Corrigé du devoir maison 2

Exercice 1:

1. L'équation est définie sur $\mathbb{R}^+$. Deux méthodes : soit poser $X = \sqrt{x}$ et étudier l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ (car $X \in \mathbb{R}^+$) : $\Delta = 9$, $X_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+$ et $X_2 = 2 \in \mathbb{R}^+$ d'où $x = X^2 = 4 \geq 0$. $\mathcal{S} = \{4\}$.
   Soit transformer l'équation : $(E) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2$.
   Alors, comme $\sqrt{x} \geq 0$ (pour $x \geq 0$), si $x < 2$, l'équation ne peut avoir de solutions.
   Si $x \geq 2$, les deux membres de l'équation sont positifs, d'où $(E) \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$. $\Delta = 9$, $x_1 = 1 < 2$ et $x_2 = 4 \geq 2$. D'où $\mathcal{S} = \{4\}$.
2. S_1 : ne pas croire que l'on va se ramener au binôme de Newton (il n'y a pas de coefficients binomiaux !). Les puissances doivent vous guider vers la somme géométrique : garder par ailleurs à l'esprit que n est une constante pour la somme (l'indice de sommation est k).
   On utilise les formules sur les puissances : $(-1)^{k+1} = (-1)^k(-1) = -(-1)^k$ et $2^{n-k} = 2^n 2^{-k}$.
   $S_1 = -2^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{-k} = -2^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{-1}{2})^k = -2^n \dfrac{1-(-1/2)^{n+1}}{1+1/2}$.
   S_2 : il y a les puissances, et les factorielles ... donc l'idée du binome de Newton est la bonne. Se rappeler que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ donc $\dfrac{1}{k!(n-k)!} = \dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$ et $n!$ est une constante d'où
   $S_2 = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \dfrac{1}{n!}(2+1)^n = \dfrac{3^n}{n!}$
3. Par récurrence (simple) sur l'entier n :
   Cas $n = p$: montrer que $\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p+1}{p+1}$.
   Or $\binom{p+1}{p+1} = 1$ et $\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$.
   Supposons que pour un certain entier $n \geq p$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ et montrons que $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$.
   Or (relation de Chasles), $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$ =[H.R.] $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$ (formule du triangle de Pascal).
   Conclure

Exercice 2:

1. $u_1 = \prod_{k=1}^{1} (1 + \frac{k}{1^2}) = 1 + 1 = 2$, $u_2 = \prod_{k=1}^{2} (1 + \frac{k}{4}) = (1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{2}{4}) = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$ et enfin,
   $u_3 = \prod_{k=1}^{3} (1 + \frac{k}{9}) = (1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{2}{9})(1 + \frac{3}{9}) = \frac{10}{9} \times \frac{11}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{440}{243}$
   Puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(\prod_{k=0}^{n} (1 + \frac{k}{n^2})) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2})$.
2. Il faut faire deux études de fonctions : poser $f(x) = \ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2})$ puis $g(x) = x - \ln(1+x)$. Faire leur TV et vérifier qu'elles sont positives sur $\mathbb{R}^+$.
3. On en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}(\frac{k}{n^2})^2 \leq \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \leq \frac{k}{n^2}$.
   En sommant ces $n+1$ encadrements (pour k variant de 0 à n) :
   $\sum_{k=0}^{n} [\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}(\frac{k}{n^2})^2] \leq \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}$,
   soit encore (linéarité) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=0}^{n} k^2 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k$.
   On reconnaît des sommes usuelles d'où $\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$.
4. Il reste à appliquer le théorème d'encadrement sur v_n : pour cela il suffit de lever les indéterminations et réaliser que le membre de gauche comme de droite tend vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$.
   D'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$ et enfin, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{1/2}$.