

1. Il y a autant de mots de passe que de 8-listes d'éléments de l'ensemble E constitué des 26 minuscules, 10 chiffres et 6 signes de ponctuation. Il y en a

$$(26 + 10 + 6)^8 = 42^8$$

2. Pour constituer un tel mot de passe, on commence par constituer une 5-liste avec les minuscules (il y en a 26^5) que l'on complète avec une 3 liste sans répétition des 10 chiffres (il y en a A_{10}^3). Au total, il y a $26^5 \times A_{10}^3$ mots de passe.
3. L'ensemble de ces mots de passe est constitué de tous les mots de passe (42^8), privé des mots de passe ne comportant ni chiffre, ni signe de ponctuation (26^8). Au total, il y en a $42^8 - 26^8$.
4. L'ensemble de ces mots de passe est constitué de tous les mots de passe (42^8), privé des mots de passe sans signe de ponctuation (il y en a $(26 + 10)^8 = 36^8$) et des mots de passe comportant exactement un signe de ponctuation (on choisit le signe de ponctuation, sa position, et on complète les 7 cases qui restent avec des minuscules ou des chiffres : il y en a $\binom{6}{1} \times \binom{8}{1} \times 36^7$). Au total, il y en a

$$42^8 - 36^8 - \binom{6}{1} \binom{8}{1} 36^7$$

5. Pour constituer un mot de passe avec exactement trois chiffres et un signe de ponctuation,
 1. On choisit 3 positions pour les trois chiffres ($\binom{8}{3}$ possibilités)
 2. On choisit les chiffres pour ces trois positions (10^3 possibilités)
 3. On choisit la position du signe de ponctuation ($\binom{5}{1}$ possibilités)
 4. On choisit le signe de ponctuation ($\binom{6}{1}$ possibilités)
 5. On complète les quatre cases restantes avec des minuscules (26^4 possibilités)
 Au total, il y en a

$$\binom{8}{3} \times 10^3 \times \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times 26^4$$

6. Pour constituer un tel mot de passe, on choisit huit chiffres distincts ($\binom{10}{8}$), puis on les dispose dans l'ordre croissant. Au total, il y en a $\binom{10}{8} = 40$
spéciale dédicace : K., tu peux les écrire tous, si tu le souhaites, je valide

Exo C. A. 1. Comme les tirages de boules sont indépendants et comme les boules ont les mêmes probabilités d'être tirées, on utilise la probabilité uniforme pour calculer nos probabilités conditionnelles. En particulier, on a

$$\begin{aligned} P_{U_1}(R_k) &= \frac{2}{5} \\ P_{U_2}(R_k) &= \frac{1}{1} = 1 \\ P_{U_3}(R_k) &= \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Il résulte alors de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (non négligeables) $\{U_1, U_2, U_3\}$ que

$$\begin{aligned} P(R_k) &= P(U_1) \times P_{U_1}(R_k) + P(U_2) \times P_{U_2}(R_k) + P(U_3) \times P_{U_3}(R_k) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{2+5}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

2. a. D'après l'indépendance des tirages des boules (une fois l'urne choisie),

$$P_{U_1}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = P_{U_1}(R_1) \times \cdots \times P_{U_1}(R_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

- b. De même, on a

$$\begin{aligned} P_{U_2}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P_{U_2}(R_1) \times \cdots \times P_{U_2}(R_n) = 1^n = 1 \\ P_{U_3}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P_{U_3}(R_1) \times \cdots \times P_{U_3}(R_n) = 0^n = 0 \end{aligned}$$

- c. Les résultats précédents et la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (non négligeables) $\{U_1, U_2, U_3\}$ induisent que

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P(U_1) \times P_{U_1}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) + P(U_2) \times P_{U_2}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \\ &\quad + P(U_3) \times P_{U_3}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. D'après les résultats des questions 2a et 2c, nous avons

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4+25}{3 \times 5^2} = \frac{29}{3 \times 5^2} \\ P(R_1)P(R_2) &= \left(\frac{7}{15}\right)^2 = \frac{49}{3^2 \times 5^2} \end{aligned}$$

Comme $P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1)P(R_2)$, les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants pour la probabilité P .

- B. 1. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Alors, il résulte du résultat de la question 2a et de la définition des probabilités conditionnelles que

$$P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{P(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap R_k)}{P(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1})} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1}$$

2. a. Nous déduisons du résultat de la question A1a que

$$P(A_1) = P(\overline{R_1}) = 1 - P(R_1) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

- b. Pour ≥ 2 , nous remarquons que $A_k = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$. En particulier, nous déduisons de la formule des probabilités composées (vu qu'il n'y a pas d'indépendance entre les R_i) que

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_1 \cap R_2) \times \cdots \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(\overline{R_k}) \\ &= \frac{7}{15} \times \left(\prod_{\ell=2}^{k-1} P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{\ell-1}}(R_\ell) \right) \times (1 - P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k)) \\ &= \frac{7}{15} \times \prod_{\ell=2}^{k-1} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^\ell + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\ell-1} + 1} \times \left(1 - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1} \right) \quad (\text{produits telescopiques}) \\ &= \frac{7}{15} \times \left(\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 1} - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 1} \right) \\ &= \frac{7}{15} \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} - \left(\frac{2}{5}\right)^k}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{15} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^k \end{aligned}$$

