Corrigé Maths EML 2014 ECS

Problème 1.

Partie I. ***Propriétés générales de T***

1. Soit f élément de E. f étant continue que $\mathbb{R}$, elle admet une (infinité de) primitive(s) F vérifiant $F' = f$ sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)).$$

$T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$, elle-même continue sur $\mathbb{R}$. Bref

$$\boxed{T(f) \in E_1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, T(f)'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).}$$

2.
- Pour tout f de E, $T(f) \in E_1$ et $E_1 \subset E$ donc $T(f) \in E$.
- Pour tout $(f, g, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} (\lambda f + g)(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \lambda f(x) + g(x)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(x)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} g(x)\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + T(g)(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{T est un endomorphisme de E.}}$$

3. $|.| \in E$ car $|.|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais $|.| \notin \mathrm{ImT}$ car $\mathrm{ImT} \subset E_1$ et $|.| \notin E_1$ puisque $|.|$ n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\text{T n'est pas surjective.}}$$

4. Effectuons le changement de variable $u = -t$, de classe $\mathcal{C}^1$, dans l'intégrale non impropre définissant $T(f)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(-x) &= \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-u)\mathrm{d}u \\ &= \begin{cases} T(f)(x) & \text{si f est paire} \\ -T(f)(x) & \text{si f est impaire} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{T(f) \text{ possède la même parité que } f.}$$

5.
- Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, $R^+ : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est le reste d'une intégrale convergente. En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R^+(x) = 0$.

  Dès lors, $T(f)(x) = \dfrac{1}{2}(R^+(x+1) - R^+(x-1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Et de même, $R^- : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ définit le reste d'une intégrale, avec

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} R^-(x) = 0$.

Dès lors, $T(f)(x) = \dfrac{1}{2}(R^-(x+1) - R^-(x-1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{\text{Si } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge, alors } T(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ et } T(f)(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0}$$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$T(s)(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{\cos(x-\pi) - \cos(x+\pi)}{2\pi} = 0,$$

par 2π-périodicité de cos. Par conséquent, $s \in \mathrm{KerT}$, et comme $s \neq 0$,

$$\boxed{\mathrm{KerT} \neq \{0\} \text{ et T n'est pas injective.}}$$

Remarque : comme E *n'est pas de dimension finie, la non surjectivité de* T *ne permet pas directement de conclure à sa non-injectivité.*

Partie II. ***Premier exemple***

7. Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{T}(f_a)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{a(x+1)} - \mathrm{e}^{a(x-1)}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{2a}\left(\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}\right) & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

8. Et il s'ensuit

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}(f_a) = \varphi(a) f(a).}$$

9. • φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car quotient à dénominateur ne s'annulant pas de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

De plus $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a} = \mathrm{e}^a(1 - \mathrm{e}^{-2a}) \underset{a\to 0}{\sim} 1 \times 2a \underset{a\to+\infty}{\sim} 2a$ donc $\lim\limits_{a\to 0} \varphi(a) = 1 = \varphi(0)$, donc φ est continue en 0.

Enfin, pour tout a non nul,

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a - 0} = \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a} - 2a}{2a^2} = \frac{1 + a + a^2/2 + o(a^2) - (1 - a + a^2/2 + o(a^2)) - 2a}{2a^2}$$

$$= o(1) \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

Donc φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 0$.

Cette valeur n'est pas surprenante puisque φ est paire. D'autre part, on pouvait calculer la limite de φ' en 0 et utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Toujours pour $a \neq 0$,

$$\varphi'(a) = \frac{2a(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}) - 2(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})}{4a^2} = \frac{\mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^2}$$

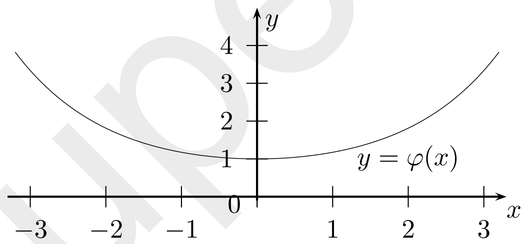
$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } \varphi'(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1)}{2a^2} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}}$$

