CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I. 1. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ car $1+x>0$ pour $x \geqslant 0$ et le logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus pour $x \geqslant 0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g'(x) = f'(x) + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$$

En particulier, f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Comme $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$ et comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, nous obtenons d'une part que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et d'autre part que $\ln(1+x) \leqslant x$.
De même, comme g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $g(0) = f(0) - 0 = 0$, nous obtenons également que $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ puis que $x - \frac{x}{2}^2 \leqslant \ln(1+x)$.

3. Pour $n \geqslant 1$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : u_n > 0$$

- P_0 est vraie car $u_1 = \frac{3}{2} > 0$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1}. Comme

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

et comme $1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1 > 0$, il résulte de P_n que

$$u_{n+1} > 0$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour $n \geqslant 1$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

- P_1 est vraie car

$$\ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons P_{n+1}
Il résulte de la formule $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et de la proposition P_n que

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) &= \ln\left(u_n \times \left(1 + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \\ &= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

De sorte que la proposition P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \geqslant 1$.

5. En appliquant le résultat de la question I.2 au nombre réel $x = \frac{1}{2^k} \geqslant 0$ pour $k \geqslant 0$, il vient

$$\begin{aligned} & x - \frac{x}{2}^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{2^k} - \frac{\left(\frac{1}{2^k}\right)^2}{2} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

De sorte que l'on a

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^k} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad (k \geqslant 0).$$

En sommant cette inégalité de $k = 1$ à n, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Nous déduisons alors du résultat de la question 4 que

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n \qquad (n \geqslant 1)$$

6. Nous remarquons que S et T sont des sommes de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ et $\frac{1}{4} \neq 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant 1) \\ T_n &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3} \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

Il résulte de ces deux expressions que $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{3}$.

7. Etude de la convergence de la suite (u_n).

   a. Comme $\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 1$ et comme $u_n > 0$ d'après le résultat 1, nous remarquons que

   $$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > u_n \qquad (n \geqslant 0)$$

   A fortiori, la suite (u_n) est strictement croissante.

   b. La suite (S_n) est croissante (trivial) de limite 1 d'après l'étude menée en 6. A fortiori, nous avons

   $$S_n \leqslant 1 \qquad (n \geqslant 0)$$

   Il résulte alors de l'inégalité obtenue au 5 que

   $$\ln(u_n) \leqslant S_n \leqslant 1 \qquad (n \geqslant 1).$$

   En passant à l'exponentielle, qui est une fonction croissante, il suit

   $$u_n \leqslant \mathrm{e}_n^S \leqslant \mathrm{e}^1 \qquad (n \geqslant 1).$$

En particulier, la suite (u_n) est majorée (par 1). Comme elle et croissante, elle converge.

c. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue au 5, nous déduisons alors, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, des égalités $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{1}{3}$ que

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leqslant \ln(\ell) \leqslant 1$$

En passant à l'exponentielle, qui est croissante, il vient alors

$$\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

Exo II. 1. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - x + x^2 - = \frac{1}{4} - x + x^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

A fortiori, nous avons $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$. *Un TAB de VAR marche aussi très bien, mais c'est plus long*

b. Pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n = f(u_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}$, d'après le résultat de la question précédente. *Hop, raisonnement direct = une récurrence évitée*

2. *Pour étudier, la croissance de u_n, ça peut être utile d'étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$, ils ne le font pas faire, peut être veulent t'ils que l'on fasse autrement*
Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$

- P_0 est vraie car $0 = u_0 \leqslant \frac{1}{4} = f(0) = u_1$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} Comme $0 \leqslant u_{n+1}$ d'après P_n et comme $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ d'après 1b, nous obtenons que $0 \leqslant un + 1 \leqslant \frac{1}{2}$ de sorte que $0 \leqslant (un+1)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ et nous obtenons alors que

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) = \frac{1}{4} + u_{n+1} - (u_{n+1})^2 \geqslant \frac{1}{4} + u_{n+1} - \frac{1}{4} \geqslant u_{n+1}$$

