CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 3

Exo I. ESPACES VECTORIELS.

1. On remarque que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in H &\iff \begin{cases} 3x - y + 7t = 0 \\ \\ x + y + \boxed{4z} - 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x\boxed{-y} + 7t = 0 \\ \\ 4x + \boxed{4z} + 5t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 3x + 7t \\ z = -x - \frac{5}{4}t \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = (x,3x+7t,-x-\tfrac{5}{4}t,t) = x(1,3,-1,0) + t(0,7,-\tfrac{5}{4},1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\left((1,3,-1,0),(0,7,-\tfrac{5}{4},1)\right) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\left((1,3,-1,0),(0,28,-5,4)\right)
\end{aligned}$$

   En particulier $H = \mathrm{Vect}\left((1,3,-1,0),(0,28,-5,4)\right)$ de sorte que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont $\left((1,3,-1,0),(0,28,-5,4)\right)$ est une famille génératrice. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, de sorte qu'ils constituent une base de H.

2. a. Comme $7u - 4v = 7(1,3,-1,0) - 4(5,4,-2,1) = (7-20,21-16,1,-4) = w$, la famille (u,v,w) est liée.

   b. D'après la relation précédente, la famille (u,v) est génératrice de $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et constituent donc une base de F

   c. Procédons à une élimination. Comme(u,v) est une base de F, on a

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z,t) = \lambda.u + \mu.v \\
&\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z,t) = \lambda.(1,3,-1,0) + \mu.(5,4,-2,1) \\
&\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = \lambda + 5\mu \\ y = 3\lambda + 4\mu \\ z = -\lambda - 2\mu \\ t = \boxed{\mu} \end{cases} \\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - 5t = \lambda \\ y - 4t = 3\lambda \\ z + 2t = \boxed{-\lambda} \\ \mu = t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + z - 3t = 0 \\ y + 3z + 2t = 0 \\ \lambda = -z - 2t \end{cases}
\end{aligned}$$

   En particulier, on a $F = \{(x,y,z,t) : x + z - 3t = 0 \text{ et } y + 3z + 2t = 0\}$

3. Pour cela, l'idéal est d'utiliser un paramétrage et une équation cartésienne. Comme $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ et comme $H = \{(x,y,z,t) : 3x-y+7t = 0 = x+y+4z-2t\}$

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \cap H &\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}(u,v) \text{ et } 3x - y + 7t = 0 = x + y + 4z - 2t \\
&\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z,t) = \lambda u + \mu v \text{ et } \begin{cases} 3x - y + 7t = 0 \\ x + y + 4z - 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \text{ et } \begin{cases} (x,y,z,t) = \lambda(1,3,-1,0) + \mu(5,4,-2,1) \\ 3x - y + 7t = 0 \\ x + y + 4z - 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \text{ et } \begin{cases} (x,y,z,t) = \lambda(1,3,-1,0) + \mu(5,4,-2,1) \\ 3(\lambda + 5\mu) - (3\lambda + 4\mu) + 7\mu = 0 \\ (\lambda + 5\mu) + (3\lambda + 4\mu) + 4(-\lambda - 2\mu) - 2\mu = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \text{ et } \begin{cases} (x,y,z,t) = \lambda(1,3,-1,0) + \mu(5,4,-2,1) \\ 18\mu = 0 \\ -\mu = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R} : (x,y,z,t) = \lambda(1,3,-1,0) = \lambda u \\
&\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\big((1,3,-1,0)\big) \iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}(u)
\end{aligned}$$

En particulier $F \cap H = \mathrm{Vect}((1,3,-1,0))$ et $u = (1,3,-1,0)$ est une base de $F \cap H$. *Bon, on peut faire beaucoup plus simple et plus rapide avec des outils (la dimension) que l'on aura le mois prochain.*

Exo II. ESPACES VECTORIELS.

