

DEVOIR SURVEILLE 2

On rappelle que $e^x = 1 + x\alpha(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 1$.

Exo I. Une classe comporte 45 étudiants, dont 24 filles, avec 20 internes dont 15 garçons

1. A chaque séance de cours, le professeur de mathématiques interroge au hasard trois étudiants l'un après l'autre.
 - a. Combien y a-t'il de façons de procéder ?
 - b. Combien y a-t'il de façons de procéder, avec deux garçons interrogés ?
 - c. Combien y a-t'il de façons de procéder avec au plus un garçon interrogé ?
2. Le professeur procède à l'élection de deux délégués.
 - a. Combien y a-t-il de choix de délégués possibles ?
 - b. Combien y a-t-il de choix de deux délégués internes ?
 - c. Combien y a-t-il de choix avec exactement un délégué fille externe ?
3. A la fin de 5 cours, le professeur demande à un étudiant de nettoyer le tableau.
 - a. Combien y a-t'il de façon de procéder, pour que le nettoyage ait été effectué au moins une fois par une fille ?
 - b. Combien y a-t'il de façon de procéder, pour que le nettoyage soit fait exactement 3 fois par l'un ou l'autre des 2 super bluffeurs de la classe ?
 - c. Combien y a-t'il de façon de procéder, pour que les noms des élèves désignés respectent l'ordre croissant de l'alphabet

Exo II. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. L'objectif est d'établir l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $\ln x \leq x - 1$.
2. On pose $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Montrer que $m > 0$ et que $\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) = 0$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) \leq 0$ et conclure.

Exo III. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante
2. Montrer que $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire que (S_n) ne peut pas converger, puis que (S_n) tends vers $+\infty$.
4. SCILAB : écrire un programme qui demande un nombre réel M à l'utilisateur et qui renvoie le premier indice n pour lequel $S_n \geq M$.

Exo IV. SCILAB : Ecrire un programme demandant un entier n à l'utilisateur et affichant la valeur de $S = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 + 1}$.

Exo V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = x^x \quad (x > 0)$$

1. Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue (à droite) en 0. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que g , la restriction de f au départ à l'intervalle $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$, réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Montrer qu'il existe une application $\varphi : J \rightarrow I$ vérifiant

$$\varphi(x)^{\varphi(x)} = x \quad (x \in J)$$

6. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln(x)} = 0$.

Exo VI. Par convention, on pose

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\varphi_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$

1. Calculez φ_n pour $0 \leq n \leq 5$.
2. Pour $n \geq 0$, établir que $\varphi_n + \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire que

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

4. En utilisant la formule du binôme deux fois, prouver alors que

$$\varphi_n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2p+1} 5^p \quad (n \in \mathbb{N})$$

5. Calculez φ_{11} .
6. Démontrez que

$$\varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exo VII. On considère les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ uniquement définies par la donnée de $b_0 > a_0 > 0$ et par

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouver que $a_n > 0$ et $b_n > 0$
2. Pour $n \geq 0$, établir que

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n)$$

3. Pour $n \geq 0$, montrer que $a_n \leq b_n$
4. En déduire le sens de variation des suites (a_n) et (b_n)
5. Pour $n \geq 0$, montrer que $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b - a}{2^n}$
6. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes
7. SCILAB : compléter le script suivant afin qu'il affiche a_n et b_n pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ lorsque n est entré par l'utilisateur

```
n=input("entrer n")
a = 1; b = 2;
for k = .....
    a = .....
    b = .....
end
disp(.....)
```

8. SCILAB : transformer le programme précédent en fonction « suitesfofolles » qui renvoie a_n et b_n lorsque l'utilisateur rentre n .