En particulier P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. De sorte que la suite (u_n) est croissante *remarquez que j'ai eu besoin de $0 \leqslant u_{n+1}$ au cours de la démonstration, d'où la récurrence et l'expression de P_n)* Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ d'après la question 1b, elle converge. En faisant tendre n ver $+\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{4} + u_n - (u_n)^2$, il vient alors

$$\ell = \frac{1}{4} + \ell - \ell^2 \iff \ell^2 = \frac{1}{4} \iff \ell = -\frac{1}{2} \text{ ou } \ell = \frac{1}{2}$$

Comme ℓ est nécessairement positive (puisque u_n l'est, par conservation des inégalités larges par passage à la limite), La limite ℓ ne peut être égale qu'à $\frac{1}{2}$ de sorte que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

3. a. Pour $x < -\frac{1}{2}$, nous remarquons que $x^2 > \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ et que

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \tfrac{1}{4} - x^2 < x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \\ &< x \end{aligned}$$

   b. *idem à 2. Trouver 2 permet de trouver aussi 3b, l'idée de 2 vaut 8 points*
   Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad u_{n+1} \leqslant u_n < -1/2$$

   - P_0 est vraie car $u_1 = f(u_0) < u_0 < -\frac{1}{2}$ d'après 3a pour $x = u_0 < -\frac{1}{2}$.
   - Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} Comme P_n induit que $u_n < \frac{-1}{2}$, nous déduisons de 3a appliquée à $x = u_n < -\frac{1}{2}$, que

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n < -\frac{1}{2}$$

     De sorte que P_{n+1} est vraie

   En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc décroissante.

   c. Prouvons par l'absurde que (u_n) ne converge pas vers une limite finie ℓ. Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. En faisant $n \to +\infty$ dans

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{4} + u_n - (u_n)^2,$$

   il vient $\ell = \frac{1}{4} + \ell - \ell^2$ de sorte que $\ell = \pm\frac{1}{2}$. Or, la suite (u_n) étant décroissante, nous avons

$$u_n \leqslant u_0 \qquad (n \geqslant 0)$$

   et il vient $\ell \leqslant u_0 < -\frac{1}{2}$, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, ce qui est impossible/faux. En conclusion, la suite (u_n) ne peut pas converger vers une limite finie. Comme elle est décroissante, elle ne peut pas être minorée (et une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$...)

4. On suppose, dans cette question seulement, que $-\frac{1}{2} < u_0 < \frac{3}{2}$

   a. *Bon, j'ai du mal deviner pas ce que le correcteur attend de moi et je brûle d'utiliser mon savoir faire, alors, je vais faire le tableau de variation de f pour trouver la localisation de u_n* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), de dérivée $f'(x) = 1 - 2x$, qui nes'annule qu'en $\frac{1}{2}$. En bref, f est croissante (strictement) sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ de sorte qu'elle croit (strictement) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, puis elle décroit strictement sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Or, on a

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^2} = -\tfrac{1}{2} \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^2} = \tfrac{1}{2} \\ f(\tfrac{3}{2}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{3^2}{2^2} = \tfrac{1+6-9}{4} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   Moralité : lorsque $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, on obtient que $-\frac{1}{2} < f(x) \leqslant \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$. Autrement dit, l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ est stable par f. On peut maintenant montrer (par récurrence) que $-\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$ pour $n \geqslant 0$ Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n: \qquad -\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$$

- P_0 est vraie par définition de u_0 dans la question 4
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et comme $-\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$, d'après P_n, nous déduisons de la stabilité de l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ par f (pour $x = u_n$) que $-\frac{1}{2} < u_{n+1} < \frac{3}{2}$

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. *C'est long comme cela quand même, mais on sait faire...*

b. *Tiens, dommage, si on avait eu cela avant, on aurait pu racourcir 4a. Obligé de modifier le sujet : soit je l'ai mal recopié (probable), soit il était mal conçu (possible aussi)*

A fortiori, pour $x \in \mathbb{R}$, il résulte des identités remarquables (et aussi de $|-x| = |x|$) que

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \tfrac{1}{2}\right| &= \left|\tfrac{1}{4} + x - x^2 - \tfrac{1}{2}\right| = \left|\tfrac{-1}{4} + x - x^2\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{4} - x + x^2\right| = \left|\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2\right| = \left|x - \tfrac{1}{2}\right|^2 \end{aligned}$$

c. *Obligé de modifier le sujet la aussi.* Pour $n \geqslant 0$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n: \qquad \left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|^{2^n}$$

