T})$ désigne un espace probabilisable

probabilité

Définition 16.22 Une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{T})$ est une application $P : \mathcal{T} \to [0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i) \qquad ((A_i)_{i\in I} \text{événements mutuellement incompatibles } \textit{avec } I \textit{ dénombrable})$$

– On a nécéssairement $P(\varnothing) = 0$, ainsi que

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ P(B \setminus A) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

En particulier, si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

espace probabilisé

Définition 16.23 $(\Omega,\mathcal{T},P)$ espace probabilisé $\iff$ P probabilité de $(\Omega,\mathcal{T})$, espace probabilisable

événement quasi-certain

Définition 16.24 A quasi-certain $\iff P(A)=1$

événement quasi-impossible

Définition 16.25 $\left.\begin{array}{c}A \text{ quasi-impossible}\\ A \text{ négligeable}\end{array}\right| \iff P(A)=0$

événements équiprobables

Définition 16.26 Des événements sont équiprobables *ssi* ils ont tous la même probabilité de se réaliser

probabilités et univers finis

Théorème 16.27 Soit $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ un univers fini. Alors,

$$\exists P \text{ probabilité sur } \Omega : \forall i\in[\![1,n]\!], P(\omega_i)=p_i \iff \begin{cases}\forall i\in[\![1,n]\!], pi\geqslant 0\\ p_1+\cdots+p_n=1\end{cases}$$

probabilité uniforme

Définition 16.28 La probabilité uniforme sur un univers fini Ω , non vide, est l'application $P:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ définie par

$$P(A)=\frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega}\quad (A\subset\Omega)$$

– On retiendra que la probabilité (uniforme) p d'un événement est donné par

$$p=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

formule de Poincarré

Propriété 16.29 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Propriété 16.30

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-\big(P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)\big)+P(A\cap B\cap C)$$

mule du crible

Propriété 16.31

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i1}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

– Pour des événements A, B, C et D, cela donne

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-\big(P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)\big)+P(A\cap B\cap C)\\
P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)+P(D)\\
&\quad -\big(P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(A\cap D)+P(B\cap C)+P(B\cap D)+P(C\cap D)\big)\\
&\quad \big(P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P(A\cap C\cap D)+P(B\cap C\cap D)+P(A\cap B\cap C)\big)\\
&\quad -P(A\cap B\cap C\cap D)
\end{aligned}
$$

16.5 Limite monotone

Séquence 24

programme

- Théorème de la limite monotone*Pour toute suite croissante (A_n) d'événements*

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\right)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)$$

Pour toute suite décroissante (A_n) d'événements

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\right)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)$$

Dans cette section, la monotonie des suites d'événements est relative à l'inclusion

Théorème 16.32

$$P\Big(\bigcup_{n\geqslant 0}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\qquad \big((A_n)_{n\geqslant 0}\text{ suite croissante d'événements}\big)$$

$$P\Big(\bigcap_{n\geqslant 0}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\qquad \big((A_n)_{n\geqslant 0}\text{ suite décroissante d'événements}\big)$$

Corollaire 16.33 Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 0}$,

$$P\Big(\bigcup_{n\geqslant 0}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P\Big(\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n}A_k\Big)\quad\text{et}\quad P\Big(\bigcap_{n\geqslant 0}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P\Big(\bigcap_{0\leqslant k\leqslant n}A_k\Big)$$

16.6 Probabilités conditionnelles

programme

- Probabilité conditionnelle. *Notation* P_A . P_A *est une probabilité.* $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P_A)$ *est un espace probabilisé.*
- Formule des probabilités composées. *Si* $P(A)\neq 0$, $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$. *Si* $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ *alors* $P\left(\cap_{i=1}^n A_i\right)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
- Formule des probabilités totales. *Si* $(A_i)_{i\in I}$ *est un système complet fini, alors pour tout événement* B *on a*

$$P(B)=\sum_{i\in I}P(B\cap A_i)$$

- Formule de Bayes. *On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.*

Dans toute cette section, $(\Omega,\mathcal{T},P)$ est un espace probabilisé et les lettres majuscules désignent des événements

probabilité conditionnelle

Etant donné un événement E de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant E est le nombre défini par

Définition 16.34 $P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}\qquad (P(E)\neq 0)$

– L'événement A sachant E est parfois noté $A|E$

– La probabilité conditionnelle de A sachant E peut également être notée $P(A|E)$.

– Ne pas confondre la notation $A|E$ (A sachant que E est réalisé) avec l'événement $A\setminus E$ (A mais pas E)

– Si E est de probabilité nulle, on a $P(A\cap E)=0$ et $P(A)=P(A\setminus E)$. En d'autres termes, le fait de savoir que l'événement E est réalisé n'apporte quasiment aucune information pertinente supplémentaire (pour les probabilités).

espace probabilisé

La probabilité conditionnelle sachant E est une nouvelle probabilité sur Ω

Propriété 16.35 Lorsque $P(E)\neq 0$, on définit une probabilité de $(\Omega,\mathcal{T})$ en posant

$$\begin{array}{rccc} P_E: & \mathcal{T} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_E(A) \end{array}$$

– En particulier, $(\Omega,\mathcal{T},P_E)$ est un nouvel espace probabilisé (les événements sont les mêmes mais leurs probabilités sont différentes)

– La probabilité conditionnelle étant une probabilité, elle satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{array}{rl} P_E\left(\overline{A}\right) & = 1 - P_E(A) \\ P_E(B \setminus A) & = P_E(B) - P_E(A \cap B) \end{array} \qquad P_E(A \cup B) = P_E(A) + P_E(B) - P_E(A \cap B)$$

ditionnement

En pratique, la formule de conditionnement permet de calculer facilement la probabilité d'une conjonction (intersection) d'événements.

