CORRECTION DU DEVOIR LIBRE 2

Exo I. 1. En remarquant que nous avons affait à une somme géomètrique de raison 2, nous obtenons que

$$\sum_{k=p}^{q} 2^k = \frac{2^{q+1}-2^p}{2-1} = 2^{q+1}-2^p$$

2. A fortiori, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{j=0}^{n}\left(2^{n+1}-2^j\right) = \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} 2^j \\ &= (n+1)2^{n+1} - \tfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = n2^{n+1}+1. \end{aligned}$$

Exo II. Il résulte alors du théorème de Fubini que

$$u_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k = u_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k.$$

En procédant au changement d'indice $\ell = k+1$, il suit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \ell 2^{\ell-1}.$$

De sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} \ell 2^{\ell-1} = u_n - 0 - (n+1)2^n = n2^{n+1}+1-(n+1)2^n = (n-1)2^n+1.$$

Exo III. Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k &= \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n}\left(i2^{i+1}+1\right) = 4\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1} + \sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= 4\left((n-1)2^n+1\right)+n+1 \end{aligned}$$

Exo IV. Il résulte alors du théorème de Fubini que

$$\begin{aligned} 4\left((n-1)2^n+1\right)+n+1 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}(k+1)2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)(k+1)2^k \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k - \sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k \\ &= (n+1)u_n - \sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons trouvé que

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k = (n+1)u_n - (4(n-1)2^n+1)+n+1) \\ &= (n+1)(n2^{n+1}+1) - (4(n-1)2^n+1)+n+1) \end{aligned}$$

La flemme de simplifier....

Exo V. Enfin, nous remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k - \sum_{k=0}^{n} k2^k = A_n - 2((n-1)2^n+1)$$