CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 2

Exo I. 1. a. C'est le nombre de 3-listes sans répétition de l'ensemble des 45 étudiants :

$$A_{45}^{3} = 45 \times 44 \times 43$$

b. C'est le nombre de 3-listes sans répétition avec une fille et deux garçons : On choisit la fille, sa position, les deux garcons, qui permuttent, il y en a

$$\binom{24}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{2} \times 2! = \binom{24}{1} \times \binom{3}{1} \times A_{21}^{2}$$

c. On procède par complémentaire. En prenant toutes les manières de procéder et en enlevant cellesqui ne comportent pas de garçons (c'est à dire que des filles). Il y en a

$$A_{45}^{3} - A_{24}^{3}$$

2. a. Il y a autant de choix de délégués que de parties à 2 éléments de l'ensemble des 45 étudiants, c'est-à-dire

$$\binom{45}{2} = \frac{45 \times 44}{2}$$

b. C'est le nombre de parties à 2 éléments de l'ensemble des 20 internes :

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2}$$

c. On choisit une fille externe, puis on lui choisit un compagnon parmi les garçons ou les filles internes. La réponse est

$$\binom{5}{1} \times \binom{40}{1} = 5 \times 40$$

3. a. On procède par complémentaire, en prenant tous les nettoyages possibles (les 5-listes de l'ensemble des étudiants) privé des nettoyages éffectués uniquement par des garçons. Il y en a

$$45^3 - 21^3$$

b. On choisit les 3 cours (positions) ou les super bluffeurs sont de corvée de nettoyage (pour cause d'abus massifs), puis, pour chaque nettoyage, onchoisit le super bluffeur qui le fait. Pour chacun des deux autres nettoyages à effectuer, on choisit un étudiant qui ne bluffe pas. La réponse est

$$\binom{5}{3}\binom{2}{1}^{3} \times 43^{2}$$

c. La, c'est subtil = 6 points (penser aux bananes des 13 singes). On commence par ordonner les etudiants par ordre alphabetique et on place 5 points au total à coté de leur nom pour déterminer qui fera les nettoyages, ensuite, on ecrit les noms autant de fois qu'ils ont de points, dans l'ordre alphabetique. Cela revient a determiner le nombre de (44 + 5) listes de l'ensemble {point,barre} utilisant 44 barres et 5 points (ou le nombre de mots de 49 lettres utilisant 44 a et 5 b, si vous preferez). Il suffit de choisir l'emplacement des 5 points sur les 49 emplacements possibles.

$$\binom{49}{5}$$

4.

```
n = input("nombre de réponses justes")
if n <= 3 then
   disp("Padawan ?")
elseif n < 6
   disp("Jedi")
elseif n < 9
   disp("Lord Sith !")
else
   disp("Darth Olus, Imperator !")
end
```

Exo II. 1. La fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{si } x = 1 \\ < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En particulier, f est croissante sur [0,1] et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$ nous en déduisons que f est négative sur $]0, +\infty[$ et par suite que $\ln x \leqslant x - 1$, pour tout réel $x > 0$.

2. Comme $x_k > 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous remarquons que $\sum_{k=1}^{n} x_k > 0$. En divisant par $n > 0$, nous concluons que

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$$

A fortiori, nous déduisons de la définition du nombre m que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m} - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} x_k - n \\ &= \frac{1}{m} \times mn - n = 0 \end{aligned}$$

3. En appliquant le résultat de 1 à chaque nombre $\frac{x_k}{m} > 0$, il vient

$$\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \frac{x_k}{m} - 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

En sommant ces inégalités, nous déduisons alors du résultat du 2 que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = 0$$

4. A fortiori, nous déduisons du résultat précédent et des propriétés du logarithme que

$$\begin{aligned} 0 \quad & \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(x_k) - \ln(m))) \\ & \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(m) \\ & \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - n\ln(m) \end{aligned}$$

En particulier nous obtenons que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant n\ln(m)$$

En divisant par n, il vient

$$\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x) \leqslant \ln(m)$$

En prenant l'exponentielle (qui est une fonction croissante), de cette relation, nous concluons alors que