Propriété 16.36 $P(A \cap E) = P(E) \times P_E(A) \qquad (P(E) \neq 0)$

conditionnement successif

La formule des probabilités composées permet de calculer la probabilité d'une intersection multiple.

Propriété 16.37

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \qquad (P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0)$$

– La condition $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ assure l'existence de toutes les probabilités conditionnelles.

filtration

Propriété 16.38

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap E_i) \qquad ((E_i)_{i \in I} \text{ système complet fini (\textit{resp. dénombrable})}$$

probabilités totales

Propriété 16.39

$$P(A) = \sum_{i \in I} P_{E_i}(A) \times P(E_i) \qquad ((E_i)_{i \in I} \text{ système complet fini (\textit{resp. dénombrable}) vérifiant } P(E_i) \neq 0$$

– La formule des probabilités totales est fondamentale pour le calcul des probabilités

– Lorsque le système total $E_1, \cdots, E_n$ comporte des événements négligeables, on a tout de même

$$P(A) = \sum_{P(E_i) > 0} P_{E_i}(A) \times P(E_i)$$

– La formule sert très souvent dans le cas d'un système total à deux éléments E, $\bar{E}$:

$$P(A) = P_E(A) \times P(E) + P_{\bar{E}}(A) \times P(\bar{E})$$

mule de Bayes

Propriété 16.40 Soit $(E_i)_{i \in I}$ un système complet fini (*resp. dénombrable*) d'événements vérifiant $P(E_i) \neq 0$. Alors,

$$P_A(E_i) = \frac{P(E_i) \times P_{E_i}(A)}{\sum_{k \in I} P(E_k) P_{E_k}(A)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

– La formule sert très souvent dans le cas d'un système total à deux éléments B, $\bar{B}$:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)}$$

16.7 Indépendance

programme

- Indépendance de deux événements. *Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.*
- Indépendance mutuelle de n événements.Si n événements $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i , avec $B_i = A_i$ ou A_i.

indépendance

Deux événements sont indépendants si la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités

Définition 16.41 $A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

mplémentaire

Propriété 16.42

$$A \perp\!\!\!\perp B \iff \bar{A} \perp\!\!\!\perp B \iff A \perp\!\!\!\perp \bar{B} \iff \bar{A} \perp\!\!\!\perp \bar{B}$$

dépendance et nditionnement

Propriété 16.43

$$\begin{array}{rcll} A \perp\!\!\!\perp B & \iff & P_A(B) = P(B) & (P(A \neq 0) \\ & \iff & P_B(A) = P(A) & (P(B) \neq 0) \end{array}$$

indépendance mutuelle

Des événements sont mutuellement indépendants si la probabilité de toute intersection finie est le produit de leurs probabilités

Définition 16.44 $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants *ssi*

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n)$$

Propriété 16.45 Soient $A_1, \cdots, A_n$, des événements mutuellement indépendants. Alors, posant $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, les événements $B_1, \cdots, B_k$ sont mutuellement indépendants.

17 Variables aléatoires réelles Séquence 14

programme

- Variables aléatoires réelles
  On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Lesvariables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration desformules.
  - Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est une application de Ω dans R. *On adoptera les notations habituelles telles que* $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leq x]$, *etc...*
  - Système complet associé à une variable aléatoire.
  - Fonction de répartition d'une variable aléatoire X. F X (x) = P (X ≤x) .
  - Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
  - variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définiesur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$. *La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.On se limitera à des cas simples, tels queg*$(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, *ect...*

- Espérance d'une variable aléatoire. $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$
  - Théorème de transfert. $E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ *Théorème admis.*
  - $E(aX + b) = aE(X) + b$.
  - Variance et écart-type d'une variable aléatoire. *Notations* $V(X)$ *et* $\sigma(X)$.
  - Cas particulier où $V(X) = 0$.
  - Calcul de la variance. *Formule de Koenig-Huygens :* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
  - $V(aX + b) = a^2V(X)$.
  - Variables centrées, centrées réduites. *Notation* X^* *pour la variable aléatoire centrée réduite associée à* X

17.1 Généralités

Dans cette section, $(\Omega,\mathcal{T})$ désigne un espace probabilisable (la tribu $\mathcal{T}$ des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$ au premier semestre *et* $\mathcal{T}$ *tribu quelconque au second semestre*). Pour $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$, nous adoptons les notations habituelles

$$\begin{array}{rcccl} X^{-1}(]-\infty,x]) & = & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} & = & [X \leqslant x] \\ X^{-1}(\{x\}) & = & \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} & = & [X = x] \\ X^{-1}(A) & = & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} & = & [X \in A] \end{array}$$

etc.