1. Comme x^n est nul si et seulement si $x = 0$ et $n \geqslant 1$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
(x^n) \text{ vérifie (E)} &\iff \forall n \geqslant 0, \quad x^{n+2} - x^n = 0 \\
&\iff \forall n \geqslant 0, \quad x^n(x^2 - 1) = 0 \\
&\iff x^2 - 1 = 0 \\
&\iff (x+1)(x-1) = 0 \\
&\iff x = -1 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

La condition attendue était l'équation caractéristique $x^2 - 1 = 0$.

2. En resolvant le système, nous remarquons que

$$\begin{cases} u_0 &= \lambda + \mu \\ u_1 &= \lambda x_1 + \mu x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 &= \boxed{\lambda} + \mu \\ u_1 - x_1 u_0 &= \mu(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_0 &= \boxed{\lambda} + \mu \\ \frac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1} &= \boxed{\mu} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_0 - \frac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1} &= \boxed{\lambda} \\ \frac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1} &= \boxed{\mu} \end{cases}$$

En particulier, il existe une unique solution $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ au système (parce que $x_1 - x_2 \neq 0$).

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_n = \lambda(x_1)^n + \mu(x_2)^n$$

- $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies d'après le résultat de la question précédente
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+2}$.
  Comme les suites $u = (u_n)$, $v = \big((x_1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = \big((x_2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont

l'équation (E) (puisque x_1 et x_2 sont des solutions distinctes de l'équation caractéristique $x^2-1=0$, trouvée en 1), nous déduisons de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_n && \text{(d'après } (E) \text{ pour } u) \\ &= \lambda(x_1)^n + \mu(x_2)^n && \text{(d'après } \mathcal{P}_n) \\ &= \lambda(x_1)^{n+2} + \mu(x_2)^{n+2} && \text{(d'après } (E) \text{ pour } v \text{ et } w) \end{aligned}$$

En particulier $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Soient $x_1=-1$ et $x_2=1$ les solutions de l'équations $x^2-1=0$. Pour chaque suite u vérifiant (E), nous avons établi l'existence d'un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u_n = \lambda(x_1)^n + \mu(x_2)^n = \lambda(-1)^n + \mu$$

E particulier, nous avons montré que $u = \lambda v + \mu w$. Autrement dit $\mathcal{E} \subset \mathrm{Vect}(v,w)$. La réciproque étant triviale, puisque

$$(\lambda v + \mu w)_{n+2} = \lambda(-1)^{n+2} + \mu = \lambda(-1)^n + \mu = (\lambda v + \mu w)_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

Nous remarquons que $\mathrm{Vect}(v,w) \subset \mathcal{E}$ et donc que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(v,w)$. Les suites $v = \big(-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=1$ n'étant pas colinéaires, elles constituent une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

5. a. Comme x^n est nul si et seulement si $x=0$ et $n \geqslant 1$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} (x^n) \text{ vérifie (F)} &\iff \forall n \geqslant 0, \quad x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n = 0 \\ &\iff \forall n \geqslant 0, \quad x^n(x^2-2x+1) = 0 \\ &\iff x^2-2x+1=0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

b. Comme x^n est nul si et seulement si $x=0$ et $n \geqslant 1$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} (nx^n) \text{ vérifie (F)} &\iff \forall n \geqslant 0, \quad (n+2)x^{n+2} - 2(n+1)x^{n+1} + nx^n = 0 \\ &\iff \forall n \geqslant 0, \quad x^n\big(n(x^2-2x+1) + 2(x^2-x)\big) = 0 \\ &\iff \forall n \geqslant 0 \qquad n(x^2-2x+1) + 2(x^2-x) = 0 \\ &\iff x^2-2x+1 = 0 \text{ et } x^2 - x = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \text{ et } x(x-1) = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

c. • Pour $x=1$, il résulte des deux questions précédentes que $v=(x^n)=(1)$ et $w=(nx^n)=(n)$ sont deux suites vérifiant (F).

