

EXERCICE 4

Jojo le glacier propose g variétés de glaces, s variétés de sorbets et 4 variétés d'accompagnements : chantilly, nappage chocolat, nappage caramel, éclats d'amandes. Le client choisit un certain nombre de boules de glace ou de sorbet (avec éventuellement plusieurs fois le même parfum) et, s'il le désire, un ou plusieurs accompagnement(s). Les éventuels accompagnements sont toujours disposés dans l'ordre suivant : chantilly, nappage, éclats d'amandes (mais l'on n'est pas obligé de mettre les trois). On ne peut pas choisir deux fois le même accompagnement ni choisir simultanément les deux nappages. La commande est servie dans un cornet ou une coupelle, en gauffre.

1. Dans toute cette question, le client choisit d'être servi dans un cornet. Par conséquent, on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans le cornet. Ainsi, le cornet fraise-chocolat n'est pas le même que le cornet fraise-chocolat-fraise.

- a) α] Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement ?

Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement, Jojo doit choisir successivement :

- 1 première boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;
- 1 deuxième boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;
- ⋮
- 1 b -ème boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix.

Donc

Jojo peut servir $(g + s)^b$ cornets de b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement.

- β] Même question dans le cas où le cornet est surmonté d'un (unique) accompagnement.

Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), avec un (unique) accompagnement, Jojo doit servir successivement :

- 1 cornet de b boules : $(g + s)^b$ choix (d'après α) ;
- 1 accompagnement parmi les 4 disponibles : 4 choix.

Donc

Jojo peut servir $4(g + s)^b$ cornets de b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), surmonté d'un unique accompagnement.

- b) α] Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement ?

Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement, Jojo doit choisir successivement :

- 1 première boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;
- 1 deuxième boule parmi les $g + s - 1$ parfums restants : $g + s - 1$ choix ;
- ⋮
- 1 b -ème boule parmi les $g + s - (b - 1)$ parfums restants : $g + s - b + 1$ choix.

Donc

Jojo peut servir $(g + s)(g + s - 1) \dots (g + s - b + 1) = A_{g+s}^b$ cornets de b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement.

$\beta]$ *Même question dans le cas où le cornet est surmonté de deux accompagnements.*

Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), avec 2 accompagnements, Jojo doit choisir successivement :

- 1 cornet de b goûts distincts : $(g+s)(g+s-1)\dots(g+s-b+1)$ choix (par α) ;
- 2 accompagnements parmi 4, sauf le double-nappage : $\binom{4}{2} - 1 = 5$ choix.

Donc

Jojo peut servir $5(g+s)(g+s-1)\dots(g+s-b+1)$ cornets de b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), avec deux accompagnements.

c) $\alpha]$ *Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins une est un sorbet ?*

Nous allons passer au complémentaire.

Le nombre de cornets avec 4 boules de glace ou sorbet, de parfums distincts ou non, sans accompagnement, a été déterminé à la question 1. a) $\alpha]$ et vaut $(g+s)^4$.

En tenant un raisonnement similaire à la question 1. a) $\alpha]$ sans les sorbets, on voit que le nombre de cornets avec 4 boules de glace (sans sorbet), de parfums distincts ou non, sans accompagnement, est égal à g^4 .

Donc,

Jojo peut servir $(g+s)^4 - g^4$ cornets de 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins une est un sorbet.

$\beta]$ *Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins 3 sont des glaces ?*

Cette fois, un passage au complémentaire serait contre-productif. Nous allons plutôt découper le dénombrement en deux cas : celui des cornets avec exactement 3 glaces (et donc 1 sorbet) et celui des cornets avec exactement 4 glaces (c'est-à-dire que des glaces!).

Pour servir un cornet avec 4 boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement, avec exactement 3 glaces et 1 sorbet, Jojo doit choisir successivement :

- 1 position pour le sorbet : 4 choix ;
- 1 boule de sorbet : s choix ;
- 1 boule de glace pour la première des trois positions restantes : g choix ;
- 1 boule de glace pour la deuxième des trois positions restantes : g choix ;
- 1 boule de glace pour la dernière des trois positions restantes : g choix ;

ce qui donne $4g^3s$ cornets de ce type.

Par ailleurs, nous avons déjà dit (à la question précédente) que le nombre de cornets avec 4 boules de glace (sans sorbet), de parfums distincts ou non, sans accompagnement, est égal à g^4 .

