Exercice 2 :

Partie I : Fonction génératrice

Etant donné une variable aléatoire discrète finie X telle que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, on appelle fonction génératrice de X la fonction polynôme G_X définie par : $\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,.\,t^k$

1) On suppose dans cette question seulement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\,[\![1,n]\!]\,)$.
   a) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $G_X'(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,t^{k-1}$. En déduire $G_X{}'(1)$
   b) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X''(t)$. En déduire que $G_X''(1) = \dfrac{n^2-1}{3}$

2) On revient au cas d'une variable X quelconque avec $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.
   a) Calculer $G_X(1)$
   b) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X'(t)$. En déduire que $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$
   c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X''(t)$
   Donner une variable aléatoire Y, à exprimer en fonction la variable X, telle que $\mathbb{E}(Y) = G_X''(1)$
   d) En déduire que $V(X) = G_X'(1)\Big[1 - G_X'(1)\Big] + G_X''(1)$

3) On suppose dans cette question seulement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\,[\![1,n]\!]\,)$.
   A l'aide de ce qui précède, retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$ données en cours.

4) On suppose dans cette question seulement que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
   a) Montrer que G_X est donnée par : $\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\quad G_X(t) = (\,\alpha\, t + \beta\,)^n$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ à préciser.
   b) En déduire $G_X'(t)$ et $G_X''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
   c) A l'aide des formules établies au 1) calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ (retrouvant ainsi des résultats connus)

Partie II : Loi hypergéométrique

Dans cette partie, on considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches (avec $2 \leq b \leq n$)
On suppose que ces boules sont numérotées (de 1 à n pour les noires et de $n+1$ à $n+b$ pour les blanches)
On tire successivement sans remise r boules (avec r entier tel que $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq r \leq b$)
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des r tirages.

1) Préciser $X(\Omega)$ (justifier votre réponse)

2) a) Pour $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $1 \leq k \leq \ell$, on pose $A(k,\ell) = \ell\,(\ell-1)\,(\ell-2) \times ... \times (\ell-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(\ell - j)$
   Montrer que $A(k,\ell) = k!\,\binom{c}{k}$ avec c entier à préciser en fonction de ℓ et de k.
   b) Justifier que $\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{A(r,n)}{A(r,n+b)}$ puis écrire $\mathbb{P}(X=0)$ comme quotient de deux coefficients binomiaux

3) Soit $k \in X(\Omega)$
   a) Montrer que $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{r}{k}\,A(i,b)\,A(j,n)}{A(r,n+b)}$ avec i,j entiers à préciser en fonction de k , b et n
   b) En déduire que $\forall\, k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\dbinom{b}{k}\dbinom{n}{x}}{\dbinom{y}{r}}$ avec x,y entiers à préciser en fonction de k , b et n
   On dit que X suit une loi hypergéométrique et on note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n+b,r,p)$ (où $p = \frac{b}{n+b}$)

Exo III.

4) En utilisant la loi hypergéométrique, démontrer la formule de Van der Monde :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{b}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+b}{r}$$

(Cette formule pourra être librement utilisée dans la suite de l'exercice)

5) Dans cette question, on désigne par G_X la fonction génératrice de X.

a) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\, G'_X(t) = \dfrac{b}{\binom{n+b}{r}} \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \binom{b-1}{i}\binom{n}{\alpha} t^i$ avec α entier à préciser en fonction de r, b et i.

b) A l'aide des résultats établis dans la partie I, montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{b\, r}{n+b}$

6) En s'inspirant de ce qui précède, montrer que $G''_X(1) = \dfrac{b\,(b-1)\, r\,(r-1)}{d\,(d-1)}$

(avec d entier à préciser en fonction de r , b et i)

7) On considère le polynôme $P(X) = (b-1)(r-1)(X+b) + (X+b-1)(X+b-rb)$

a) Calculer $P(0)$ et $P(r-b)$

b) En déduire l'écriture factorisée de $P(X)$

8) A l'aide de ce qui précède, montrer que $V(X) = \dfrac{n\, r\, b\,(n+b-r)}{(n+b)^2\,(n+b-1)}$

(On pourra écrire $V(X)$ sous forme d'un quotient puis faire apparaitre $P(n)$ au numérateur)

Partie III : Applications

Dans cette partie, on considère encore une urne contenant n boules noires et b boules blanches (avec n et b deux entiers ≥ 2) On suppose que ces boules sont numérotées (de 1 à n pour les noires et de $n+1$ à $n+b$ pour les blanches) On tire désormais successivement sans remise b boules

Pour tout entier $i \in [\![1, b]\!]$, on pose $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si au } i^{ieme} \text{ tirage on obtient une blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

De plus, pour tout $i \in [\![1, b]\!]$, on définit $S_i = Y_1 + Y_2 + ... + Y_i$

1) Donner la loi de Y_1. Préciser son espérance et sa variance.

2) A l'aide du s.c.e. $\{\, (Y_1 = 0)(Y_1 = 1)\, \}$ montrer que $\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \dfrac{b}{n+b}$. En déduire la loi de Y_2 et $\mathbb{E}(Y_2)$

3) Soit i entier fixé de $[\![1, b]\!]$. En donnant une interprétation de S_i, justifier, à l'aide de ce qui précède, que :

$$\forall\, k \in [\![0, i]\!]\ ,\ \mathbb{P}(S_i = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{n}{i-k}}{\binom{b+n}{i}}$$

4) Soit $i \in [\![2, b]\!]$

a) Pour $k \in [\![0, i-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{(S_{i-1}=k)}(Y_i = 1)$

b) En déduire que $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \dfrac{b}{(n+b-i+1)\binom{n+b}{i-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{i-1-k}\binom{b-1}{k}$

c) A l'aide de la formule de Van der Monde, montrer que $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \dfrac{b}{n+b}$

5) On désigne par Y le nombre de blanches obtenues au cours des b tirages.

a) Exprimer Y à l'aide des $(Y_i)_{1\leq i\leq b}$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$

b) En justifiant quer Y suit une loi dont on connait l'espérance, retrouver $\mathbb{E}(Y)$ puis donner $V(Y)$