- P_0 est vraie car $|u_0 - \frac{1}{2}| = |u_0 - \frac{1}{2}|^{2^0}$.
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1}. En appliquant l'inégalité du 4b pour $x = u_n$, il résulte de $u_{n+1} = f(u_n)$ et de P_n que

$$\begin{aligned} \left|u_{n+1} - \tfrac{1}{2}\right| &= \left|f(u_n) - \tfrac{1}{2}\right| = \left|u_n - \tfrac{1}{2}\right|^2 = \left(\left|u_0 - \tfrac{1}{2}\right|^{2^n}\right)^2 \\ &= \left|u_0 - \tfrac{1}{2}\right|^{2^n \times 2} = \left|u_0 - \tfrac{1}{2}\right|^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

De sorte que P_{n+1} est vraie

En conclusion, P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Comme $-\frac{1}{2} < u_0 < \frac{3}{2}$, on a

$$-1 < u_0 - \frac{1}{2} < 1$$

de sorte que $\left|u_0 - \frac{1}{2}\right| < 1$. A fortiori, $\lim_{n \to +\infty} \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|^{2^n} = 0$ et il résulte alors de l'égalité précédente que

$$\lim_{n \to +\infty} \left|u_n - \frac{1}{2}\right| = 0$$

En particulier, la suite (u_n) converge vers le nombre $\frac{1}{2}$

Exo III. 1. a. Pour $0 \leqslant x < 1$, on a $1 + x \geqslant 1$ et $1 - x > 0$ de sorte que $\frac{1+x}{1-x} > 0$. En particulier, la composée de $x \mapsto \frac{1+X}{1-x}$, définie et dérivable sur $[0,1[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$, avec le logarithme, qui est défini et dérivable sur $]0, +\infty[$ est définie est dérivable sur $[0,1[$. De plus, on a

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2} - x \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

de sorte que

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{-1}{2(1-x)} - 1 = \frac{\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} - (1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

b. Comme $\frac{x^2}{1-x^2}$ s'annule en 0 et est strictement positif sur $]0{,}1[$, la fonction f est strictement croissante sur $[0{,}1[$. Comme $f(0) = \frac{1}{2}\ln(1) - 0 = 0$, nous en déduisons que f est nulle en 0 et strictement positive sur $]0{,}1[$.

2. a. Remarquons d'une part que la fonction $h(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$ est dérivable sur $[0{,}1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0{,}1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas et d'autre part que $g(x) = f(x) - h(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$. A fortiori, g est dérivable sur $[0{,}1[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - h'(x) = \tfrac{x^2}{1-x^2} - \tfrac{3x^2 3(1-x^2) - 3(-2x)x^3}{3^2(1-x^2)^2} \\ &= \tfrac{9x^2(1-x^2)}{9(1-x^2)^2} - \tfrac{-3x^4+9x^2}{9(1-x^2)^2} = \tfrac{9x^2-9x^4+3x^4-9x^2}{9(1-x^2)^2} \\ &= \tfrac{-6x^4}{9(1-x^2)^2} = \tfrac{-2x^4}{3(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

b. Comme $g'(x)$ est nul en 0 et strictement négative pour $0 < x < 1$, la fonction g est strictement décroissante sur $[0{,}1[$. Mais comme $g(0) = f(0) - 0 = 0$, la fonction g s'annule en 0 et est strictement négative sur $]0{,}1[$.