• Pour u suite quelconque vérifiant (F), il existe une unique solution $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ au système

$$\begin{cases} u_0 & = \lambda \\ u_1 & = \lambda x + \mu x \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 & = \boxed{\lambda} \\ u_1 - xu_0 & = \mu x = \mu \end{cases}$$

A fortiori, pour $n=0$ et $n=1$, nous avons prouvé la relation

$$u_n = \lambda x^n + \mu n x^n = \lambda + \mu n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_n = \lambda x^n + \mu n x^n$$

- $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies (deja fait)

- Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+2}$ Comme les suites $u = (u_n)$, $v = \left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = \left(nx^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont l'équation (F), nous déduisons de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n && \text{(d'après } (F) \text{ pour } u)\\ &= 2\left(\lambda x^{n+1} + \mu(n+1)x^{n+1}\right) - (\lambda x^n + \mu n x^n) && \text{(d'après } \mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1})\\ &= \lambda\left(2x^{n+1} - x^n\right) + \mu\left((n+1)x^{n+1} - nx^n\right)\right) && \\ &= \lambda x^{n+2} + \mu(n+2)x^{n+2} && \text{(d'après } (F) \text{ pour } v \text{ et } w) \end{aligned}$$

  En particulier $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Comme précedemment, on montre alors que $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(v,w)$ et que $v = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathcal{F}$.

Exo III. EDHEC.

1. a. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}x - 1\mathrm{e}^{-x}}{x^2} = -(x+1)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} < 0$$

   En particulier, f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et de plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   b. Pour l'étude de branche infinie, d'après les limites précédentes, il y a une (demie)-asymptote verticale d'équation $X = 0$ (on reste à sa droite) en $x = 0$ et une (demie)-asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $x = +\infty$ (on reste au dessus) *franchement, c'est cadeau :)*

   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_n \in]0, +\infty[$$

   - $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = 1$
   - Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
     Comme $u_n \in]0, +\infty[$ d'après $\mathcal{P}_n$ et comme f est définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ d'après 1a, nous avons $u_{n+1} = f(u_n) \in]0, +\infty[$. A fortiori, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

   En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

2. On sait que 5 est le premier index n vérifiant $u_n \leqslant 0.00001$ (le script de gauche calcule les termes de la suite $u_n = f(u_{n-1})$ et sort de la boucle dès que $u_n \geqslant 0.00001$). On sait que 6 est le premier index n vérifiant $u_n \geqslant 100000$ (idem). En particulier $u_5 \leqslant 0.00001$ et $u_6 \geqslant 100000$. On peut raisonnablement conjecturer

que la suite oscille, qu'elle n'a pas de limite finie, qu'elle diverge, qu'elle n'est ni croissante, ni décroissante, etc..

3. a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 2x < 0 \qquad (x \geqslant 0)$$

A fortiori, la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Comme $g(0) = 1 > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, comme g est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, il résulte du théorème de la bijection que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $]-\infty, 1]$ et donc qu'il existe une unique solution $x \in [0, +\infty[$ à l'équation $g(x) = 0$. Comme $g(0) = 1$, cette solution ne peut pas être nulle. Or, pour $x > 0$, on a

$$f(x) = x \iff \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = x \iff \mathrm{e}^{-x} = x^2 \iff \mathrm{e}^{-x} - x^2 = 0 \iff g(x) = 0$$

A fortiori, l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note a.

c. comme $-\mathrm{e}^{-1}$ est moins négatif que -2, on a

$$\begin{array}{rl} g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) & = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} - \mathrm{e}{-2} > 0 \\ g(1) & = \mathrm{e}^{-1} - 1^2 = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0 \end{array}$$

En particulier, il vient

$$g(1) < 0 = g(a) < g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, nous concluons alors que $\frac{1}{\mathrm{e}} < a < 1$.