iable aléatoire

Définition 17.1 Une V.A.R. sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{T}}_{[X \leqslant x] \text{ événement}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

.A.R. certaine

Définition 17.2 X est une V.A.R. certaine *ssi* il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $X(\omega) = c \quad (\omega \in \Omega)$

V.A.R. quasi-certaine

Définition 17.3 X est une V.A.R. quasi-certaine *ssi* il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$

univers image

Définition 17.4 L'univers image d'une V.A.R. X sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{T})$ est l'ensemble image $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$

– Pour le calcul de probabilités, l'univers image $X(\Omega)$ sert davantage et est donc plus important que l'univers Ω.

stème complet

Définition 17.5 Le système complet associé à une V.A.R. X sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{T})$, avec $X(\Omega)$ dénombrable, est la famille d'événements $\{[X = x]\}_{x \in X(\Omega)}$

Pour la suite de cette section, X désique une V.A.R. sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.

d'une V.A.R.

Définition 17.6 La loi de X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par

$$P_X(A) = P(X \in A) \qquad (A \text{ événement de } X(\Omega))$$

– Au premier semestre, $X(\Omega)$ est fini et les événements de $X(\Omega)$ sont tous les sous-ensembles de $X(\Omega)$

– Cette formule sera également valable au second semestre, lorsque $\mathbb{R}$ sera muni de la tribu (borelienne) engendrée par les intervalles du type $]-\infty, x] \quad (x \in \mathbb{R})$

fonction de répartition

Définition 17.7 La fonction de répartition de X est F_X l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Propriété 17.8 La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante, continue à droite, sur $\mathbb{R}$ et vérifie $F_X \underset{-\infty}{\to} 0$ et $F_X \underset{+\infty}{\to} 1$
Remarque : Si $X(\Omega)$ est dénombrable, elle est aussi constante par morceaux (en escalier)

Propriété 17.9 La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire

17.2 Espérance et variables aléatoires discretes

Séquence 14 *et 25*

programme

- *Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega,\mathcal{T})$. L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.*
- *Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$*
- *Tribu engendrée par une variable aléatoire discrète. La tribu $\mathcal{T}_X$ des événements liés à X est la tribu engendrée par le système complet $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$. Cette tribu est aussi appelée tribu engendrée par la variable aléatoire X et constitue l'information apportée par X.*
- *Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.*
- *Espérance d'une variable aléatoire. Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.*
- *Théorème de transfert. Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ est absolument convergente, et alors $E(g(X))$ est la somme de cette série. Théorème admis.*

variable aléatoire finie

Dans cette section, $(\Omega,\mathcal{T},P)$ désigne un espace probabilisé et X une V.A.R. dont l'univers image $X(\Omega)$ est fini *ou dénombrable* Une variable aléatoire finie est une variable aléatoire dont l'univers image est fini.

Définition 17.10 X V.A.R. finie $\iff X(\Omega)$ fini

– Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, alors le système complet associé à X est la famille

$$\{(X = x_1), \cdots (X = x_n)\}$$

variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire finie est une variable aléatoire dont l'univers image est fini.

Définition 17.11 X V.A.R. discrète $\iff X(\Omega)$ dénombrable

fonction de masse

Définition 17.12 La fonction de masse d'une V.A.R discrète X est

$$\begin{array}{rccc} p_X : & X(\Omega) & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P(X=x) \end{array}$$

– La fonction de masse de X est également appelée (abusivement ?) « loi de probabilité de X ».

lien

Propriété 17.13 Si X est finie *(resp. discrète)*, alors $F_X(x) = \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leqslant x}} \underbrace{\mathrm{P(X=y)}}_{p_X(y)}$ $(x \in \mathbb{R})$

Propriété 17.14 Si X est finie *(resp. discrète)*, $p_X(x) = P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) \quad (x \in \mathbb{R})$

– Le rapport entre fonction de répartition et fonction de densité est un peu le même que le rapport entre primitive et dérivée, à partir de l'une, on peut retrouver l'autre.

espérance

Définition 17.15 Une V.A.R. discrète X admet une espérance

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \underbrace{\mathrm{P(X=x)}}_{p_X(x)}$$

si, et seulement si, cette somme est absolument convergente

espérance

Corollaire 17.16 Soit X une V.A.R finie, d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

formule de transfert

Théorème 17.17 Soit X une V.A.R. finie *(resp. discrète)* et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors,

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$$

si, et seulement si, cette somme est absolument convergente

– Cette formule permet de déterminer l'espérance d'une v.a. composée $Y = f(X)$, que l'on peut également calculer via la formule

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} xP(Y = y)$$

17.3 Espérance et variables aléatoires à densité Séquence 30

programme

- Définition d'une variable aléatoire à densité. *On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- Toute fonction f_X à valeurs positives, qui éventuellement ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X. *Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$*
- Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X
- Toute fonction f positive, continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire *(résultat admis).*
- Transformation affine d'une variable à densité. *Les étudiants devront savoir calculer la fonctionde répartition et la densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).*
- Espérance d'une variable à densité. *Une variable aléatoire X de densité f_X admetune espérance $E(X)$ si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Dans ce cas, $E(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.*