• Une étude rapide de la fonction dérivable $g : a \mapsto \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1)$ sur $\mathbb{R}$ donne $g'(a) = a(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})$, positif et ne s'annulant qu'en $a = 0$, donc g est strictement négative sur $]-\infty\,; 0[$ et strictement positive sur $]0\,; +\infty[$

$$\boxed{\mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1) \text{ est du signe (strict) de } a.}$$

• Comme φ' est du signe de g,

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\,; 0] \text{ et strictement croissante sur } [0\,; +\infty[.}$$



10. Soit $\lambda \in [1\,; +\infty[$. Comme φ est continue strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$, φ réalise une bijection de $[0\,; +\infty[$ sur $\varphi([0\,; +\infty[) = [\varphi(0)\,; \lim_{+\infty}\varphi[= [1\,; +\infty[$. Ainsi il existe $a \in [0\,; +\infty[$ tel que $\lambda = \varphi(a)$.

On a alors : $\mathrm{T}(f_a) = \varphi(a) f_a = \lambda f_a$. Donc $f = f_a$, qui est non nulle, convient.

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in [1\,; +\infty[, \text{ il existe } f \in \mathrm{E} \setminus \{0\} \text{ telle que } \mathrm{T}(f) = \lambda f.}$$

Ce qui montre que tout réel au moins égal à 1 est une valeur propre de T.

Partie III. ***Deuxième exemple***

11. • h est continue et paire sur $\mathbb{R}$ car inverse d'une fonction continue et paire ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, donc $h \in \mathrm{E}$.

• Par 4., $\mathrm{T}(h)$ est paire : il suffit de calculer $\mathrm{T}(h)(x)$ pour $x \geqslant 0$.

• Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\mathrm{T}(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} \frac{1}{-t+1}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+1} \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\ln(2+x) + \ln(2-x)\right) = \frac{\ln(4-x^2)}{2}$$

- Pour $1 < x$:
$\mathrm{T}(h)(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} \dfrac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\ln(2+x) - \ln(x)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+2}{x}$.

$$\boxed{\mathrm{T}(h) \text{ est paire avec } \mathrm{T}(h)(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(4-x^2)}{2} & \text{si } x \in [\,0\,;\,1\,] \\ \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+2) - \ln(x)\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

12. La question 1. donne directement

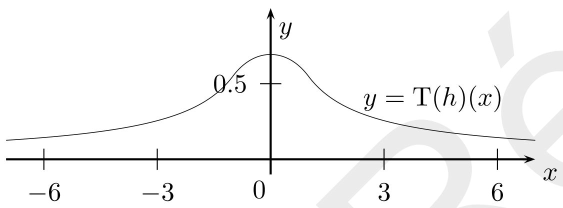
$$(\mathrm{T}(h))'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{-x+2}\right) \leqslant 0 & \text{si } x \in [\,0\,;\,1\,] \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}\right) < 0 & \text{si } x \in [\,1\,;\,+\infty\,[\end{cases},$$

cette dérivée ne s'annulant que si $x = 0$.
Par parité,

$$\boxed{\mathrm{T}(h) \text{ est strictement croissante sur }]\,-\infty\,;\,0\,] \text{ et strictement décroissante sur }]\,0\,;\,+\infty\,].}$$

Et on peut préciser

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la tangente en 0 (resp. en 1) de la courbe de } \mathrm{T}(h) \text{ a pour équation} \\ y = \ln 2 \text{ (resp. } y = -\dfrac{1}{3}(x-1) + \ln 3)\end{array}}$$



13. Avec la fonction h, nous avons d'une part, pour $|x| \geqslant 1$,
$\mathrm{T}(h)(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+2/\,|x|) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{|x|}$, ce qui prouve que $\mathrm{T}(h)(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, et d'autre part comme $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ diverge par la règle des équivalents pour les fonctions positives, puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

$$\boxed{\text{La réciproque du résultat obtenu à la question 5 est fausse.}}$$

Partie IV. ***Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables***

14. • Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ et $(x,y) \mapsto xy$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,1\,;\,+\infty\,[^2$ à valeurs dans $]\,1\,;\,+\infty\,[$, les théorèmes algébriques usuels assurent que

$$\boxed{\mathrm{H} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]\,1\,;\,+\infty\,[^2.}$$

- $\forall (x,y) \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[^2$,

$$\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(x,y) = \mathrm{F}'(x) - 2y\mathrm{F}'(xy) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2y}{xy+2} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2y}{xy+2}.}$$

$$\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}(x,y) = \mathrm{F}'(y) - 2x\mathrm{F}'(xy) = \dfrac{1}{y+2} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{2x}{xy+2} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{y+2} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2x}{xy+2}.}$$