3. Comme $g(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x < 1$, en ajoutant $\frac{x^3}{3(1-x^2}$, il vient

$$g(x) + \frac{x^3}{3(1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

Comme $f(x) \leqslant 0$ pour $[0{,}1[$, nous obtenons alors que

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

4. Pour $n \geqslant 1$ et $x = \frac{1}{2n+1} \in [0{,}1[$, il résulte de l'encadrement précédent que

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{(\frac{1}{2n+1})^3}{3(1-(\frac{1}{2n+1})^2)}$$

Il résulte de l'identité remarquable $(2n+1)^2 - 1 = 2n(2n+2)$, en multipliant en haut et en bas par $(2n+1)$, que

$$\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{2n+1+1}{2n+1-1} = \frac{2n+2}{2n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{2n+1})^3}{3(1-(\frac{1}{2n+1})^2)} &= \frac{1}{3(2n+1)\left((2n+1)^2-1\right)} \\ &= \frac{1}{3(2n+1)(2n)(2n+2)} = \frac{1}{12(2n+1)n(n+1)} \end{aligned}$$

De sorte que l'on obtient que

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{12(2n+1)n^2}$$

En multipliant par $(2n+1) > 0$, il suit

$$0 \leqslant \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

C'est à dire que

$$0 \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

5. a. Pour $n \geqslant 1$, $n! > 0$, $\mathrm{e}^{-n} > 0$ et $n^{n+\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\ln(n)} > 0$ de sorte que $a_n > 0$ en tant que produit et quotient de nombres strictements positifs. De plus comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} > \mathrm{e}^0 = 1$, on a $b_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} > a_n$. En particulier, on a $0 < a_n < b_n$.

   b. Nous avons $a_n > 0$ et de plus

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!}} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{-1)}}{(n+1)\times n!}}{\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!}} \\
&= \frac{\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-1)}}{(n+1)}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-1)}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \\
&= \mathrm{e}^{-1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1)}
\end{aligned}$$

Et alors, la croissance de la fonction exponentielle et l'inégalité (baleze) obtenue à la question précédente, nous donne que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1)} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$$

De sorte que la suite (a_n) est croissante. On procède de même avec la suite (b_n) en remarquant que

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{12(n+1)}}}{a_n\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})} \\
&= \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{12}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1)+\frac{1}{12}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})}
\end{aligned}$$

Et encore une fois, la croissance de la fonction exponentielle et l'inégalité (baleze) obtenue à la question précédente, nous donne que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1+\frac{1}{12}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}))} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$$

De sorte que la suite (b_n) est décroissante. *Super mega technique cette question=Difficile/Parisienne*

c. Comme on n'a pas encore les suites adjacentes, il va falloir faire sans, en exploitant un peu les mêmes idées La suite (b_n) est décroissante et minorée par 0, de sorte qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. Comme $a_n = b_n \mathrm{e}^{\frac{-1}{12n}}$, nous remarquons que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \times \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-1}{12n}} = \ell \times 1 = \ell$$

En conclusion, la suite (a_n) converge en croissant vers ℓ et la suite (b_n) converge en décroissant vers ℓ. A fortiori, on a $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour $n \geqslant 0$ Donc, on peut prendre $C = \ell$ (existence). Maintenant, un tel C est nécessaiement unique (unicité) parce qu'il résulte de la conservation des inégalités larges par passage à la limite, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité $a_n \leqslant C \leqslant b_n$, que

$$\ell \leqslant C \leqslant \ell$$

De sorte que $C = \ell$. *Wahhhh, joli* En conclusion, nous avons

$$a_n \leqslant C \leqslant b_n \qquad (n \geqslant 1)$$

C'est à dire

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!} \leqslant C \leqslant \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} \qquad (n \geqslant 1)$$

En divisant par $C = \ell \geqslant a_1 > 0$ et en multipliant par $n!$, il vient

$$\frac{1}{C}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n} \leqslant n! \leqslant \frac{1}{C}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n+\frac{1}{12n}} \qquad (n \geqslant 1)$$

Exo IV. 1. La fonction $f(x) = x + \ln(1-x)$ est définie et dérivable sur $[0,1[$ et de plus

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leqslant 0 \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

De sorte que f est décroissante sur $[0,1[$ et vérifie $f(0) = 0+\ln(1) = 0$. A fortiori, on a $f(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x < 1$ et en soustrayant $\ln(1-x)$, nous obtenons que $x \leqslant -\ln(1-x)$ pour $0 \leqslant x < 1$.