En conclusion,

Jojo peut servir $4g^3s + g^4$ cornets de 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins trois sont des glaces.

2. À partir de maintenant, le client choisit d'être servi dans une coupelle. On ne tient donc plus compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans la coupelle. Ainsi, la coupelle vanille-passion est identique à la coupelle passion-vanille.

a) Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules de parfums distincts, sans accompagnement ?

L'ordre dans lequel sont disposées les boules n'ayant plus d'importance, Jojo peut servir un cornet de b boules de parfums distincts et sans accompagnement en choisissant simultanément b parfums parmi les $g + s$ disponibles : $\binom{g+s}{b}$ choix. Donc

Jojo peut servir $\binom{g+s}{b}$ coupelles différentes de b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement.

b) Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec 2 boules de glace de parfums distincts, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements.

Pour servir une coupelle avec 2 boules de glace, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements, Jojo doit choisir successivement :

- 2 boules de glace parmi les g parfums : $\binom{g}{2}$ choix ;
- 1 boule de sorbet parmi les s parfums : s choix ;
- 3 accompagnements, i.e. chantilly, amandes et un des deux nappages : 2 choix.

Donc

Jojo peut servir $2\binom{g}{2}s$ coupelles avec 2 boules de glace, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements.

c) Chaque boule vaut 2€ et chaque accompagnement vaut 1€. Évéeane veut acheter une coupelle à 5€ dont tous les parfums sont distincts. Combien de coupelles différentes peut lui proposer Jojo ?

Une coupelle à 5€ peut contenir ou bien 2 boules et 1 accompagnement ou bien 1 boule et 3 accompagnements.

Pour servir une coupelle avec 2 boules et 1 accompagnement, Jojo doit choisir successivement :

- 2 boules parmi les $g + s$ parfums : $\binom{g+s}{2}$ choix ;
- 1 accompagnement parmi les 4 disponibles : 4 choix ;

ce qui donne $4\binom{g+s}{2}$ coupelles de ce type.

Pour servir une coupelle avec 1 boules et 3 accompagnements, Jojo doit choisir successivement :

- 1 boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;
- 3 accompagnements, i.e. chantilly, amandes et un des deux nappages : 2 choix ;

ce qui donne $2(g + s)$ coupelles de ce type.

Donc

Jojo peut proposer $4\binom{g+s}{2} + 2(g+s)$ coupelles différentes à 5€.

Remarque : On a $4\binom{g+s}{2} + 2(g+s) = 2(g+s)^2$.

- d) Les glaces et sorbets de Jojo sont répartis en c catégories contenant chacune 4 parfums. Sébastien veut une coupelle « méga-five » : 5 boules, de parfums distincts, dont deux choisies dans une première catégorie, deux d'une autre catégorie et une dernière d'une troisième catégorie. Le tout agrémenté de trois accompagnements, cela va de soi ! Combien existe-t-il de coupelles « méga-five » différentes ?

Pour servir une coupelle « méga-five », Jojo doit choisir successivement :

- 2 catégories parmi les c disponibles : $\binom{c}{2}$ choix ;
- 2 boules dans la première catégorie choisie : $\binom{4}{2}$ choix ;
- 2 boules dans la seconde catégorie choisie : $\binom{4}{2}$ choix ;
- 1 catégorie parmi les $c - 2$ restantes : $c - 2$ choix ;
- 1 boule dans cette catégorie : 4 choix ;
- 3 accompagnements, i.e. chantilly, amandes et un des deux nappages : 2 choix.

Donc

il y a $8(c - 2) \binom{c}{2} \binom{4}{2}^2$ coupelles « méga-five » différentes.
--

Remarque : On a $8(c - 2) \binom{c}{2} \binom{4}{2}^2 = 144c(c - 1)(c - 2)$.

- e) Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement ? Indication : on pourra se servir de gaufrettes pour séparer les parfums...

Pour séparer les $g + s$ parfums vendus par Jojo, nous introduisons $g + s - 1$ gaufrettes. Dans une coupelle de b boules, on va donc trouver $b + g + s - 1$ objets : les b boules et les $g + s - 1$ gaufrettes. Par conséquent, déterminer le contenu d'une coupelle revient à choisir simultanément les b positions des gaufrettes parmi les $b + g + s - 1$ objets de la coupelle. Par conséquent,

il y a $\binom{b + g + s - 1}{b}$ coupelles avec b boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement.
--