A.R. à densité

Définition 17.18 Une V.A.R. X est à densité *ssi* sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points

densité

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. à densité

Définition 17.19 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de X *ssi* f ne différe de F'_X qu'en un nombre fini de points

Propriété 17.20 f densité de $X \iff F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f \qquad (x \in \mathbb{R})$

Théorème 17.21 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la densité d'une V.A.R. X *ssi* f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points et vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$

Propriété 17.22 X est une V.A.R. à densité *ssi* $aX+b$ est une V.A.R. à densité ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$)

Méthode 17.23 (Pour obtenir fonction de répartition et densité de $Y = aX+b$)

1. Calculer $F_Y(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(aX+b \leqslant y) = P(aX \leqslant y-b) &= P\left(X \leqslant \tfrac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\tfrac{y-b}{a}\right) && a > 0 \\ &= P\left(X > \tfrac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\tfrac{y-b}{a}\right) && a < 0 \end{aligned}$$

2. Dériver (la composée obtenue) pour en déduire la densité f_Y

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= \tfrac{1}{a} f_X\left(\tfrac{y-b}{a}\right) && \text{si } a > 0 \\ &= -\tfrac{1}{a} f_X\left(\tfrac{y-b}{a}\right) && \text{si } a < 0 \end{aligned}$$

espérance

Définition 17.24 Une V.A.R. X de densité f admet une esperance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

si, et seulement si, cette intégrale converge absolument

17.4 Espérance

programme

- $E(aX+b) = aE(X) + b$
- Variables aléatoires centrées
- Moment d'ordre r $(r \in \mathbb{N})$ *Notation* $m_r(X) = E(X^r)$

Dans cette section, X est une V.A.R. finie, *discrète ou à densité* sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

pérance d'une V.A.R. quasi certaine

Propriété 17.25 Soit $c \in \mathbb{R}$ et $X = c$ presque sûrement. Alors, $E(X) = c$

moments

Définition 17.26 Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de X est le nombre $m_k(X) = E(X^k)$, *s'il existe*.

.A.R. centrée

Définition 17.27 X est une V.A.R. centrée *ssi* *X admet une espérance et* $E(X) = 0$

Propriété 17.28 X est une V.A.R. positive et centrée *ssi* $X = 0$ presque sûrement

linéarité

Propriété 17.29 Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et des V.A.R. X et Y *admettant une esperance*. Alors, *la V.A.R.* $\lambda X + \mu Y$ *admet une espérance et* $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$

Corollaire 17.30 Soit X une V.A.R. *admettant une esperance*. Alors,

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

Méthode 17.31 (Pour centrer une V.A.R X*, qui admet une espérance)* Lui soustraire son espérance pour obtenir la V.A.R. centrée $Y = X - E(X)$

Dans la suite de cette section, X *admet une espérance*

positivité
Croissance

Propriété 17.32 $X \geqslant 0$ p.s. $\implies E(X) \geqslant 0$

Propriété 17.33 $a \leqslant X \leqslant b$ p.s. $\implies a \leqslant E(X) \leqslant b$

Propriété 17.34 $X \leqslant Y$ p.s. $\implies E(X) \leqslant E(Y)$

tribu image

Propriété 17.35 La tribu image de X est la tribu

$$\mathcal{T}_X := \{A \subset X(\Omega) : (X \in A) \in \mathcal{T}\}$$

– $\mathcal{T}_X$ est une tribu de l'univers image, de sorte que $(X(\Omega), \mathcal{T}_X)$ est un espace probabilisable.

– Pour le calcul de probabilités, les événements de la tribu image servent davantage et sont donc plus importants que les événements de l'univers Ω.

– Etant donné un événement A de la tribu image, on notera parfois

$$(X \in A) := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

– Etant donné $x \in \mathbb{R}$, on notera également

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \quad \text{et} \quad (X \leqslant x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$$

babilité image

Propriété 17.36 L'application $P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_X & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$ est une probabilité

– En particulier, $(X(\Omega), X(\mathcal{T}), P_X)$ est un espace probabilisé. C'est l'espace probabilisé image de $(\Omega,\mathcal{T},P)$ par X.

17.5 Variance

programme

- *Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète. Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$*
- *Calcul de la variance. Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$*
- *$V(aX + b) = a^2V(X)$*
- *Cas particulier où $V(X) = 0$*
- *Variables centrées, centrées réduites. Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.*

Dans cette section, X désigne une V.A.R. sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$, *qui admet une espérance.*

variance

La variance est le moment d'ordre 2 de la va centrée $X - E(X)$

Définition 17.37 *Lorsqu'elle existe,* la variance d'une V.A.R. X est le nombre

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Propriété 17.38 $V(X) = 0$ *ssi* il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $X = c$ presque sûrement

rmule de Kœnig-Huygens

La variance est la différence de l'espérance du carré et du carré de l'espérance.