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \quad & = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \\ & \leqslant \exp(\ln(m)) \\ & \leqslant m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$

Exo III.

```
n = input("n : ")
s = 0
for k=2:n
   s = s + 1 / ( k^2 + 1 )
end
disp(s)
```

Exo IV. 1. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$$

La suite (S_n) est donc croissante

2. Pour $n \geqslant 1$ et $n \leqslant k \leqslant 2n$, on a $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{k}$. En sommant cette relation, il découle de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned} S_{2n} - Sn &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Démontrons par l'absurde que (S_n) ne peut pas converger. Si elle convergeait, il existerait un nombre réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ et alors, on aurait d'une part que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ell$ et d'autre part que $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = \ell - \ell = 0$ De sorte, que par conservation des inégalités larges par passage à la limite dans $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ on aboutirait à la proposition fausse $0 \geqslant \frac{1}{2}$. A fortiori, la suite (S_n) ne peut pas converger. Comme elles est croissante, elle diverge alors nécessairement vers $+\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
4.

```
M = input("M : ")
s = 0
n=0
while (s < M)
    n = n + 1
    s = s + 1/n
end
disp(n, "n=")
```

Exo V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = x^x \qquad (x > 0)$$

1. Pour $x > 0$, on a $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$. L'application $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par composition avec l'exponentielle qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, nous obtenons que la fonction f est dérivable (et donccontinue) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Nous remarquons que

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)} = 1 + x\ln(x) \times \alpha(x\ln x),$$

Avec $\lim_{u\to 0} \alpha(u)$. Or, il résulte du théorème de croissance comparée que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. A fortiori, par composition des limites nous obtenonsque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 0 \times 1 = 1 = f(0)$$

De sorte que f est continue (à droite) en 0. De même, nous remarquons que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 + x\ln(x) \times \alpha(x\ln x) - 1}{x} = \ln(x) \times \alpha(x\ln x)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, nous obtenons alors que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en 0 (elle admet une asymptote verticale en 0).

3. En dérivant, nous obtenons que

$$f'(x) = (x\ln x)' \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right)' \mathrm{e}^{x\ln(x)} = (\ln(x)+1)' \mathrm{e}^{x\ln(x)}$$

Comme la dérivée de f est du signe de $\ln(x)+1$, qui est strictement négative sur $]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$ et strictement positive sur $]\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$, l'application f, qui est continue en 0, est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{\mathrm{e}}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$. Par ailleurs, nous avons $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Et lim_x→+∞f(x)=+∞. Ceci suffit à dresser le tableau de variation de f (trop embettant à dactylographier)

4. Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, c'est une bijection de I dans $f(I) = [f(\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}, +\infty[= J$

5. Comme f est une bijection de I dans J, sa bijection reciproque $\varphi = f^{-1} : J \to I$ satisfait la relation

$$f \circ \varphi = \mathrm{Id}_J$$

Ce qui revient à dire que

$$\varphi(x)^{\varphi(x)} = f(\varphi(x)) = f\circ\varphi(x) = \mathrm{Id}_J(x) = x \qquad (x \in J)$$

6. En prenant le logarithme de la relation précédente, il vient

$$\varphi(x)\ln(\varphi(x)) = \ln(x) \qquad (x \in J)$$

De sorte que (comme $\varphi(x) \in I$, on a $\varphi(x) \neq 0$ pour $x \in J$)

$$\frac{\varphi(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(\varphi(x))} \qquad (x \in J)$$

Comme φ est la bijection réciproque de f et comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, nous obtenons alors que $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$ et donc que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(\varphi(x))} = 0.$$

Exo VI. 1.

