DEVOIR SURVEILLE 3

Exo I. ESPACES VECTORIELS. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (1,3,-1,0), \qquad v = (5,4,-2,1), \qquad w = (-13,5,1,-4)$$

1. Montrer que $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + 7t = 0 \text{ et } x + y + 4z - 2t = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base.
2. a. Montrer que (u,v,w) est une famille liée.
   b. En déduire une base de $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$
   c. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.
   Difficile : si (s,t) est une base de F, procéder à une élimination en partant de $(x,y,z,t) \in F \iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z,t) = \lambda.s + \mu.t \iff$...
3. Déterminer une base de $F \cap H$.

Exo II. ESPACES VECTORIELS. Le but de cet exercice est de prouver les résultats sur les suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 (on n'a donc pas le droit de les utiliser, mais on peut s'en inspirer).

On cherche à trouver toutes les suites vérifiant l'équation

$$E) \qquad \forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+2} - u_n = 0$$

1. A quelle condition portant sur le nombre réel fixé x, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle solution de E) ?
2. Soit u une suite quelconque vérifiant l'équation E) et deux solutions distinctes x_1 et x_2 de la condition obtenue à la question précédente. Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 & = \lambda + \mu \\ u_1 & = \lambda x_1 + \mu x_2 \end{cases}$$

3. Par récurrence, en déduire alors que l'on a

$$u_n = \lambda(x_1)^n + \mu(x_2)^n \qquad (n \geqslant 0)$$

4. En déduire que l'ensemble des suites u vérifiant l'équation E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base
5. On s'intéresse desormais à l'équation

$$E*) \qquad \forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

   a. Pour quels nombres réels x, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle solution de E*) ?
   b. Pour quels nombres réels x, la suite $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle solution de E*) ?
   c. Montrer que l'ensemble des suites u vérifiant l'équation E*) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base.

Exo III. **EDHEC.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x > 0, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f, limites comprises
   b. Déterminer les branches infinies de la courbe de f *(question ajoutée)*
   c. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
2. Les scrips suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
   u = exp(-u)/u
   n = n + 1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100 000
   u = exp(-u)/u
   n = n + 1
end
disp(n)
```

3. a. Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = e^{-x} - x^2$ pour $x \geqslant 0$.
   b. En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera a.
   c. Montrer que $\frac{1}{e} < a < 1$.
4. a. Etablir les deux inégalités $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
   b. En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   c. On pose $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
      i. Déterminer $h(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que h est continue en 0.
      ii. Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.
      iii. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
      iv. Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exo IV. Pour $N \geqslant 3$ fixé, on considère $N+1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_N$ ayant les contenus suivants :

- L'urne $\mathcal{U}_0$ contient une seule boule, qui porte le numéro 0.
- pour $1 \leqslant i \leqslant N$, l'urne $\mathcal{U}_i$ contient N boules : i boules numérotées de 1 à i et $N - i$ boules indistinguables portant le numéro 0.

On choisit une urne au hasard, on y prélève une boule dont on relève le numéro puis on la remet dans son urne d'origine. Le tirage suivant se fait dans l'urne dont le numéro est celui de la boule qui vient d'être tirée. On répète ainsi ce processus : si, lors du $k^{\text{ième}}$ tirage ($k \geqslant 1$), on tire (avec remise) une boule portant le numéro j, alors le $(k+1)^{\text{ième}}$ tirage se fera dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour $0 \leqslant j \leqslant N$, on note U_j=« le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$ » et pour $0 \leqslant k \leqslant N$, on note A_k=« la première boule tirée porte le numéro k »

1. a. Justifier que $P(U_0) + P(U_1) + \ldots P(U_N) = 1$.
   b. Déterminer $P_{U_i}(A_0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$. Qu'en est-il pour $i = 0$?

c. Montrer que $P(A_0)=\frac{1}{2}$ *(on pourra faire un changement d'indice pour calculer la somme obtenue)*

2. a. Soit $k\in[\![1,N]\!]$ fixé. Justifier que $P_{U_j}(A_k)=0$ pour $j\in[\![0,k-1]\!]$ puis déterminer $P_{U_j}(A_k)$ pour $j\in[\![k,N]\!]$.

   b. Pour $k\in[\![1,N]\!]$, montrer que $P(A_k)=\dfrac{N-k+1}{N(N+1)}$.

   c. Calculer $\sum_{k=1}^{N}P(A_k)$. Ce résultat est-il cohérent avec 1.c ?

   Dans la suite de l'exercice, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,N]\!]$, on introduit l'événement $A_{n,k}=$ « obtenir la boule numéro k lors du $n^{\text{ième}}$ tirage »

3. Pour $r\in[\![0,N]\!]$, on pose $E_r=$ « obtenir successivement les numéros $r,r-1,r-2,\ldots,3,2,1,0$ »

4. Exprimer E_3 à l'aide des événements $(A_{n,k})$. En déduire que
$$P(E_3)=\frac{(N-2)(N-1)}{N^4(N+1)}.$$

5. Exprimer E_N à l'aide des événements $(A_{n,k})$ puis montrer que
$$P(E_N)=\frac{c}{N^m(N+1)},$$
avec c et m à préciser en fonction de N.

6. a. Calculer $P_{A_{1,i}}(A_{2,k}$ pour $k\in[\![1,N]\!]$ et $i\in[\![0,N]\!]$ *on pourra séparer les cas $k>i$ et $k\leqslant i$*

   b. En déduire $P(A_{2,k})$ pour $k\in[\![1,N]\!]$.

7. a. Pour $a\in\mathbb{N}$ et $b\geqslant a$, prouver que $\displaystyle\sum_{j=a}^{b}\binom{j}{a}=\binom{b+1}{a+1}$.

   b. Pour $k\in[\![1,N]\!]$, $i\in[\![0,N]\!]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})$.

   c. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on admet que
$$P(A_{n,k})=\frac{\binom{N+n-k}{n}}{N^n(N+1)}\qquad(1\leqslant k\leqslant N)$$
   Montrer que $P(A_{n,0})=1-\dfrac{\binom{N+n}{n+1}}{N^n(N+1)}$. Ce résultat est-il cohérent avec 1c ?

   d. Par récurrence sur n, montrer le résultat admis au 5b.

Exo V. SCILAB.

1. Quel est le calcul effectué par la boucle ci-dessous ?

```
P=1; F = 1; c=1; S=0
for j=1:10
  S = S + c * P / F;
  c = - c;
  P = 2 * P;
  F = j * F;
end;
disp(S)
```

2. Ecrire une fonction qui prend n et p en entrée et renvoie $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{k^p}$