- Comme $u_0 = \alpha > 0$, la propriété P_0 est vraie
- Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{définition}} \frac{3}{2}u_n^2 \underbrace{> 0}_{\mathcal{P}_n}$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

En conclusion, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

2. *Stratégie : pour prouver que la suite est arithmético géométrique, il semble logique de calculer v_{n+1} et de chercher à l'exprimer sous la forme $av_n + b$*

Par définition de la suite v et de la suite u, nous avons

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}u_n^2\right) = \ln\frac{3}{2} + 2\ln u_n = \ln 3 - \ln 2 + 2v_n$$

A fortioti, v_n est arithmético-géométrique (avec $a = 2$ et $b = \ln 3 - \ln 2$).

3. Cherchons d'abord l'unique suite constante c vérifiant $c = ac + b$, c'est à dire

$$c = \ln 3 - \ln 2 + 2c \Longleftrightarrow c = \ln 2 - \ln 3$$

En procédant à une soustraction, avec la relation $v_{n+1} = av_n + b$), il vient

$$v_{n+1} - c = 2(v_n - c)$$

En particulier la suite $v_n - c$ est géométrique de raison 2, de sorte que

$$v_n - c = (v_0 - c) \times 2^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Comme $v_0 = \ln\alpha$, nous obtenons alors que $v_n = \ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n$

4. Comme $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, il suit

$$u_n = \mathrm{e}^{\ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3)\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln 2}\mathrm{e}^{-\ln 3}\mathrm{e}^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3)\times 2^n} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3)\times 2^n}$$

5. La suite u converge *ssi* $\alpha - \ln 2 + \ln 3 \leqslant 0$. Plus précisémment,
   - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 < 0$, v_n diverge vers $-\infty$ et u_n converge vers 0 par composition avec l'exponentielle
   - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 = 0$, v_n et u_n sont des suites constantes (et donc convergentes), égales respectivement à $\ln 2 - \ln 3$ et $\frac{2}{3}$
   - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 > 0$, v_n diverge vers $+\infty$ et u_n diverge vers $+\infty$ par composition avec l'exponentielle

Exo IV. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sa dérivée, qui vaut

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{(x+2)^2} = 3x\frac{x+4}{(x+2)^2},$$

est du signe de $x(x+4)$. Par ailleurs, un calcul rapide montre que $f \underset{-\infty}{\to} -\infty$, $f \underset{-2^-}{\to} -\infty$, $f \underset{-2^+}{\to} +\infty$ et $f \underset{+\infty}{\to} +\infty$. En particulier, la tableau de variation de la fonction f est

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
			12		$\Vert\ +\infty$				$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty\ \Vert$		0		

2. Il résulte du tableau de variation (et du théorème des valeurs intermediaires) que l'équation $f(x) = 1$ a deux antécédents : l'un dans $]-2{,}0[$ et l'autre dans $]0, +\infty[$. A fortiori, f n'est pasinjective sur $]-2, +\infty[$.
3. De même, il résulte du tableau de variation que $f(]-2, +\infty[) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$. A fortiori, f n'est pas une surjection de $]-2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Etant donné $y \in \mathbb{R}^+$, nous remarquons d'une part que $y - \sqrt{24y + y^2} < 0$ et d'autre part qu'un nombre positif x satisfait

$$\begin{aligned} y = g(x) \quad &\Longleftrightarrow y = \tfrac{3x^2}{x+2} \Longleftrightarrow 3x^2 = y(x+2) \Longleftrightarrow x^2 - \tfrac{y}{3}x - \tfrac{2y}{3} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x - \tfrac{y}{6}\right)^2 x - \tfrac{24y+y^2}{6^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \tfrac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}\right)\left(x - \tfrac{y-\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \tfrac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \geqslant 0 \end{aligned}$$

En particulier, l'équation $y = g(x)$ admet une unique solution $x \geqslant 0$ de sorte que g est une bijection. De plus, sa bijection réciproque est

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & y & \mapsto & \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \end{array}$$

5. D'après le tableau de variation de f, la fonction g est strictement croissante (et donc injective) et satisfait $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. A fortiori, g est bijective.