2. Pour $k \geqslant 2$ et $x = \frac{1}{k} \in [0,1[$, il résulte alors de l'inégalité précédente que

$$\frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -\left(ln(k-1) - \ln(k)\right) = \ln(k) - \ln(k-1)$$

On a donc bien montré que $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ pour $k \geqslant 2$. En sommant cette relation pour k allant de 2 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} (\ln(k) - \ln(k-1))$$

La somme de droite est une somme telescopique et il resulte du changement d'indice $\ell = k-1$ que

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}(\ln(k)-\ln(k-1)) &= \sum_{k=2}^{n-1}\ln(k)-\sum_{k=2}^{n-1}\ln(k-1)=\sum_{k=2}^{n-1}\ln(k)-\sum_{\ell=1}^{n-2}\ln\ell\\ &= \sum_{k=2}^{n-2}\ln(k)+\ln(n-1)-\left(\ln(1)+\sum_{\ell=2}^{n-2}\ln(\ell)\right)\\ &= \ln(n-1)\end{aligned}$$

A fortiori, nous en déduisons que

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant \ln(n-1)$$

En ajoutant 1, il vient alors

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln(n-1)\qquad (n\geqslant 2)$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a

$$f'(x)=\frac{1(x+1)^2-x2(x+1)}{((x+1)^2)^2}=\frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3}=\frac{1-x}{(x+1)^3}>0\qquad (0\leqslant x<1)$$

A fortiori, f est strictement croissante sur [0,1[. Or $f(0)=0$ et donc

$$0\leqslant f(x)\qquad (0\leqslant x)$$

Rappel : f peut nous donner la localisation de la suite $u_{n+1}=f(u_n)$ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n:\qquad 0<u_n\leqslant\frac{1}{n}$$

- P_1 est vraie car $u_1=f(u_0)=f(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$ de sorte que $0<u_1\leqslant\frac{1}{1}$
- Supposons P_n pour un entier $n\geqslant 0$ et montrons P_{n+1}. La fonction f étant croissante sur $[0,\frac{1}{n}]$, pour $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$, on a

$$0=f(0)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}=\frac{1}{n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}=\frac{1}{(1+n)^2}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

  A fortiori, il résulte de P_n que $u_{n+1}=f(u_n)\in[0,\frac{1}{n+1}]$. De sorte que la proposition P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n\in\mathbb{N}$. On en déduit que la suite (u_n) tends vers 0, via le principe des gendarmes.

4. a. On déduit de la relation $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{u_n}{(u_n+1)^2}$ que

$$\begin{aligned}v_k &= \frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}=\frac{(u_k+1)^2}{u_k}-\frac{1}{u_k}\\ &= \frac{(u_k)^2+2u_k+1}{u_k}-\frac{1}{u_k}=u_k+2+\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_k}\\ &= u_k+2\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$ d'après le résultat de la question 4, on obtient que

$$2 \leqslant v_k \leqslant 2 + \frac{1}{k} \qquad (k \geqslant 1)$$

b. En sommant v_k pour $k = 1$ à $k = n-1$, nous déduisons de la relation $v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$ et du principe des sommes telescopiques que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k}\\ &= \sum_{\ell=2}^{n}\frac{1}{u_\ell} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k} = \sum_{\ell=2}^{n-1}\frac{1}{u_\ell} + \frac{1}{u_n} - \left(\frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{u_k}\right)\\ &= \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}\end{aligned}$$

Mais on peut aussi encadrer cette somme en utilisant que $2 \leqslant v_k \leqslant 2 + \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$. De sorte qu'en sommant autrement

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(2 + \frac{1}{k}\right)$$

C'est à dire

$$2(n-1) \leqslant \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \leqslant 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Comme $u_1 = \frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{u_1} = 4$ et il vient alors

$$2(n+1) = 2(n-1) + \frac{1}{u_1} \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n-1) + \frac{1}{u_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

En conclusion

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \qquad (n \geqslant 2)$$

c. Il résulte alors du résultat de la question 2

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant 2(n+1) + 1 + \ln(n-1) \qquad (n \geqslant 2)$$

En divisant par n, il vient

$$2 + \frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{nu_n} \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n} \qquad (n \geqslant 2)$$

Et comme les membres aux extrémités tendent vers 0, d'après le théorème de croissance comparée, il résulte du principe des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$$