15. *Vu la grande symétrie de x et y dans la définition de H, on peut s'attendre à ce que, si point critique il y a, il vérifie $x = y$...*
Analyse.
Supposons que $(x,y) \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[$ est un point critique de F.

$$\bigtriangledown f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2y}{xy+2} \\ \dfrac{1}{y+2} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{xy+2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{2+x} = \dfrac{y+1}{2+y} \Rightarrow 2x = x + y$$

$\Rightarrow x = y$ (le lecteur est prié de détailler les menus raccourcis calculatoires...)
Avec $x = y$, $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(x,x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2+x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{2+x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$ (le lecteur ...)
La seule solution à cette ultime équation dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$ est $x = 1+\sqrt{3}$.
Réciproquement.
$\bigtriangledown f(x,y) = \bigtriangledown f(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) = (0,0)$.

$$\boxed{\text{H admet un unique point critique, c'est } (x_0,y_0) = (1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}).}$$

16. Avec les données fournies, $(rt - s^2)(x_0,y_0) \simeq -1,9 \times 10^{-3} < 0$ donc H n'admet pas d'extremum local en (x_0,y_0). Comme ce point est l'unique point critique de H,

$$\boxed{\text{H n'admet aucun extremum local sur }]\,1\,;\,+\infty\,[^2.}$$

Les courageux pourront vérifier que $(rt - s^2)(x_0,y_0) = \dfrac{45 - 26\sqrt{3}}{18} < 0$, *puisque* $45^2 = 2025 < 2028 = 26^2 \times 3$.

Partie V. *Transformée d'une densité*

17. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme on connaît mieux $\mathrm{T}(f)'$ que $\mathrm{T}(f)$, une intégration par parties s'impose

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{T}(f)(x)\mathrm{d}x = [\mathrm{T}(f)(x)x]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (f(x+1) - f(x-1))x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{B}\int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{A}\int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{A}+1} f(x)\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. - \int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}+1} f(u)(u-1)\mathrm{d}u + \int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{B}-1} f(v)(v+1)\mathrm{d}v\right),$$

après deux changements de variables $\mathcal{C}^1$ $u = x+1$ et $v = x-1$.
On partage ensuite les deux dernières intégrales :

$$\int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}+1} f(u)(u-1)\mathrm{d}u = \int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}-1} xf(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}+1} f(x)\mathrm{d}x$$

Et :

$$\int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{B}-1} f(v)(v+1)\mathrm{d}v = \int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{A}+1} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}-1} xf(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{B}-1} f(x)\mathrm{d}x.$$

Deux des termes se simplifient, et en regroupant les intégrales ayant les mêmes bornes, par linéarité, on a exactement

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{T}(f)(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Bigg(&\int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} (\mathrm{B}-x)f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{A}+1} (\mathrm{A}-x)f(x)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}+1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{A}-1}^{\mathrm{B}-1} f(x)\mathrm{d}x\Bigg)\end{aligned}}$$

18. Soit $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall x \in [\,\mathrm{B}-1\,;\,\mathrm{B}+1\,]$, $\quad |\mathrm{B}-x| \leqslant 1$, et comme f est positive (puisque densité),
$\forall x \in [\,\mathrm{B}-1\,;\,\mathrm{B}+1\,]$, $\quad |(\mathrm{B}-x)f(x)| \leqslant f(x)$.
Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} (\mathrm{B}-x)f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} |(\mathrm{B}-x)f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} f(x)\mathrm{d}x. \text{ Ainsi}$$

$$\forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} (\mathrm{B}-x)f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \mathrm{T}(f)(\mathrm{B}).$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1... densité !), la question 5 assure que $\displaystyle\lim_{\mathrm{B}\to+\infty} \mathrm{T}(f)(\mathrm{B}) = 0$. Le théorème d'encadrement donne alors

$$\boxed{\lim_{\mathrm{B}\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}-1}^{\mathrm{B}+1} (\mathrm{B}-x)f(x)\mathrm{d}x = 0.}$$

Un raisonnement analogue montre que $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx = 0$.

