DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I. **ESPACES VECTORIELS.** Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On suppose que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Détermoiner une base de l'espace F des matrices 2×2 qui commuttent avec A.

Exo II. **ESPACES VECTORIELS.**

1. Montrer que l'on définit une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en posant
$$g(x,y,z) = (2x + y - z, x - y) \qquad \text{pour } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
2. Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$
3. Déterminer une base de l'image de g
4. Déterminer une base du noyau de g
5. L'application g est elle injective ? surjective ?

Exo III. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $u(x,y,z)$ *(on attend une formule avec un triplet dependant de x, y et z).*
2. Montrer que $\vec{i} = (1,1,1)$, $\vec{j} = (1,-1,0)$ et $\vec{k} = (0,1,1)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{C}$
4. Déterminer la matrice $P = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et calculer P^{-1}
5. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.
6. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exo IV. **ANALYSE** :Dans cet exercice, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)^2}$ et $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\mathrm{d}t$

1. Montrer que φ est continue sur $D =]0, +\infty[\setminus\{1\}$
2. Montrer que la fonction g est dérivable et calculer $g'(x)$ d'abord sur $]0,1[$ puis sur $]1, +\infty[$.
3.
   a. Pour $x > 1$, montrer que $g(x) \geqslant \dfrac{1}{(2\ln x)^2}\left(x^2 - x\right)$

   b. Pour $x > 1$, en déduire que $g(x) \geqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
4.
   a. Soit $x > 1$. A l'aide du changement de variable $u = \ln t$, calculer $I = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$

   b. En remarquant que $\frac{1}{(\ln t)^2} = t \times \frac{1}{t(\ln t)^2}$, montrer que

$$\frac{x}{2\ln x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^2}{2\ln x} \qquad (x > 1).$$

   c. En déduire $\lim_{x\to 1^+} g(x)$

5. a. