DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I. On note f et g les deux fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

1. Etudier les variations de f et de g sur $[0, +\infty[$.
2. Pour $x \geqslant 0$, en déduire que $x - \frac{x}{2}^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par

$$u_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \qquad (n \geqslant 0).$$

3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $u_n > 0$.
4. Pour $n \geqslant 1$, montrer que

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

5. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$. A l'aide de la première partie, établir

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n \qquad (n \geqslant 1)$$

6. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
7. Etude de la convergence de la suite (u_n).
   a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
   c. On admet que si deux suites convergent et vérifient $v_n \leqslant w_n$ pour $n \geqslant 0$, alors leurs limites vérifient

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n$$

   Monter que $\frac{5}{6} \leqslant \ln(\ell) \leqslant 1$ et en déduire un encadrement de ℓ.

Exo II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4} + x - x^2$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la nature de la suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$ et par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
   b. Pour $n \geqslant 1$, en déduire que $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
2. On suppose, dans cette question seulement, que $u_0 = 0$.
   Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle converge vers une limite ℓ, à déterminer.
3. On suppose, dans cette question seulement, que $u_0 < -\frac{1}{2}$.

a. Pour $x < -\frac{1}{2}$, montrer que $f(x) < x$.

b. Etablir que la suite (u_n) est décroissante.

c. Prouver que la suite (u_n) ne peut pas converger et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

4. On suppose, ans cette question seulement, que $-\frac{1}{2} < u_0 < \frac{3}{2}$

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir que $-\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, établir que $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|^2$

c. Pour $n \geqslant 0$, en déduire que $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|^{2^n}$ et conclure quand à la convergence de la suite (u_n).

Exo III. Dans cet exercice, on établit un encadrement classique de $n!$.
On rappelle que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - x$

a. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et établir que

$$f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

b. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire le signe de f

2. Soit g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - x - \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$.

a. Montrer que g est dérivable sur $[0,1[$ et établir que

$$g'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

b. Etudier les variations de g sur $[0,1[$ et en déduire le signe de g

3. Déduire des questions précédentes l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

4. En considérant l'encadrement précédent, pour $n \geqslant 1$ et $x = \frac{1}{2n+1}$, établir que

$$0 \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

5. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

a. Pour $n \geqslant 1$, établir que $0 < a_n < b_n$

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante, puis que la suite (b_n) est décroissante

c. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $C > 0$ tel que

$$a_n \leqslant C \leqslant b_n \qquad (n \geqslant 1)$$

puis que l'on a

$$\frac{1}{C} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n} \leqslant n! \leqslant \frac{1}{C} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n+\frac{1}{12n}} \qquad (n \geqslant 1)$$

Exo IV. inspiré d'ESCP

1. Montrer que $x \leqslant -\ln(1-x)$ pour $0 \leqslant x < 1$.
2. En déduire que $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ pour $k \geqslant 2$ puis que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n-1) \qquad (n \geqslant 2)$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.
4. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   Montrer que $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Qu'en déduit-on ?
5. On pose $v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$ pour $k \geqslant 0$.
   a. Exprimer v_k en fonction de u_k. En déduire que $2 \leqslant v_k \leqslant 2 + \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$.
   b. En calculant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$, montrer que

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad (n \geqslant 2)$$

   c. A l'aide de la deuxième question, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$.