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \textstyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} = 1\\
\varphi_1 &= \textstyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1+0 = 1\\
\varphi_2 &= \textstyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2-k}{k} = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 1+1+0 = 2\\
\varphi_3 &= \textstyle\sum_{k=0}^{3}\binom{3-k}{k} = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} + \binom{1}{2} + \binom{0}{3} = 1+2+0+0 = 3\\
\varphi_4 &= \textstyle\sum_{k=0}^{4}\binom{4-k}{k} = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + 0 + 0 = 1+3+1 = 5\\
\varphi_5 &= \textstyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5-k}{k} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} + 0 + 0 = 1+4+3 = 8
\end{aligned}$$

Ca peut aider de faire un triangle de pascal (mais cela n'est pas nécessaire)

2. Pour $n \geqslant 0$, nous déduisons du changement d'indice $\ell = k-1$, puis de la formule de Pascal, puis du changement d'indice $k+1 = j$ (il y a du chasles aussi dans le tas) que

$$
\begin{aligned}
\varphi_n + \varphi_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \binom{n+1}{0} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n-\ell}{\ell+1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k+1} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+2-j}{j} \\
&= \binom{n+2}{0} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+2-j}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+2-j}{j} \\
&= \varphi_{n+2}
\end{aligned}
$$

3. La suite φ verifie une relation de récurrence linéaire. On pourra utiliser le cours pour trouver φ_n mais c'est plus simple de faire par récurrence Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$
P_n) \qquad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)
$$

- P_0 et P_1 sont vrais car, d'après la question 1,

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 &= 1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \tfrac{2\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) \\
\varphi_1 &= 1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} (1-1) \tfrac{1}{2^2} + (2-(-2)) \tfrac{\sqrt{5}}{2\times 2} + (1-1) \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right)
\end{aligned}
$$

- Supposons P_n et P_{n+1} pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+2}. D'après le résultat de la question 2 et les propositions P_n et P_{n+1}, nous avons

$$
\begin{aligned}
\varphi_{n+2} &= \varphi_n + \varphi_{n+1} \\
\varphi_{n+2} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) + \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \\
\varphi_{n+2} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left(1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

  Or, il se trouve que

$$
\begin{aligned}
\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4} = 1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\
\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \tfrac{1}{4} + -\tfrac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4} = 1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

A fortiori, nous obtenons alors que

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+2} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right)
\end{aligned}$$

En particulier P_{n+2} est vrai. *(bon, finalement, c'est pas beaucoup mieux que la technique du cours, c'est peut être même pire)*

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant la formule du binôme deux fois au résultat de la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}
\varphi_n = &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{5}^k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{2^{n+1}}\left(-\sqrt{5}\right)^k\right) \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\sqrt{5}^k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\sqrt{5}^k\right) \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\sqrt{5}^k\left(1-(-1)^k\right)
\end{aligned}$$

Or le terme $1-(-1)^k$ est nul si $k=2p$ est pair et vaut 2 si $k=2p+1$ est impair. A fortiori, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_n = &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\sqrt{5}^k\left(1-(-1)^k\right) \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{\substack{k=0\\k=2p}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\sqrt{5}^k\underbrace{\left(1-(-1)^k\right)}_{=0} + \sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{n+1}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k\underbrace{\left(1-(-1)^k\right)}_{=2}\right) \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{n+1}\binom{n+1}{k}2\sqrt{5}^k \\
= &\ \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^{n}}\sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n+1}\binom{n+1}{2p+1}\sqrt{5}^{2p+1} \\
= &\ \frac{1}{2^{n}}\sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n+1}\binom{n+1}{2p+1}5^p
\end{aligned}$$

5. A l'aide de la formule précédente, il vient

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \frac{1}{2^{11}} \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant 12} \binom{12}{2p+1} 5^p \\ &= \tfrac{1}{2^{11}}\left(\tbinom{12}{1} + \tbinom{12}{3}5 + \tbinom{12}{5}5^2 + \tbinom{12}{7}5^3 + \tbinom{12}{9}5^4 + \tbinom{12}{11}5^5\right)\end{aligned}$$

Comme $\binom{12}{1} = \binom{12}{11} = 12$, $\binom{12}{3} = \binom{12}{9} = \frac{12\times11\times10}{1\times2\times3} = 11\times 20$ et comme $\binom{12}{5} = \binom{12}{7} = \frac{12\times11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4\times5} = 11\times9\times8$, on pourrait simplifier un peu, mais bon, on a d'autres trucs à faire. Et puis, cela me parait plus rapide de faire des additions via la qiuestion 2 pour trouver $\varphi_1 1$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad \varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = (-1)^n$$