4. a. Comme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ nous déduisons de la relation $1 - \mathrm{e}^{-1} > 0$ et de la stricte croissance de l'exponentielle que

$$\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ u_1 & = f(u_0) = f(1) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1} = \mathrm{e}^{-1} \\ u_2 & = f(u_1) = f(\mathrm{e}^{-1}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-1}} > \mathrm{e}^0 = u_0 \end{array}$$

Comme $u_0 < u_2$ et comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$u_1 = f(u_0) > f(u_2) = u_3$$

En particulier, on a $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_{2n+2} > u_{2n} \text{ et } u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après la question précédente
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ Comme la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*$ et come il résulte de $\mathcal{P}_n$ que $u_{2n+2} > u_{2n}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ nous remarquons que

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} \text{ et } u_{2n+5} = f(u_{2n+4}) < f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$$

En particulier, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. A fortiori, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c. On pose $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

i. Pour $x > 0$, on a

$$h(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}}$$

On remarque que f est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$ car $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Notant $\tilde{f}$ son prolongement,on remarque que $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue et que $h = \tilde{f} \circ \tilde{f}$ de sorte que h est continue sur $\mathbb{R}^+$. *Mais ça, c'est la manière de faire d'un prof de maths, il s'attendaneint plutôt à ce qu'on rédige comme suit :* On peut montrer que cette composée est continue sur $]0, +\infty[$. On remarque que $h(0) = 0$ et comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} e^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = e^0 = 1$$
$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = 0 \times 1 = 0 = h(0)$$

En particulier, h est continue en 0.

ii. *Cette question est vicieuse.*

- On sait déjà que $h(0) = 0$ et que $f(a) = a > 0$ de sorte que $h(a) = f\big(f(a)\big) = f(a) = a$. De sorte que l'on connait déjà deux solutions (0 et a) de l'équation $h(x) = x$

- Montrons qu'il n'en existe pas d'autre. Supposons que x soit une solution strictement positive de $h(x) = x$ (et montrons que $x = a$). Alors, on a

$$\begin{aligned} x = h(x) &\iff x = xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} \\ &\iff 1 = e^{x-\frac{e^{-x}}{x}} \\ &\iff 0 = x - \frac{e^{-x}}{x} \\ &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff f(x) = x \end{aligned}$$

A fortiori, une solution strictement positive de $h(x) = x$ est forcément une solution strictement positive de $f(x) = x$, autrement dit, on a $x = a$.

Les solutions de $h(x) = x$ sont donc 0 et a.

iii. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0 (d'après 1c). A fortiori, elle converge. Notons ℓ sa limite. Par passage à la limite dans la relation $u_{2n+3} = f(f(u_{2n+1})) = h(u_{2n+1})$, nous déduisons de la continité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction h que

$$\ell = h(\ell)$$

Et il résulte de l'étude précédente que $\ell = 0$ ou que $\ell = a$. Mais comme 3c nous indique que $u_1 = \frac{1}{\mathrm{e}} < a$, il résulte de la décroissante ce la suite (u_{2n+1}) que $\ell = 0$. A fortiori,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$$

iv. Supposons que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons L sa limite. Par passage à la limite dans la relation $u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$, il vient $L = h(L)$ de sorte que $L = 0$ ou $L = a$. Mais comme la suite (u_{2n}) est strictement croissante et comme $a < 1 = u_0$, nous obtenons que $L > a$ ce qui est impossible. A fortiori, la suite (u_{2n}) diverge et comme elle est croissante, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$$

Exo IV. 1. a. Comme $(U_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ est un système complet d'événements (on choisit forcément une urne), on a

$$1 = \sum_{k=0^N} P(U_k) = P(U_0) + P(U_1) + \ldots P(U_N)$$

b. Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, l'urne $\mathcal{U}_i$ contient $N - i$ portant le numéro 0 sur N boules au total, de sorte que l'on choisit une boule portant le numéro 0 avec la probabilité

$$P_{U_i}(A_0) = \frac{N-i}{N} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N)$$

Pour $i = 0$, c'est différent, on est sûr de tirer une boule portant le numéro 0 (parce que l'urne $\mathcal{U}_0$ ne contient que cela)

$$P_{U_0}(A_0) = 1$$

c. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(U_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$, il vient

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \textstyle\sum_{i=0}^N P(U_i) \times P_{U_i}(A_0) \\ &= P(U_0) \times P_{U_0}(A_0) + \textstyle\sum_{i=1}^N P(U_i) \times P_{U_i}(A_0) \\ &= \tfrac{1}{N+1} \times 1 + \textstyle\sum_{i=1}^N \tfrac{1}{N+1} \times \tfrac{N-i}{N} \end{aligned}$$

