DEVOIR LIBRE 2

Calculs de sommes doubles

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} 2^k \right)$$
   (a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} 2^k = 2^{q+1} - 2^p$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n2^{n+1} + 1$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k$. (*permutez les signes* Σ)

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

3. (a) A l'aide de la question précédente, calculez :
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} (k+1)2^k$$
   (b) En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k$.

   (c) Que vaut la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$?