- P_1 est vraie car

$$\varphi_1^2 - \varphi_2\varphi_0 = 1^2 - 2\times 1 = -1 = (-1)^1$$

- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons P_{n+1} D'après le résultat de la question 2, nous avons $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$ et $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$, de sorte que

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n+2}\varphi_n &= \varphi_{n+1}\times\varphi_{n+1} - (\varphi_{n+1}+\varphi_n)\varphi_n) \\ &= \varphi_{n+1}\times(\varphi_n+\varphi_{n-1}) - (\varphi_{n+1}+\varphi_n)\varphi_n) \\ &= \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} - \varphi_n^2 \\ &= -\left(\varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1}\right) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

  Afortiori, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exo VII. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad a_n > 0 \qquad \text{ET} \qquad b_n > 0$$

- P_0 est vraie d'après l'énoncé
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} D'après P_n et la définition des suites (a_n) et (b_n), nous avons

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{a_n+b_n}{2} > 0 \\ b_{n+1} &= \sqrt{\underbrace{a_{n+1}b_n}_{>0}} > 0 \end{cases}$$

  A fortiori, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour $n \geqslant 0$, nous déduisons de la définitiondes deux suites que

$$\begin{aligned}b_{n+1} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}b_n} - \tfrac{a_n+b_n}{2} \\ &= \tfrac{2\sqrt{a_{n+1}b_n} - a_n - b_n}{2}\end{aligned}$$

En multipliant en haut et en bas par $\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} > 0$, il vient

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{2\sqrt{a_{n+1}b_n} - a_n - b_n}{2} \\
&= \frac{(2\sqrt{a_{n+1}b_n} - a_n - b_n)(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \\
&= \frac{2\sqrt{a_{n+1}}b_n + 2a_{n+1}\sqrt{b_n} - a_n\sqrt{b_n} - an\sqrt{a_{n+1}} - b_n\sqrt{b_n} - b_n\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}b_n + 2a_{n+1}\sqrt{b_n} - a_n\sqrt{b_n} - an\sqrt{a_{n+1}} - b_n\sqrt{b_n}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}b_n - an\sqrt{a_{n+1}} + (a_n + b_n)\sqrt{b_n} - a_n\sqrt{b_n} - b_n\sqrt{b_n}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}(b_n - an)}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}
\end{aligned}
$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad a_n \leqslant b_n$$

- P_0 est vraie car $b_0 > a_0$.
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} D'après P_n et d'après le résultat de la quesrtion précédente, nous avons

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \underbrace{(b_n - an)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

(le terme de gauche est strictement positif d'apres le resultat de 1). A fortiori, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour $n \geqslant 0$, nous avons

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0$$

En particulier, la suite (a_n) est croissante. De même, nous avons

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_{n+1}b_n}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2b_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n} + \frac{1}{2}}$$

Comme $a_n \leqslant b_n$, nous remarquons que $\frac{a_n}{2b_n} \leqslant \frac{1}{2}$ et par suite que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n} + \frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

En particulier, la suite (b_n) est décroissante

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

- P_0 est vraie car $b_0 > a_0 > 0$.
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} D'après le résultat de la question 2, nous avons

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - an)$$

A fortiori, il résulte de P_n que

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \underbrace{(b_n - an)}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \\ b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - an) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \frac{b_0 - a_0}{2^n} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

A fortiori, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

6. Il résulte du principe des gendarmes et du résultat précédent que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Comme la suite (a_n) est croissante et comme la suite (b_n) est décroissante, d'après le résultat de la question 4, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes
7.

```
n=input("entrer n")
a = 1; b = 2;
for k = 1: n
  a = (a+b)/2
  b =  sqrt(a*b)
end
disp(b, "b=", a, "a=")
```

8.

```
function [a,b] = suitesfofolles(n)
a = 1; b = 2;
for k = 1: n
  a = (a+b)/2
  b =  sqrt(a*b)
end
endfunction
```