Comme la somme est arithmétique de raison $-\frac{1}{N(N+1)}$, perso, je ne fais pas de changement d'indice, j'applique ma formule pour trouver que

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \tfrac{1}{N+1} + N \times \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{1}{N+1} \times \tfrac{N-1}{N} + \tfrac{1}{N+1} \times \tfrac{N-N}{N}\right) \\ &= \tfrac{1}{N+1} + \tfrac{N}{2} \times \tfrac{1}{N+1} \times \tfrac{N-1}{N} \\ &= \tfrac{1}{N+1} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{N-1}{N+1} \\ &= \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{2}{N+1} + \tfrac{N-1}{N+1}\right) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

2. a. Soit $k \in [\![1,N]\!]$ fixé. Pour $j \in [\![0,k-1]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ ne contient pas de boule portant le numéro k, de sorte que

$$P_{U_j}(A_k) = 0 \qquad (0 \leqslant j < k)$$

Par contre, pour $j \in [\![k,N]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ comporte une boule portant le numéro k parmi les N boules qu'elle contient, de sorte que

$$P_{U_j}(A_k) = \frac{1}{N} \qquad (k \leqslant j \leqslant N)$$

b. Soit $k \in [\![1,N]\!]$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet 'événements $(\mathcal{U}_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$, il vient

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \textstyle\sum_{j=0}^{N} P(U_j) \times P_{U_j}(A_k) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} P(U_j) \times P_{U_j}(A_k) + \sum_{j=k}^{N} P(U_j) \times P_{U_j}(A_k) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{N+1} \times 0 + \sum_{j=k}^{N} \frac{1}{N+1} \times \frac{1}{N} \\ &= 0 + (N-k+1) \times \tfrac{1}{N+1} \times \tfrac{1}{N} = \tfrac{N-k+1}{N(N+1)} \end{aligned}$$

c. En remarquant que nous avons une somme arithmétique, remarquons que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{N} P(A_k) &= \textstyle\sum_{k=1}^{N} \frac{N-k+1}{N(N+1)} \\ &= N \times \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{N-1+1}{N(N+1)} + \tfrac{N-N+1}{N(N+1)}\right) \\ &= N \times \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{1}{N+1} + \tfrac{1}{N(N+1)}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{N}{N+1} + \tfrac{1}{N+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

D'après 1a, il vient alors que $P(A_0) = \frac{1}{2}$. C'est cohérent avec 1c.

Dans la suite de l'exercice, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,N]\!]$, on introduit l'événement $A_{n,k}$ = « obtenir la boule numéro k lors du $n^{\text{ième}}$ tirage »

3. Pour $r \in [\![0,N]\!]$, on pose E_r = « obtenir successivement les numéros $r, r-1, r-2, \ldots, 3,2,1,0$ »
4. On a

$$E_3 = A_{1,3} \cap A_{2,2} \cap A_{3,1} \cap A_{4,0}$$

A fortiori, il résulte de la formule des probabilités composées que

$$
\begin{aligned}
P(E_3) &= P(A_{1,3} \cap A_{2,2} \cap A_{3,1} \cap A_{4,0}) \\
&= P(A_{1,3}) \times P_{A_{1,3}}(A_{2,2}) \times \ldots \times PA_{1,3} \cap A_{2,2} \cap A_{3,1}(A_{4,0}) \\
&= P(A_3) \times P_{A_{1,3}}(A_{2,2}) \times \ldots \times PA_{1,3} \cap A_{2,2} \cap A_{3,1}(A_{4,0}) \\
&= \tfrac{N-3+1}{N(N+1)} \times \tfrac{1}{N} \times \tfrac{1}{N} \times \tfrac{N-1}{N} \\
&= \tfrac{(N-2)(N-1)}{N^4(N+1)}
\end{aligned}
$$

(d'abord on tire un 3, puis dans l'urne $\mathcal{U}_3$ on tire un 2, puis dans l'urne $\mathcal{U}_2$ on tire un 1, puis dans l'urne $\mathcal{U}_1$ on tire un 0 (il y en a $N-1$) *Wow, chaud quand même*