Et toujours puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, en passant à la limite lorsque A tend vers $-\infty$ et B tend vers $+\infty$, tous les termes de la relation de 17 admettent une limite finie et on a

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}(f)(t)dt \text{ existe et vaut } 1.}$$

Et comme $\mathrm{T}(f)$ est continue (car dérivable) et positive par positivité de l'intégrale,

$$\boxed{\mathrm{T}(f) \text{ est une densité.}}$$

PROBLÈME 2.

PARTIE I. *Quelques généralités*

1. • $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi_A(M) = AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + AN - NA = \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(N)$.

$$\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. $\Phi_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = 0$ donc $I_n \in \mathrm{Ker}(\Phi_A)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi_A) \neq \{0\}$, donc Φ_A n'est pas injective. Comme Φ_A est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, Φ_A n'est pas surjective.

$$\boxed{\Phi_A \text{ n'est ni injectif, ni surjectif.}}$$

PARTIE II. *Étude d'un cas particulier*

3. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Sp}(A) = \{1,3\}$. Comme A est une matrice d'ordre 2 ayant 2 valeurs propres distinctes,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) = \{1,3\}.}$$

4. $\Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Phi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En raison de ses 3 colonnes colinéaires non nulles, et indépendantes de la 4$^{\text{ème}}$,

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\Phi_A)) = 2.}$$

5. • Comme $\mathrm{rg}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\Phi_A)) = 2$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\Phi_A) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, 0 est une valeur propre de Φ_A avec $\dim E_0 = 4 - 2 = 2$. On peut même préciser que $E_0 = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

• $\Phi_A(E_{1,2}) = -2E_{1,2}$ donc -2 est aussi une valeur propre de Φ_A.

• $\mathrm{rg}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\Phi_A) - 2I_4) < 4$ car sa 3$^{\text{ème}}$ ligne est nulle donc 2 est une valeur propre de Φ_A.

• Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, la somme de leur dimension ne peut pas excéder 4, il n'y pas d'autre valeur propre possible.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \{-2,0,2\}, \dim E_{-2} = 1, \dim E_0 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1.}$$

Le théorème de diagonisabilité s'applique : $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\Phi_A)} \dim E_\lambda = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

PARTIE III. *Étude du cas où* A *est diagonalisable*

6. Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. En transposant cette relation,

$${}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1}) = {}^tD.$$

Or ${}^{t}\mathrm{D} = \mathrm{D}$ puisque D est diagonale, et ${}^{t}\mathrm{P}\,{}^{t}(\mathrm{P}^{-1}) = {}^{t}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}) = {}^{t}\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$, ce qui prouve que ${}^{t}(\mathrm{P}^{-1}) = ({}^{t}\mathrm{P})^{-1}$. D'où ${}^{t}\mathrm{P}\,{}^{t}\mathrm{A}({}^{t}\mathrm{P})^{-1} = \mathrm{D}$.

$$\boxed{{}^{t}\mathrm{A} \text{ est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres que A.}}$$

7. Supposons $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et ${}^{t}\mathrm{AY} = \mu\mathrm{Y}$.
$\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{Y}) = \mathrm{AX}\,{}^{t}\mathrm{Y} - \mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{YA} = \lambda\mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{Y} - \mathrm{X}\,{}^{t}({}^{t}\mathrm{AY}) = \lambda\mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{Y} - \mathrm{X}\,{}^{t}(\mu\mathrm{Y}) = (\lambda-\mu)\mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{Y}$.

$$\boxed{\mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{Y} \text{ est un vecteur propre de } \Phi_{\mathrm{A}} \text{ (associé à la valeur propre } \lambda-\mu).}$$

8. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Écrivons $\mathrm{V}_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{X}_k$ et $\mathrm{V}_j = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell \mathrm{X}_\ell$.