Exo V. 1. *Conseil : traiter cette question en dressant un tableau de variation de f et de g*

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, les fonctions polynômes $x \mapsto -x + \frac{x^2}{2}$, $x \mapsto 1 + x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables. Comme $1 + x > 0$ et comme le logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est également dérivable sur $[0, +\infty[$. A fortiori, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, +\infty[$ en tant que sommes de fonctions dérivables. De plus

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &= \tfrac{1}{1+x} - 1 = \tfrac{1-(1+x)}{1+x} = \tfrac{-x}{1+x} < 0 \\ g'(x) \quad &= x + f'(x) = \tfrac{x(1+x)-x}{1+x} = \tfrac{x^2}{1+x} > 0 \qquad (x \geqslant 0) \end{aligned}$$

A fortioti, f et g sont respectivement décroissantes et croissantes sur $[0, +\infty[$.

2. Comme $f(0) = 0$ et comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) \leqslant 0 \quad (x \geqslant 0)$, c'est-à-dire

$$\ln(1 + x) \leqslant x \qquad (x \geqslant 0)$$

De même, comme $g(0)$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $g(x) \geqslant 0 \quad (x \geqslant 0)$ et donc

$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} \qquad (x \geqslant 0)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > 0$
   - $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1 = \frac{3}{2} > 0$
   - Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

   $$u_{n+1} \underbrace{\geqslant}_{\text{définition}} u_n \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{>0} \underbrace{>}_{\mathcal{P}_n} 0$$

   A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
4. *Soupir... encore une démonstration par récurrence = des points donnés gratuitement (enfin, pour ceux qui ont pris la peine de comprendre et de maitriser le concept facile de démonstration par récurrence. Pour info, il y a souvent des questions qui se traitent par récurrence en ds/concours)*

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
   - $\mathcal{P}_1$ est vraie car $\ln u_1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
   - Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.
     Comme $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, on a

   $$\begin{aligned}\ln u_{n+1} &\underbrace{=}_{\text{définition}} \ln\left(u_n \times \left(1 + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \ln u_n + \ln\ln\left(1 + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\underbrace{=}_{\mathcal{P}_n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln\ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

   A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
5. D'après l'inégalité établie à la question 2 pour $k \in \mathbb{N}$ et $x = \frac{1}{2^k}$, nous avons

   $$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad (k \geqslant 0)$$

   Soit $n \geqslant 1$. En sommant la relation précédente pour $0 \leqslant k \leqslant n$, il vient

   $$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

   A fortiori, nous obtenons que

   $$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}}_{S_n} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}}_{T_n} \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\ln u_n} \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}}_{S_n}$$

6. S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$, de sorte que

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant 1)$$

De même T_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4} \neq 1$, de sorte que

$$T_n = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

Il résulte de ces deux formules que S_n converge vers 1 et que T_n converge vers $\frac{1}{3}$

7. a. Nous avons précédemment montré que $u_n > 0$ pour $n \geqslant 1$. Comme

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > u_n \times 1 = u_n,$$

nous concluons que la suite u est strictement croissante

b. La suite S_n est majorée car elle converge. Comme $\ln u_n \leqslant S_n$, la suite $\ln u_n$ est majorée et nous en déduisons qu'il en est de même pour la suite u_n par composition avec la fonction exponentielle, qui est croissante. Comme la suite u est strictement croissante, elle est alors forcément convergente.

c. Comme $\lim S_n = 1$, $\lim T_n = \frac{1}{3}$ et $\lim u_n = \ell$, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, nous déduisons de $S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$ que

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$$

En composant avec l'exponentielle, il vient alors $\mathrm{e}^{5/6} \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \tfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \tfrac{f(u_n)-1}{f(u_n)} = 1 - \tfrac{1}{f(u_n)} = 1 - \tfrac{2u_n-1}{(u_n)^2} \\ &= \tfrac{(u_n)^2-2u_n+1}{(u_n)^2} = \tfrac{(u_n-1)^2}{(u_n)^2} = \left(\tfrac{u_n-1}{u_n}\right)^2 = (v_n)^2 \end{aligned}$$

En reportant ceci dans un logarithme, il vient alors

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left((v_n)^2\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

La suite w est donc une suite géométrique de raison 2. *Question difficile*

c. D'après le cours, il suit $w_n = w_0 2^n$ pour $n \geqslant 0$. En composant la formule $w_n = \ln(v_n)$ avec une exponentielle, nous aboutissons à

$$v_n = \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{w_0 2^n} \qquad (n \geqslant 0)$$

Comme $w_0 = \ln(v_0)$ et comme $v_0 = (u_0 - 1)/u_0 = \frac{1}{2}$, nous obtenons que $w_0 = -\ln 2$ puis que

$$v_n = \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{-\ln(2)2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \qquad (n \geqslant 0)$$

comme $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$, nous remarquons d'abord que $v_n u_n = u_n - 1$ puis que $u_n(v_n - 1) = -1$, de sorte que