Propriété 17.39 X admet une variance (et une espérance) *ssi* X admet un moment d'ordre 2

Propriété 17.40 *Lorsque la variance de X existe,*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

transformation affine

Propriété 17.41 Si X admet une variance, alors $\lambda X + \mu$ admet une variance pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

Propriété 17.42 $V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

positivité

Propriété 17.43 $V(X) \geqslant 0$ *lorsque X admet une variance*

17.6 Ecart type

Dans cette section, X désigne une V.A.R. sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$, *qui admet une variance.*

écart type

L'écart type est la racine carrée de la variance

Définition 17.44 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

transformation affine

Propriété 17.45 $\sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda|\sigma(X) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

positivité

Propriété 17.46 $\sigma(X) \geqslant 0$

V.A.R. réduite

Définition 17.47 X est réduite $\iff \left| \begin{array}{l} V(X) = 1 \\ \sigma(X) = 1 \end{array} \right.$

Méthode 17.48 (Pour réduire une V.A.R. X d'écart type $\sigma \neq 0$) Diviser par σ pour obtenir une V.A.R réduite $Y = \frac{X}{\sigma}$

Propriété 17.49 Soit X une V.A.R. admettant une espérance μ et un écrat type $\sigma > 0$. Alors, on définit une V.A.R centrée et réduite X^* en posant

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \iff X = \mu + \sigma X*$$

17.7 Approximations

Séquence 34, 35 et 36 ?

17.7.1 Théorèmes fondamentaux

programme

- Inégalité de Markov pour les variables aléatoires discrètes.*Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$:*

$$P(X \leqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes. *Pour toute variable X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Inégalité de Markov

Théorème 17.50 Soit X une V.A.R. positive presque sûrement *admettant une espérance*. Alors,

$$P\big(X \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{E(X)}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 17.51 Soit X une V.A.R. *admettant une variance.* Alors,

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \qquad (\varepsilon > 0)$$

17.7.2 Convergence en probabilité

programme

- Convergence en probabilité : si (X_n) et X sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$, (X_n) converge en probabilité vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$, $limP\big([|Xn - X| > \varepsilon]\big) = 0.$*Notation* $X_n \xrightarrow{P} X$
- Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale. *Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telleque $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $(\frac{X_n}{n})$ converge en probabilité vers p*
  La loi faible des grands nombres permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

Convergence en probabilité

Dans cette section, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$

Définition 17.52

$$X_n \xrightarrow{P} X \Longleftrightarrow \lim P_{n\to+\infty}\big(|Xn - X| > \varepsilon\big) = 0 \qquad (\varepsilon > 0)$$

loi faible des grands nombres loi binomiale)

Théorème 17.53

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \quad (n \in \mathbb{N}) \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

17.7.3 Convergence en loi

programme

- Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires vers X. *Notation* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
- Cas où les X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Si (np_n) tend vers un réel strictement positif λ, convergence d'une suite de variables aléatoiressuivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p_n)$ vers une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
- Théorème limite central pour la loi binomiale et pour la loi de Poisson.*Si* (X_n) *est une suite de variables aléatoires telle que* $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ *(respectivement* $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$*), alors la suite de variables aléatoires centrées réduites* (X_n^*) *converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Théorème admis.*

Dans cette section, $p \in [0,1]$, $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X et Y sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$

Convergence en loi

Définition 17.54 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ $(F$ continue en $x)$

Théorème limite central

Théorème 17.55 $\left.\begin{array}{ll} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) & (n\in\mathbb{N}) \\ X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda) & (n\in\mathbb{N}) \end{array}\right| \implies X_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ avec Y de loi normale centrée, réduite

18 Lois usuelles Séquence 14

18.1 Lois discrètes finies

programme

<h2>Lois usuelles</h2>

- Variable aléatoire certaine.
- Loi de Bernoulli, espérance et variance. *Notation* $X \hookrightarrow B(p)$. *Variable indicatrice d'un événement. Notation* $1_{\mathbb{A}}$.
- Loi binomiale. *Notation* $X \hookrightarrow B(n,p)$.
  - Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$. *En lien avec le programme de terminale, le nombre* $\binom{n}{p}$ ** sera introduit comme le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.*
  - Formule du triangle de Pascal.
  - Formules $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$
  - Formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$. *Lorsque a et b sont strictement positifs, on pourra faire le lien avec la loi* $B(n, \frac{a}{a+b})$.
  - Espérance et variance d'une variable de loi binomiale.

- Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance. *Application, à l'étude de la loi uniforme sur* $\{a,\cdots,b\}$, *où* $(a,b) \in Z^2$. *Notation* $X \hookrightarrow U(\{a,\cdots,b\})$.
- *Lois discrètes usuelles à valeurs dans un ensemble définies sur l'espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{T},P)$. *On généralisera les lois* $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$ *et* $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ *vues lors du premier semestre.*

Dans cette section, X désigne une variable aléatoire réelle finie

18.1.1 Loi certaine

loi certaine

Définition 18.1 X suit une loi certaine, égale à $m \iff P(X=m)=1$

– Pour une telle V.A.R., on dit que X suit la loi certaine égale à m et aussi que $X=m$ presque sûrement.