Alors $\mathrm{V}_i\,{}^{t}\mathrm{V}_j = \left(\displaystyle\sum_k \alpha_k \mathrm{X}_k\right)\left(\displaystyle\sum_\ell \beta_\ell\,{}^{t}\mathrm{Y}_\ell\right) = \displaystyle\sum_{k,\ell} \alpha_k\beta_\ell \mathrm{X}_k\,{}^{t}\mathrm{Y}_\ell \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \qquad \mathrm{V}_i\,{}^{t}\mathrm{V}_j \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).}$$

Et comme le préambule de l'énoncé nous rappelle que $\mathrm{Vect}\big((\mathrm{V}_i\,{}^{t}\mathrm{V}_j)_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}\big) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. L'implication réciproque étant immédiate, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, constituée de n^2 vecteurs, et comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$,

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

9. Comme A et ${}^{t}\mathrm{A}$ sont diagonalisables d'après 6, prenons $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ et $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propres de A et ${}^{t}\mathrm{A}$ respectivement.
La famille $\mathcal{F} \overset{\text{déf.}}{=} (\mathrm{X}_i\,{}^{t}\mathrm{Y}_j)_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après 8, et formées exclusivement de vecteurs propres de Φ_{A} d'après 7. Il en découle

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{A}} \text{ est diagonalisable.}}$$

10. Le calcul mené en 7 montre que $\{\lambda - \mu / \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \text{ et } \mu \in \mathrm{Sp}({}^{t}\mathrm{A})\} \subset \mathrm{Sp}(\Phi_{\mathrm{A}})$.
Comme $\mathrm{Sp}({}^{t}\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, on a $\{\lambda - \mu / (\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})^2\} \subset \mathrm{Sp}(\Phi_{\mathrm{A}})$.
Réciproquement, si α est une valeur propre de Φ_{A}, il existe (au moins) un vecteur de la base propre $\mathcal{F}$ qu'il lui est associé. Donc il existe $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ et deux valeurs propres λ et μ de A tels que : $\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}_i\,{}^{t}\mathrm{Y}_j) = \alpha\mathrm{X}_i\,{}^{t}\mathrm{Y}_j$, $\mathrm{AX}_i = \lambda\mathrm{X}_i$ et ${}^{t}\mathrm{AY}_j = \mu\mathrm{Y}_j$.

Le calcul de 7 montre alors que $\alpha\mathrm{X}_i\,{}^{t}\mathrm{Y}_j = (\lambda-\mu)\mathrm{X}_i\,{}^{t}\mathrm{Y}_j$, et puisque le vecteur propre $\mathrm{X}_i\,{}^{t}\mathrm{Y}_j$ est non nul, $\alpha = \lambda - \mu$. Donc $\alpha \in \{\lambda - \mu / (\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})^2\}$.

$$\boxed{\{\lambda - \mu / (\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})^2\} = \mathrm{Sp}(\Phi_{\mathrm{A}})}$$

Partie IV. *Étude d'un sous-espace propre de Φ_{A} associé à une valeur propre non nulle.*

11. • $\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}^0) = \Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_n) = 0 = \lambda \times 0 \times \mathrm{T}^0$, la propriété demandée est vraie au rang $k = 0$.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}^k) = \lambda k \mathrm{T}^k$. En particulier, $\mathrm{AT}^k = \mathrm{T}^k\mathrm{A} + \lambda k\mathrm{T}^k$.
$\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}^{k+1}) = \mathrm{AT}^{k+1} - \mathrm{T}^{k+1}\mathrm{A} = (\mathrm{T}^k\mathrm{A} + \lambda k\mathrm{T}^k)\mathrm{T} - \mathrm{T}^{k+1}\mathrm{A} = \mathrm{T}^k(\mathrm{AT} + \lambda k\mathrm{T} - \mathrm{TA}) = \mathrm{T}^k(\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}) + \lambda k\mathrm{T}) = \mathrm{T}^k(\lambda\mathrm{T} + \lambda k\mathrm{T}) = \lambda(k+1)\mathrm{T}^{k+1}$. La propriété est héréditaire.
• Nous avons démontré par récurrence sur k,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}^k) = \lambda k\mathrm{T}^k.}$$

12. Si, pour tout k de $[\![0\,;\,n^2]\!]$, $\mathrm{T}^k \neq 0$, alors la relation précédente montre que, pour tout k de $[\![0\,;\,n^2]\!]$, λk est une valeur propre de Φ_{A}. Donc Φ_{A} aurait au moins n^2+1 valeurs propres deux à deux distinctes puisque $\lambda \neq 0$. Ceci est impossible puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ donc Φ_{A} possède au plus n^2 valeurs propres distinctes.
Par conséquent, puisque $\mathrm{T}^0 \neq 0$,

$$\boxed{\exists q \in [\![1\,;\,n^2]\!], \qquad \mathrm{T}^q = 0.}$$

13. • Comme $\mathrm{T}^{p-1} \neq 0$, $\mathrm{rg}(\mathrm{T}^{p-1}) \geqslant 1$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}^{p-1}) \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe } \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X} \neq 0.}$$

