

Corrigé du devoir maison 1

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 1$ donc $(e^x + 1)^2 \neq 0$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}}$ et $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{\frac{1}{e^x}}{(\frac{e^x+1}{e^x})^2} = \frac{1}{e^x \frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x)$.
- $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ donc (pas de F.I.), $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et par parité $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Sans l'astuce de la parité en $+\infty$
F.I. $\frac{\infty}{\infty}$: on met en facteur le prépondérant au dénominateur : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x(e^{-x} + 1))^2} = \frac{e^x}{(e^x)^2(e^{-x} + 1)^2} = \frac{1}{e^x(e^{-x} + 1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (plus de FI). Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x)^2 - 2e^x(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 + e^x) - 2e^x e^x}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$. (rappel $(u^2)' = 2u'u$)
- Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0, f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ par stricte croissance du $\ln$.
- La courbe de f admet une tangente horizontale en x ssi $f'(x) = 0$ c'est-à-dire ssi $1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Penser aux asymptotes horizontales, à la tangente horizontale en $0 \dots$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f'(x) + \frac{1}{3} = \frac{3e^x(1-e^x)+(1+e^x)^3}{3(1+e^x)^3}} = \frac{3e^x - 3e^{2x} + e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1}{3(1+e^x)^2} = \frac{6e^x + e^{3x} + 1}{3(1+e^x)^3} \geq 0$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq -\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{Poser } d(x) = f(x) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})}$. Alors $d'(x) = f'(x) + \frac{1}{3} \geq 0$. Donc d est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $d(0) = f(0) - \frac{1}{4} = 0$, d est positive sur $\mathbb{R}^+$. La courbe de f est donc au-dessus de cette droite sur $\mathbb{R}^+$.
- $\boxed{\text{Equation définie sur } \mathbb{R}}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5e^x = (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$. Poser alors $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 3X + 1 = 0$ à étudier sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\Delta = 5$. Deux racines $X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ et $X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$. En effet $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ d'où $X_1 > 0$.
Comme $X = e^x \Leftrightarrow x = \ln(X)$ on obtient deux solutions $x_1 = \ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ et $x_2 = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

Corrigé du devoir maison 1

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 1$ donc $(e^x + 1)^2 \neq 0$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}}$ et $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{\frac{1}{e^x}}{(\frac{e^x+1}{e^x})^2} = \frac{1}{e^x \frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x)$.
- $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ donc (pas de F.I.), $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et par parité $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Sans l'astuce de la parité en $+\infty$
F.I. $\frac{\infty}{\infty}$: on met en facteur le prépondérant au dénominateur : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x(e^{-x} + 1))^2} = \frac{e^x}{(e^x)^2(e^{-x} + 1)^2} = \frac{1}{e^x(e^{-x} + 1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (plus de FI). Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x)^2 - 2e^x(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 + e^x) - 2e^x e^x}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$. (rappel $(u^2)' = 2u'u$)
- Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0, f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ par stricte croissance du $\ln$.
- La courbe de f admet une tangente horizontale en x ssi $f'(x) = 0$ c'est-à-dire ssi $1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Penser aux asymptotes horizontales, à la tangente horizontale en $0 \dots$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f'(x) + \frac{1}{3} = \frac{3e^x(1-e^x)+(1+e^x)^3}{3(1+e^x)^3}} = \frac{3e^x - 3e^{2x} + e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1}{3(1+e^x)^2} = \frac{6e^x + e^{3x} + 1}{3(1+e^x)^3} \geq 0$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq -\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{Poser } d(x) = f(x) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})}$. Alors $d'(x) = f'(x) + \frac{1}{3} \geq 0$. Donc d est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $d(0) = f(0) - \frac{1}{4} = 0$, d est positive sur $\mathbb{R}^+$. La courbe de f est donc au-dessus de cette droite sur $\mathbb{R}^+$.
- $\boxed{\text{Equation définie sur } \mathbb{R}}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5e^x = (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$. Poser alors $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 3X + 1 = 0$ à étudier sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\Delta = 5$. Deux racines $X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ et $X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$. En effet $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ d'où $X_1 > 0$.
Comme $X = e^x \Leftrightarrow x = \ln(X)$ on obtient deux solutions $x_1 = \ln(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ et $x_2 = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$.