Pour la suite de cette section, X désigne une variable aléatoire réelle certaine égale à $m \in \mathbb{R}$

Univers image

Propriété 18.2 $X(\Omega) = \{m\}$

densité fonction de répartition

Propriété 18.3 $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < m \\ 1 \text{ si } x \geqslant m \end{cases}$

espérance
variance
écart type

Propriété 18.4 $E(X) = m$

Propriété 18.5 $V(X) = 0$

18.1.2 Loi uniforme

loi uniforme

Une v.a. finie suit la loi uniforme lorsque tous ses événements élémentaires sont équiprobables.

Définition 18.6 $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \cdots, x_n\}) \iff P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$

– Le symbôle $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ est une abbréviation pour « X suit la loi uniforme sur l'ensemble E ».

Univers image

Propriété 18.7 $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$

Pour la suite de cette section, X désigne une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

densité
fonction de répartition

Propriété 18.8 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{k}{n} & \text{si } k \leqslant x < k+1 \\ 1 & \text{si } n \leqslant x \end{cases} \qquad (1 \leqslant k < n)$

espérance
variance

Propriété 18.9 $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

Propriété 18.10 $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

– L'espérance d'une va de loi uniforme est la moyenne des valeurs prises par la va.

18.1.3 Loi de Bernoulli

Dans cette section, $p \in [0,1]$ et $q = 1 - p$

i de Bernoulli

Définition 18.11 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \iff P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q$

– Le symbôle $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ est une abbréviation pour « X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ».

– Notant $q = 1 - p$, on a $q = P(X = 0)$.

– La loi de bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ est la loi uniforme sur $\{0,1\}$.

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi de Bernoulli de paramètre p.

Univers image

Propriété 18.12 $X(\Omega) = \{0,1\}$

densité fonction de répartition

Propriété 18.13 $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ q \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leqslant x \end{cases}$

espérance variance

Propriété 18.14 $E(X) = p$

Propriété 18.15 $V(X) = pq$

18.1.4 Loi binomiale

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $q = 1 - p$

loi binomiale

Définition 18.16 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \iff P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k \in [\![0,n]\!])$

– Le symbôle $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ est une abbréviation pour « X suit la loi binomiale de paramètres n et p ».

– La loi binomiale associée aux paramètres $n = 1$ et p est la loi de bernoulli de paramètre p.

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi binomiale de paramètres n et p.

Univers image

Propriété 18.17 $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$

espérance variance

Propriété 18.18 $E(X) = np$

Propriété 18.19 $V(X) = npq$

– La somme de n variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres n et p.

18.2 Lois discrètes infinies Séquence 25

programme

- Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance et variance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, *pour tout nombre entier naturel non nul* k,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

- Loi de Poisson : définition, espérance, variance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Dans cette section, $p \in]0,1]$, $q = 1 - p$, $\lambda > 0$ et X désigne une V.A.R.

18.2.1 Loi géométrique

loi géométrique

Définition 18.20 $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \iff P(X = k) = pq^{k-1} \qquad (k \geqslant 1)$

– Le symbôle $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ est une abbréviation pour « X suit la loi géométrique de paramètres p ».

– La loi géométrique modélise le rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli de paramètre p sans mémoire : la probabilité p(k) correspond à la probabilité d'obtenir k-1 échecs suivis d'un succès dans une succession de k épreuves de Bernoulli.

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi géométrique de paramètre p.

Univers image

Propriété 18.21 $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

espérance
variance

Propriété 18.22 $E(X) = \frac{1}{p}$

Propriété 18.23 $V(X) = \frac{q}{p^2}$

18.2.2 Loi de Poisson

loi de Poisson

Définition 18.24 $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \iff P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad (k \in \mathbb{N})$

– Le symbôle $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ est une abbréviation pour « X suit la loi de Poisson de paramètres λ ».

– La loi de Poisson est une loi qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne λ connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi de Poisson de paramètre λ.

Univers image

Propriété 18.25 $X(\Omega) = \mathbb{N}$

espérance
variance

Propriété 18.26 $E(X) = \lambda$

Propriété 18.27 $V(X) = \lambda$

18.3 Lois à densité

Séquence 30

programme

- Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$$

- Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

- Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ *de la loi normale centrée réduite.*

18.3.1 Loi uniforme (continue)

Dans cette section, les nombres réels a et b vérifient $a < b$ et X désigne une V.A.R. à densité.

densité
fonction de répartition

Définition 18.28 $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b] \iff f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété 18.29 $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b] \iff F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x < b \\ 1 & \text{si } b \leqslant x \end{cases}$

Propriété 18.30 $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b] \qquad (a < b)$

Pour la suite de cette section, X désigne une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[a,b]$.