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

Exo II. 1. En simplifiant les factorielles, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \tfrac{u_{n+1}}{u_n} &= \tfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \tfrac{n!^2}{(2n)!} = \tfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \left(\tfrac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \\ &= (2n+2)(2n+1) \times \tfrac{1}{(n+1)^2} = \tfrac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\underbrace{\tfrac{(2n+1)}{n+1}}_{\geqslant 1} \geqslant 2 \end{aligned}$$

En multipliant par $u_n > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas et nous obtenons que $u_{n+1} \geqslant 2u_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_{n+1} \geqslant 2^n$.

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = \binom{0}{0} = 1 \geqslant 1 = 2^0$
- Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$u_{n+1} \underbrace{\geqslant}_{Q1} 2u_n \underbrace{\geqslant}_{\mathcal{P}_n} 2 \times 2^n = 2^{2n+1}$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

En conclusion, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, il résulte de l'inégalité montrée à la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exo III. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > 0$.

- Comme $u_0 = \alpha > 0$, la propriété P_0 est vraie
- Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{définition}} \frac{3}{2}u_n^2 \underbrace{> 0}_{\mathcal{P}_n}$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

En conclusion, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

2. *Stratégie : pour prouver que la suite est arithmético géométrique, il semble logique de calculer v_{n+1} et de chercher à l'exprimer sous la forme $av_n + b$*

   Par définition de la suite v et de la suite u, nous avons

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}u_n^2\right) = \ln\frac{3}{2} + 2\ln u_n = \ln 3 - \ln 2 + 2v_n$$

   A fortioti, v_n est arithmético-géométrique (avec $a = 2$ et $b = \ln 3 - \ln 2$).

3. Cherchons d'abord l'unique suite constante c vérifiant $c = ac + b$, c'est à dire

$$c = \ln 3 - \ln 2 + 2c \Longleftrightarrow c = \ln 2 - \ln 3$$

   En procédant à une soustraction, avec la relation $v_{n+1} = av_n + b$), il vient

$$v_{n+1} - c = 2(v_n - c)$$

   En particulier la suite $v_n - c$ est géométrique de raison 2, de sorte que

$$v_n - c = (v_0 - c) \times 2^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   Comme $v_0 = \ln\alpha$, nous obtenons alors que $v_n = \ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n$

4. Comme $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, il suit

$$u_n = \mathrm{e}^{\ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3)\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln 2}\mathrm{e}^{-\ln 3}\mathrm{e}^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3)\times 2^n} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3)\times 2^n}$$

5. La suite u converge *ssi* $\alpha - \ln 2 + \ln 3 \leqslant 0$. Plus précisémment,
   - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 < 0$, v_n diverge vers $-\infty$ et u_n converge vers 0 par composition avec l'exponentielle
   - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 = 0$, v_n et u_n sont des suites constantes (et donc convergentes), égales respectivement à $\ln 2 - \ln 3$ et $\frac{2}{3}$
   - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 > 0$, v_n diverge vers $+\infty$ et u_n diverge vers $+\infty$ par composition avec l'exponentielle

Exo IV. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sa dérivée, qui vaut

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{(x+2)^2} = 3x\frac{x+4}{(x+2)^2},$$

est du signe de $x(x+4)$. Par ailleurs, un calcul rapide montre que $f \underset{-\infty}{\rightarrow} -\infty$, $f \underset{-2^-}{\rightarrow} -\infty$, $f \underset{-2^+}{\rightarrow} +\infty$ et $f \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$. En particulier, la tableau de variation de la fonction f est

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$			12		$\Vert\ +\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty\ \Vert$		0		

2. Il résulte du tableau de variation (et du théorème des valeurs intermediaires) que l'équation $f(x) = 1$ a deux antécédents : l'un dans $]-2{,}0[$ et l'autre dans $]0, +\infty[$. A fortiori, f n'est pasinjective sur $]-2, +\infty[$.
3. De même, il résulte du tableau de variation que $f(]-2, +\infty[) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$. A fortiori, f n'est pas une surjection de $]-2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Etant donné $y \in \mathbb{R}^+$, nous remarquons d'une part que $y - \sqrt{24y + y^2} < 0$ et d'autre part qu'un nombre positif x satisfait

$$\begin{aligned} y = g(x) \quad &\Longleftrightarrow y = \tfrac{3x^2}{x+2} \Longleftrightarrow 3x^2 = y(x+2) \Longleftrightarrow x^2 - \tfrac{y}{3}x - \tfrac{2y}{3} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x - \tfrac{y}{6}\right)^2 x - \tfrac{24y+y^2}{6^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \tfrac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}\right)\left(x - \tfrac{y-\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \tfrac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \geqslant 0 \end{aligned}$$