5. De même, on a

$$E_N = \bigcap_{j=0}^{N} A_{j+1,N-j}$$

De sorte que (formule des probas composées)

$$
\begin{aligned}
P(E_N) &= P\left(\textstyle\bigcap_{j=0}^{N} A_{j+1,N-j}\right) \\
&= P(A_{1,N}) \times P_{A_{1,N}}(A_{2,N-1}) \times \ldots \times P\textstyle\bigcap_{j=0}^{N-1} A_{j+1,N-j}(A_{N+1,0}) \\
&= P(A_N) \times \tfrac{1}{N} \times \ldots \times \tfrac{1}{N} \times \tfrac{N-1}{N} \\
&= \tfrac{1}{N(N+1)} \times \left(\tfrac{1}{N}\right)^{N-1} \times \tfrac{N-1}{N} \\
&= \tfrac{N-1}{N^{N+1}(N+1)}
\end{aligned}
$$

On a donc $c = N-1$ et $m = N+1$.

6. a. Soient $i \in [\![0,N]\!]$. Si $k > i$, il n'y a pas de boule portant le numéro k dans l'urne $\mathcal{U}_i$ (dans laquelle on tire) de sorte que

$$P_{A_{1,i}}(A_{2,k} = 0 \qquad (k > i)$$

Si $k \leqslant i$, l'urne $\mathcal{U}_i$ comporte exactement 1 boule portnat le numéro $k \geqslant 1$ de sorte que

$$P_{A_{1,i}}(A_{2,k} = \frac{1}{N} \qquad (1 \leqslant k \leqslant i)$$

b. Soit $k \in [\![1,N]\!]$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événement $(A_{1,i})_{0 \leqslant i \leqslant N}$, il vient

$$
\begin{aligned}
P(A_{2,k}) &= \textstyle\sum_{i=0}^{N} P(A_{1,i}) \times P_{A_{1,i}}(A_{2,k}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} P(A_{1,i}) \times P_{A_{1,i}}(A_{2,k}) + \sum_{i=k}^{N} P(A_{1,i}) \times P_{A_{1,i}}(A_{2,k}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} P(A_i) \times 0 + \sum_{i=k}^{N} P(A_i) \times P_{A_{1,i}}(A_{2,k}) \\
&= \textstyle\sum_{i=k}^{N} P(A_i) \times P_{A_{1,i}}(A_{2,k}) \\
&= \textstyle\sum_{i=k}^{N} \frac{N-i+1}{N(N+1)} \times \frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

Comme on retombe sur une somme arithmétique (décidément), on obtient que

$$\begin{aligned} P(A_{2,k}) &= (N-k+1)\times\tfrac{1}{2}\times\left(\tfrac{N-k+1}{N(N+1)}\times\tfrac{1}{N}+\tfrac{N-N+1}{N(N+1)}\times\tfrac{1}{N}\right)\\ &= (N-k+1)\times\tfrac{1}{2}\times\left(\tfrac{N-k+1}{N^2(N+1)}+\tfrac{1}{N^2(N+1)}\right)\\ &= (N-k+1)\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{N-k+2}{N^2(N+1)}\\ &= \tfrac{(N-k+1)(N-k+2)}{2N^2(N+1)} \end{aligned}$$

7. a. Soit $a \in \mathbb{N}$. Pour $b \geqslant a$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_b : \qquad \sum_{j=a}^{b}\binom{j}{a} = \binom{b+1}{a+1}$$

- $\mathcal{P}_a$ est vraie car $\sum_{j=a}^{a}\binom{j}{a} = \binom{a}{a} = 1 = \binom{a+1}{a+1}$
- Supposons $\mathcal{P}_b$ pour un entier $b \geqslant a$ et montrons $\mathcal{P}_{b+1}$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=a}^{b+1}\binom{j}{a} &= \textstyle\sum_{j=a}^{b}\binom{j}{a}+\binom{b+1}{a}\\ &= \textstyle\binom{b+1}{a+1}+\binom{b+1}{a} && \text{(d'après } \mathcal{P}_b\text{)}\\ &= \textstyle\binom{b+2}{a+1} && \text{(formule de Pascal)} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{b+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_b$ est vraie pour $b \geqslant a$.