- c. On remarque que $\overline{A} = \cup_{k=1}^n A_k$ de sorte que l'on déduit de la formule des sommes géométriques de raison différente de 1 que

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\cup_{k=1}^n A_k) = 1 - \sum_{k=1}^n P(A_k) && \text{(événements mutuellement incompatibles)} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^k && \text{(Somme géométrique de raison } \neq 1) \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = 1 - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Exo D. 1. a. Réaliser un tableau de variation de g aide beaucoup pour la suite

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables. De plus, on a

$$g'(x) = e^x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

En particulier, il résulte de la croissance stricte de la fonction exponentielle et de l'égalité $e^0 = 1$ que

$$g'(x) > 0 \iff x > 0 \quad g'(x) = 0 \iff x = 0 \quad g'(x) < 0 \iff x < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $] - \infty, 0[$ (sur $] - \infty, 0[$ d'après la propriété 10.76 du cours) et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (idem sur $[0, +\infty[$).

- b. La fonction g est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc est une bijection $\tilde{g}$ de $[0, +\infty[$ dans $g([0, +\infty[) = [1, +\infty[$ (il résulte en effet du théorème de croissance comparée que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. En particulier, il existe une unique solution strictement positive β_n de l'équation $g(x) = n$ (car $g(0) = 1 < n$), il s'agit de $\beta_n = \tilde{g}^{-1}(n)$.

De même, il existe une unique solution α_n strictement négative à l'équation $g(x) = n$ (pour les mêmes raisons, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$).

2. a. Pour $n \geq 2$, nous déduisons l'inégalité $g(n) \geq 1$ de la croissance de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et de $g(0) = e^0 - 0 = 1$. De plus, nous remarquons que

$$g(\ln n) = e^{\ln n} - \ln(n) = n - \underbrace{\ln(n)}_{\geq 0} \leq n.$$

- b. Pour $n \geq 2$, nous remarquons que

$$g(\ln(2n)) = e^{\ln(2n)} - \ln(2n) = 2n - \ln(2) - \ln(n) = n + (n - \ln(n)) - \ln(2) = n + g(\ln(n)) - \ln(2).$$

Comme $g(\ln(n)) \geq 1 \geq \ln(2)$ (car il est bien connu que $2 < e$ et donc que $\ln(2) < \ln(e) = 1$), nous en déduisons que

$$g(\ln(2n)) = n + \underbrace{g(\ln(2n)) - \ln(2)}_{\geq 0} \geq n$$

- c. Pour $n \geq 2$, nous avons $g(\ln(n)) \leq n = g(\beta_n) \leq g(\ln(2n))$, d'après les résultats précédents. La fonction g étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, nous avons alors nécessairement

$$\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n) \quad (n \geq 2).$$

- Comme $u_0 = \alpha > 0$, la propriété P_0 est vraie
- Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{définition}} \frac{3}{2} u_n^2 \underbrace{> 0}_{\mathcal{P}_n}$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

En conclusion, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

2. *Stratégie : pour prouver que la suite est arithmético géométrique, il semble logique de calculer v_{n+1} et de chercher à l'exprimer sous la forme $av_n + b$*

Par définition de la suite v et de la suite u , nous avons

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln \left(\frac{3}{2} u_n^2 \right) = \ln \frac{3}{2} + 2 \ln u_n = \ln 3 - \ln 2 + 2v_n$$

A fortiori, v_n est arithmético-géométrique (avec $a = 2$ et $b = \ln 3 - \ln 2$).

3. Cherchons d'abord l'unique suite constante c vérifiant $c = ac + b$, c'est à dire

$$c = \ln 3 - \ln 2 + 2c \iff c = \ln 2 - \ln 3$$

En procédant à une soustraction, avec la relation $v_{n+1} = av_n + b$, il vient

$$v_{n+1} - c = 2(v_n - c)$$

En particulier la suite $v_n - c$ est géométrique de raison 2, de sorte que

$$v_n - c = (v_0 - c) \times 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Comme $v_0 = \ln \alpha$, nous obtenons alors que $v_n = \ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n$

4. Comme $u_n = e^{v_n}$, il suit

$$u_n = e^{\ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n} = e^{\ln 2} e^{-\ln 3} e^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n} = \frac{2}{3} e^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n}$$

5. La suite u converge ssi $\alpha - \ln 2 + \ln 3 \leq 0$. Plus précisément,
 - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 < 0$, v_n diverge vers $-\infty$ et u_n converge vers 0 par composition avec l'exponentielle
 - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 = 0$, v_n et u_n sont des suites constantes (et donc convergentes), égales respectivement à $\ln 2 - \ln 3$ et $\frac{2}{3}$
 - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 > 0$, v_n diverge vers $+\infty$ et u_n diverge vers $+\infty$ par composition avec l'exponentielle