Univers image

Propriété 18.31 $X(\Omega) = [a,b]$

espérance
variance

Propriété 18.32 $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$

Propriété 18.33 $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

18.3.2 Loi exponentielle

Dans cette section, $\lambda > 0$ et X désigne une V.A.R. à densité.

densité
fonction de
répartition

Définition 18.34 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété 18.35 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété 18.36 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \qquad (\lambda > 0)$

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi exponentielle de paramètres λ

Univers image

Propriété 18.37 $X(\Omega) = [0, +\infty[$

espérance
variance

Propriété 18.38 $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Propriété 18.39 $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Propriété 18.40 $P_{X>T}(X > T + t) = P(X > t) \qquad (T \geqslant 0, t \geqslant 0)$

Définition 18.41 Une V.A.R. suit une loi sans mémoire *ssi* $X \geqslant 0$ et
$P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y) \qquad (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$

Théorème 18.42 Une V.A.R. X suit une loi sans mémoire *ssi* $X = 0$ p.s. ou X suit une loi exponentielle

18.3.3 Loi normale

Dans cette section, μ et σ désignent des nombres réels et X désigne une V.A.R. à densité.

densité
fonction de répartition

Définition 18.43 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$

Définition 18.44 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

Propriété 18.45 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff F_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$

Propriété 18.46 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \qquad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi normale de paramètres μ et σ^2

Univers image

Propriété 18.47 $X(\Omega) = \mathbb{R}$

espérance
variance

Propriété 18.48 $E(X) = \mu$

Propriété 18.49 $V(X) = \sigma^2$

Table des matières

1 Avant propos 2

Bases théoriques **4**

2 Logique Séquence 2 5
2.1 Assertions et propositions logiques 5
2.2 Opérateurs 6
2.2.1 Affirmation 6
2.2.2 Négation 7
2.2.3 conjonction 7
2.2.4 Disjonction inclusive 8
2.2.5 Disjonction exclusive 8
2.2.6 Equivalence 9
2.2.7 Implication 9
2.3 Raisonnements classiques 10
2.3.1 Raisonnement par double implication 10
2.3.2 Raisonnement par contraposition 10
2.3.3 Raisonnement direct 10
2.3.4 Raisonnement par équivalences 11
2.3.5 Raisonnement par l'absurde 11
2.3.6 Raisonnement par récurence 11

3 Sommes, produits, récurrences Séquence 3 13
3.1 Sommes 13
3.1.1 Généralités 13
3.1.2 Identité fondamentale 15
3.1.3 Sommes de Bernouilli 16
3.1.4 Sommes multiples 16
3.2 Produits et factorielles 17
3.2.1 Généralités 17

4 Ensembles et applications Séquence 5 20
4.1 Ensembles 20
4.2 Fonctions et applications 23
4.2.1 Fonctions 24
4.2.2 Applications 24
4.2.3 Injections, surjections et bijections 26
4.3 Combinatoire Séquence 7 27
4.3.1 Cardinal 28
4.3.2 Opérations 29

Ensembles fondamentaux **31**

5 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels Séquence 4 32
5.1 Ordre réel 32

6 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes Séquence 19 34
6.1 Forme algébrique 34
6.1.1 Généralités 34
6.1.2 Parties réelles et imaginaires 35
6.1.3 Conjuguaison 36
6.2 Forme trigonométrique 36
6.2.1 Module 36
6.2.2 Argument 37
6.2.3 Exponentielle complexe 38
6.2.4 Forme trigonométrique 39
6.3 Trigonométrie 39
6.3.1 cosinus et sinus 39
6.3.2 tangente 40
6.3.3 arctangente 41

Analyse **42**

7 Suites Séquence 4 43
7.1 Généralités 43
7.2 Suites fondamentales Séquence 1 45
7.2.1 Suites arithmétiques 45
7.2.2 Suites géométriques 46
7.2.3 Suites arithmético-géométriques 46
7.2.4 Suites vérifiant une récurrence linéaire du second ordre 47
7.3 Suites bornées, minorées, majorées 48
7.4 Suites convergentes 49
7.5 Suites divergeant vers l'infini 51
7.6 Suites monotones 52
7.7 Suites négligeables Séquence 23 53
7.8 Suites équivalentes Séquence 23 54

8 Séries Séquence 23 et 24 57
8.1 Généralités 57
8.2 Séries à termes positifs 59
8.3 Séries de référence 59

9 Fonctions réelles (comportement local) 61
9.1 Limites Séquence 6 61
9.1.1 Limites finies 61
9.1.2 Généralisation du concept de limite 62
9.1.3 Opérations 63
9.1.4 Généralisations et opérations 65
9.2 Continuité en un point Séquence 6 66
9.2.1 Généralités 67
9.2.2 Opérations 67
9.3 Dérivée en un point Séquence 12 68
9.3.1 Généralitées 68
9.3.2 Opérations 69
9.4 Comparaison des fonctions Séquence 27 71
9.4.1 Fonctions négligeables 71
9.4.2 Fonctions équivalentes 72
9.5 Développements limités Séquence 23 et 33 74
9.5.1 Généralités 74
9.5.2 Opérations 75
9.5.3 Développements limités de référence 75
9.5.4 Formule de Taylor-Young 76