- Soit $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ p réels tels
$$\alpha_0 \mathrm{X} + \alpha_1 \mathrm{TX} + \cdots + \alpha_{p-1}\mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X} = 0.$$
En multipliant cette relation par T^{p-1}, il vient $\alpha_0\mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X} = 0$, donc $\alpha_0 = 0$, et du coup $\qquad \alpha_1\mathrm{TX} + \cdots + \alpha_{p-1}\mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X} = 0.$
En multipliant par T^{p-2}, il vient $\alpha_1 = 0$.
Une récurrence immédiate assure $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_{p-1} = 0$.
$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{X}, \mathrm{TX}, \ldots, \mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X}) \text{ est libre, et } p \leqslant n}$$
puisqu'il s'agit d'une famille de p vecteurs dans un espace de dimension n.

Partie V. ***Étude du cas où A est symétrique***

En l'absence de mention contraire, je suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique et je noterai $(.\mid.)_c$ le produit scalaire, de sorte que $(\mathrm{X}\mid\mathrm{Y})_c = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XY}$.

14. • La bilinéarité, la symétrie et la positivité de la forme proposée ne fait aucun doute.
• De plus, $(\mathrm{M}\mid\mathrm{M}) = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}^2 = 0$. Comme il s'agit de la somme de termes tous positifs, tous ces termes sont nuls, donc $\mathrm{M} = 0$
$$\boxed{(.\mid.) \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

$$\forall(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \qquad (\mathrm{M}\mid\mathrm{N}) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MN}) \textit{ où tr désigne la trace.}$$

15. Utilisons le symbole de Kronecker défini par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

$(\mathrm{M}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}\mid\mathrm{I}_n) = \displaystyle\sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{j,k}\right)\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{i,k} = (\mathrm{M}\mid\mathrm{N})$ puisqu'en raison de $\delta_{i,j}$ il ne faut tenir compte que des termes tels que $j = i$.
$$\boxed{\forall(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{M}\mid\mathrm{N}) = (\mathrm{M}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}\mid\mathrm{I}_n).}$$

16. Du coup, puisque P est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et
$$\boxed{\forall(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \qquad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j = (\mathrm{C}_i\mid\mathrm{C}_j)_c = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

17. Le coefficient de rang k sur la diagonale de $\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_j$ est le produit du $k^{\text{ème}}$ coefficient de C_i par le $k^{\text{ème}}$ coefficient de C_j, c'est-à-dire $p_{k,i}p_{k,j}$ (où les $p_{.,.}$ désignent les coefficients de P).

D'autre part, pour toute matrice M, $(\mathrm{M}\mid\mathrm{I}_n) = \displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \mathrm{tr}(\mathrm{M})$.

Dès lors, $(\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_j\mid\mathrm{I}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{k,i}p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathrm{t}}p_{i,k}p_{k,j} = ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{PP})_{i,j} = (\mathrm{I}_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$, puisque, P étant orthogonale, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{PP} = \mathrm{I}_n$.

$$\boxed{\forall(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \qquad (\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_j\mid\mathrm{I}_n) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

18. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;\,n]\!]^4$. En utilisant 17 puis 16,
$$(\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_j\mid\mathrm{C}_k\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_\ell) = (\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_j\mathrm{C}_\ell\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_k\mid\mathrm{I}_n) = \begin{cases} (0\mid\mathrm{I}_n) = 0 & \text{si } j \neq \ell \\ (\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_k\mid\mathrm{I}_n) = \delta_{i,k} & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\boxed{\text{Pour } (i,j,k,\ell) \in [\![1\,;\,n]\!]^4,\ (\mathrm{C}_i\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_j\mid\mathrm{C}_k\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

19. Par 18, la famille $\mathcal{G}$ est orthonormale. Les colonnes de P sont des vecteurs propres de $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}$ qui est diagonalisable donc en appliquant les conclusions de 7, chaque vecteur de $\mathcal{G}$ est propre pour Φ_A.
$$\boxed{\mathcal{G} \text{ est une base orthonormale de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } \Phi_\mathrm{A}.}$$
... et Φ_A est orthogonalement diagonalisable.