Exo IV. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sa dérivée, qui vaut

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{(x+2)^2} = 3x \frac{x+4}{(x+2)^2},$$

est du signe de $x(x+4)$. Par ailleurs, un calcul rapide montre que $f \xrightarrow{-\infty} -\infty$, $f \xrightarrow{-2^-} -\infty$, $f \xrightarrow{-2^+} +\infty$ et $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$. En particulier, la tableau de variation de la fonction f est

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		12		$+\infty$		$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$		$-\infty$		0	

- Il résulte du tableau de variation (et du théorème des valeurs intermédiaires) que l'équation $f(x) = 1$ a deux antécédents : l'un dans $] - 2, 0[$ et l'autre dans $] 0, +\infty[$. A fortiori, f n'est pas injective sur $] - 2, +\infty[$.
- De même, il résulte du tableau de variation que $f(] - 2, +\infty[) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$. A fortiori, f n'est pas une surjection de $] - 2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Etant donné $y \in \mathbb{R}^+$, nous remarquons d'une part que $y - \sqrt{24y + y^2} < 0$ et d'autre part qu'un nombre positif x satisfait

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\iff y = \frac{3x^2}{x+2} \iff 3x^2 = y(x+2) \iff x^2 - \frac{y}{3}x - \frac{2y}{3} = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{y}{6}\right)^2 x - \frac{24y+y^2}{6^2} = 0 \iff \left(x - \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) \left(x - \frac{y-\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) = 0 \\
 &\iff x = \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \geq 0
 \end{aligned}$$

En particulier, l'équation $y = g(x)$ admet une unique solution $x \geq 0$ de sorte que g est une bijection. De plus, sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned}
 g^{-1} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 y &\mapsto \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}
 \end{aligned}$$

- D'après le tableau de variation de f , la fonction g est strictement croissante (et donc injective) et satisfait $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. A fortiori, g est bijective.

Exo V. 1. *Conseil : traiter cette question en dressant un tableau de variation de f et de g*

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, les fonctions polynômes $x \mapsto -x + \frac{x^2}{2}$, $x \mapsto 1 + x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables. Comme $1 + x > 0$ et comme le logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est également dérivable sur $[0, +\infty[$. A fortiori, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, +\infty[$ en tant que sommes de fonctions dérivables. De plus

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0 \\
 g'(x) &= x + f'(x) = \frac{x(1+x)-x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (x \geq 0)
 \end{aligned}$$

A fortiori, f et g sont respectivement décroissantes et croissantes sur $[0, +\infty[$.

- Comme $f(0) = 0$ et comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) \leq 0$ ($x \geq 0$), c'est-à-dire

$$\ln(1+x) \leq x \quad (x \geq 0)$$

De même, comme $g(0) = 0$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $g(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) et donc

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 0)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > 0$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1 = \frac{3}{2} > 0$
- Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$u_{n+1} \underbrace{\geq}_{\text{définition}} u_n \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{>0} \underbrace{>}_{\mathcal{P}_n} 0$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

4. *Soupir... encore une démonstration par récurrence = des points donnés gratuitement (enfin, pour ceux qui ont pris la peine de comprendre et de maîtriser le concept facile de démonstration par récurrence. Pour info, il y a souvent des questions qui se traitent par récurrence en ds/concours)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : \ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $\ln u_1 = \ln \left(\frac{3}{2}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^1 \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
- Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.
Comme $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, on a

$$\begin{aligned} \ln u_{n+1} &\underbrace{=}_{\text{définition}} \ln \left(u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \ln u_n + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\underbrace{=}_{\mathcal{P}_n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

5. D'après l'inégalité établie à la question 2 pour $k \in \mathbb{N}$ et $x = \frac{1}{2^k}$, nous avons

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 0)$$

Soit $n \geq 1$. En sommant la relation précédente pour $0 \leq k \leq n$, il vient

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right) \leq \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}_{S_n} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}}_{T_n} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\ln u_n} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}_{S_n}$$

6. S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$, de sorte que

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 1)$$

De même T_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4} \neq 1$, de sorte que

$$T_n = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \quad (n \geq 1)$$

Il résulte de ces deux formules que S_n converge vers 1 et que T_n converge vers $\frac{1}{3}$

7. a. Nous avons précédemment montré que $u_n > 0$ pour $n \geq 1$. Comme

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) > u_n \times 1 = u_n,$$

nous concluons que la suite u est strictement croissante

- b. La suite S_n est majorée car elle converge. Comme $\ln u_n \leq S_n$, la suite $\ln u_n$ est majorée et nous en déduisons qu'il en est de même pour la suite u_n par composition avec la fonction exponentielle, qui est croissante. Comme la suite u est strictement croissante, elle est alors forcément convergente.
- c. Comme $\lim S_n = 1$, $\lim T_n = \frac{1}{3}$ et $\lim u_n = \ell$, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, nous déduisons de $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$ que

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq \ln \ell \leq 1$$

En composant avec l'exponentielle, il vient alors $e^{5/6} \leq \ell \leq e$.