(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et en déduire que la série de terme général u_n est convergente. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.

(d) Montrer finalement l'équivalent : $u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-L}}{2^n}$

Exercice 4 (Extrait EML 2009, voie E)**.** Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$et $p + q = 1$.

Partie 1. Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(1) Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.

(2) En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie 2. Tirages avec arrêt dès qu'une deuxième boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une deuxième boule noire.

On note S la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(1) Loi de S.

(a) Donner $S(\Omega)$, c'est à dire l'ensemble des valeurs pouvant être prises par S.

(b) Calculer $\mathrm{P}(S = 2)$ et $\mathrm{P}(S = 3)$.

(c) Pour tout $k \geq 3$, déterminer $\mathrm{P}(S = k)$.

(2) Montrer que S admet une espérance et la calculer.

(3) Montrer que S admet une variance et la calculer.

Partie 3. Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i, on note :

B_i l'événement « la i-ème boule tirée est blanche »,

N_i l'événement « la i-ème boule tirée est noire. »

(1) **(a)** Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$.

(b) Vérifier, par le calcul, que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$

(c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

(2) **(a)** Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1))$ (*on distinguera les cas* $k = 2$ *et* $k \geq 3$).

(b) En déduire que $\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

(3) Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

(4) Donner la loi de Z et son espérance.

(5) Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X - 1$ sont égales.

Partie 4. Etude du nombre de boules noires après le premier succès lors d'une deuxième série de tirages.

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir la première boule noire. On note T le nombre de tirages nécessaires. On effectue ensuite autant de tirages avec remise et on note V le nombre de boules noires obtenues lors de cette dernière série de tirages.

Ainsi, si la première boule noire apparaît lors du quatrième tirage, on effectue quatre autres tirages avec remise et on compte le nombre de boules noires obtenues lors de ces quatre derniers tirages.

(1) Déterminer $V(\Omega)$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, exprimer simplement la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$

(3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_{[T=k]}(V=n)$ (on distinguera les cas $0 \leq n \leq k$ et $n > k$.)

(4) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales, la probabilité $P(V=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.