10 Fonctions réelles (comportement global) Séquence 11 78
10.1 Fonctions réciproques 78
10.2 Fonctions minorées, majorées et bornées 78
10.3 Fonctions monotones 78
10.4 Fonctions paires et impaires 80
10.4.1 Généralités 80
10.4.2 Opérations 81
10.5 Fonctions périodiques 81
10.5.1 Généralités 81
10.5.2 Opérations 82
10.6 Fonctions continues 83
10.6.1 Généralités 83
10.6.2 Théorèmes fondamentaux 84
10.6.3 Continuité par morceaux Séquence 17 86
10.7 Fonctions dérivées Séquence 12 87
10.7.1 Généralités 88
10.7.2 Opérations 88
10.7.3 Monotonie 89
10.7.4 Théorèmes fondamentaux 90
10.7.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ Séquence 27 90

10.7.6 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ Séquence 27 92
10.8 Étude globale des fonctions d'une variable 93
10.9 Recherche d'extrema Séquence 34, 35, et 36 94
10.10 Fonctions convexes Séquence 34, 35, et 36 94

11 Intégration 95
11.1 Primitives Séquence 17 95
11.2 Intégrales sur un segment Séquence 17 et 18 96
11.2.1 Intégrale des fonctions continues 96
11.2.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux 97
11.2.3 Propriétés 97
11.2.4 Sommes de Riemann 99
11.3 Intégrales sur un intervalle quelconque Séquence 28 99
11.3.1 Intégrale généralisée simple 99
11.3.2 Intégrales des fonctions positives 100
11.3.3 Intégrales généralisées réelles 100
11.3.4 théorème fondamentaux 101
11.3.5 Intégrales de référence 102

Algèbre **103**

12 Polynômes Séquence 20 104
12.1 Forme additive 104
12.1.1 Généralités 104
12.1.2 Opérations algébriques 105
12.1.3 Dérivation 106
12.1.4 Substitution 106
12.1.5 Degré 107
12.2 Forme multiplicative 108
12.2.1 Diviseurs 108
12.2.2 Racines et multiplicités 109
12.2.3 Décomposition en produit 110

13 Systèmes linéaires Séquence 9 112
13.1 Systèmes linéaires 112
13.2 Opérations élémentaires 113
13.3 Résolution 115

14 Matrices Séquence 13 117
14.1 Matrices 117
14.2 Opérations 119
14.2.1 Sommes 119
14.2.2 Multiples 119
14.2.3 Produits 119
14.2.4 Transposition 121
14.2.5 Inverse 122
14.2.6 Rang 122
14.3 Matrices carrées 124
14.3.1 † Trace 124
14.3.2 Matrices diagonales 125
14.3.3 Matrices triangulaires supérieures 125
14.3.4 Matrices symétriques 126
14.3.5 Matrices anti-symétriques 126
14.3.6 Matrices qui commuttent 127
14.4 Matrices et systèmes linéaires 127
14.5 Rang d'une matrice 128
14.5.1 Généralités 128

15 Espaces vectoriels Séquence 10 129
15.1 Espaces vectoriels 129
15.1.1 Loi interne 129
15.1.2 Loi externe 130
15.1.3 Espace vectoriel 131
15.2 Sous-espaces vectoriels 132
15.2.1 Généralités 132
15.2.2 Espaces vectoriels engendrés 133
15.2.3 Familles de vecteurs 134
15.3 Espaces vectoriels de dimension finie Séquence 21 et 22 135
15.3.1 Dimension 136
15.3.2 Bases canoniques et dimensions de référence 137
15.3.3 Rang d'une famille de vecteurs 138
15.4 Produits cartésiens, sommes et supplémentaires Séquence 20 et 21 139
15.4.1 Produit cartésien 139
15.4.2 Sommes et supplémentaires 140
15.5 Applications linéaires Séquence 16 *et 26* 141
15.5.1 Applications linéaires 141
15.5.2 Noyau et image 143
15.5.3 Homothétie, projections, symétries. 144
15.5.1 Rang 145

15.5.2 Matrices 147

Probabilités **151**

16 Espaces probabilisés Séquence 7 et 8 152
16.1 Expériences aléatoires 152
16.2 *Tribus* Séquence *24* 152
16.3 Espaces probabilisables 153
16.4 Espaces probabilisés 154
16.5 Limite monotone Séquence 24 156
16.6 Probabilités conditionnelles 156
16.7 Indépendance 159

17 Variables aléatoires réelles Séquence 14 160
17.1 Généralités 160
17.2 Espérance et variables aléatoires discretes Séquence 14 *et 25* 162
17.3 Espérance et variables aléatoires à densité Séquence 30 164
17.4 Espérance 165
17.5 Variance 167
17.6 Ecart type 168
17.7 Approximations Séquence 34, 35 et 36 ? 168
17.7.1 Théorèmes fondamentaux 168
17.7.2 Convergence en probabilité 169
17.7.3 Convergence en loi 169

18 Lois usuelles Séquence 14 171
18.1 Lois discrètes finies 171
18.1.1 Loi certaine 171
18.1.2 Loi uniforme 172
18.1.3 Loi de Bernoulli 172
18.1.4 Loi binomiale 173
18.2 Lois discrètes infinies Séquence 25 173
18.2.1 Loi géométrique 174
18.2.2 Loi de Poisson 174
18.3 Lois à densité Séquence 30 175
18.3.1 Loi uniforme (continue) 175
18.3.2 Loi exponentielle 176
18.3.3 Loi normale 177