b. *bon, ç commence à être relou...* Soient $k \in [\![1,N]\!]$, $i \in [\![0,N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k}) &= \tfrac{1}{N} \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant i && \text{une boule k dans l'urne } \mathcal{U}_i\\ &= 0 \text{ si } k > i && \text{pas de boule k dans l'urne } \mathcal{U}_i \end{aligned}$$

c. *Je sens qu'elle va être pénible celle la...* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad P(A_{n,k}) = \frac{\binom{N+n-k}{n}}{N^n(N+1)} \qquad (1 \leqslant k \leqslant N)$$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car on a montré à la question 2b que

$$P(A_{1,k}) = P(A_k) = \frac{N-k+1}{N(N+1)} = \frac{\binom{N+1-k}{1}}{N^1(N+1)}$$

- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant N}$, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1,k}) &= \textstyle\sum_{i=0}^{N} P(A_{n,i})\times P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} P(A_{n,i})\times P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k}) + \sum_{i=k}^{N} P(A_{n,i})\times P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} P(A_{n,i})\times 0 + \sum_{i=k}^{N} P(A_{n,i})\times P_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})\\ &= \textstyle\sum_{i=k}^{N} \frac{\binom{N+n-i}{n}}{N^n(N+1)}\times\frac{1}{N} && \text{d'après } \mathcal{P}_n\\ &= \textstyle\frac{1}{N^{n+1}(N+1)}\sum_{i=k}^{N}\binom{N+n-i}{n} \end{aligned}$$

Cette fois, on ne coupe pas au changement d'indice $j = N+n-i$

$$
\begin{array}{ll}
P(A_{n+1,k}) & = \frac{1}{N^{n+1}(N+1)} \sum_{i=k}^{N} \binom{N+n-i}{n} \\
P(A_{n+1,k}) & = \frac{1}{N^{n+1}(N+1)} \sum_{i=n}^{N+n-k} \binom{j}{n} \\
P(A_{n+1,k}) & = \frac{1}{N^{n+1}(N+1)} \binom{N+n-k+1}{n+1} \qquad \text{d'après 7a} \\
P(A_{n+1,k}) & = \frac{\binom{N+n-k+1}{n+1}}{N^{n+1}(N+1)}
\end{array}
$$

De sorte que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai *Wow*

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d. Comme $(A_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant N}$ est un système complet d'événements, on a

$$
\begin{array}{ll}
P(A_{n,0}) & = 1 - \sum_{k=1}^{N} P(A_{n,k}) \\
& = 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\binom{N+n-k}{n}}{N^n(N+1)} \\
& = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)} \sum_{k=1}^{N} \binom{N+n-k}{n}
\end{array}
$$

Hop, on refait le CDI $j = N + n - k$ pour obtenir que

$$
\begin{array}{ll}
P(A_{n,0}) & = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)} \sum_{k=n}^{N+n-1} \binom{j}{n} \\
& = 1 - \frac{1}{N^n(N+1)} \binom{N+n}{n+1} \qquad \text{d'après 7a}
\end{array}
$$

De sorte que$P(A_{n,0}) = 1 - \dfrac{\binom{N+n}{n+1}}{N^n(N+1)}$. Je suis pas sûr, plus de cerveau...

Exo V. SCILAB.

1. Bon, $c = (-1)^j$, $P = 2^j$ et $F = j!$, donc ça calcule

$$S = \sum_{j=1}^{10} \frac{(-1)^j 2^j}{j!}$$

2.

```
function [p]=enfinFini(n)
   p = 1
   for k = 1:n
      // pourri mais bien pour la connaissance de scilab
      if 2*floor(k/2) == k then
          a = 1+ k
      else
          a = 1 + 1 / k
      end
      // plus malin car plus matheux
     // a = 1 + k ^{(-1)^k}
      p = p * a
   end
endfunction
```