En particulier, l'équation $y = g(x)$ admet une unique solution $x \geqslant 0$ de sorte que g est une bijection. De plus, sa bijection réciproque est

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & y & \mapsto & \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \end{array}$$

5. D'après le tableau de variation de f, la fonction g est strictement croissante (et donc injective) et satisfait $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. A fortiori, g est bijective.

Exo V. 1. *Conseil : traiter cette question en dressant un tableau de variation de f et de g*

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, les fonctions polynômes $x \mapsto -x + \frac{x^2}{2}$, $x \mapsto 1 + x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables. Comme $1 + x > 0$ et comme le logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est également dérivable sur $[0, +\infty[$. A fortiori, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, +\infty[$ en tant que sommes de fonctions dérivables. De plus

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &= \tfrac{1}{1+x} - 1 = \tfrac{1-(1+x)}{1+x} = \tfrac{-x}{1+x} < 0 \\ g'(x) \quad &= x + f'(x) = \tfrac{x(1+x)-x}{1+x} = \tfrac{x^2}{1+x} > 0 \qquad (x \geqslant 0) \end{aligned}$$

A fortioti, f et g sont respectivement décroissantes et croissantes sur $[0, +\infty[$.

2. Comme $f(0) = 0$ et comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) \leqslant 0 \quad (x \geqslant 0)$, c'est-à-dire

$$\ln(1 + x) \leqslant x \qquad (x \geqslant 0)$$

De même, comme $g(0)$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $g(x) \geqslant 0 \quad (x \geqslant 0)$ et donc

$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} \qquad (x \geqslant 0)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > 0$
   - $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1 = \frac{3}{2} > 0$
   - Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.

     $$u_{n+1} \underbrace{\geqslant}_{\text{définition}} \underbrace{u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{>0} \underbrace{>}_{\mathcal{P}_n} 0$$

     A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
4. *Soupir... encore une démonstration par récurrence = des points donnés gratuitement (enfin, pour ceux qui ont pris la peine de comprendre et de maitriser le concept facile de démonstration par récurrence. Pour info, il y a souvent des questions qui se traitent par récurrence en ds/concours)*

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : \ln u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
   - $\mathcal{P}_1$ est vraie car $\ln u_1 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
   - Supposons maintenant $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.
     Comme $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, on a

     $$\begin{aligned}\ln u_{n+1} &\underbrace{=}_{\text{définition}} \ln\left(u_n \times \left(1 + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \ln u_n + \ln \ln\left(1 + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\underbrace{=}_{\mathcal{P}_n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

     A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
5. D'après l'inégalité établie à la question 2 pour $k \in \mathbb{N}$ et $x = \frac{1}{2^k}$, nous avons

   $$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad (k \geqslant 0)$$

   Soit $n \geqslant 1$. En sommant la relation précédente pour $0 \leqslant k \leqslant n$, il vient

   $$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

   A fortiori, nous obtenons que

   $$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}}_{S_n} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}}_{T_n} \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\ln u_n} \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}}_{S_n}$$
6. S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$, de sorte que

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant 1)$$

De même T_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4} \neq 1$, de sorte que

$$T_n = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

Il résulte de ces deux formules que S_n converge vers 1 et que T_n converge vers $\frac{1}{3}$

7. a. Nous avons précédemment montré que $u_n > 0$ pour $n \geqslant 1$. Comme

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > u_n \times 1 = u_n,$$

nous concluons que la suite u est strictement croissante

b. La suite S_n est majorée car elle converge. Comme $\ln u_n \leqslant S_n$, la suite $\ln u_n$ est majorée et nous en déduisons qu'il en est de même pour la suite u_n par composition avec la fonction exponentielle, qui est croissante. Comme la suite u est strictement croissante, elle est alors forcément convergente.

c. Comme $\lim S_n = 1$, $\lim T_n = \frac{1}{3}$ et $\lim u_n = \ell$, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, nous déduisons de $S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$ que

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$$

En composant avec l'exponentielle, il vient alors $\mathrm{e}^{5/6} \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}$.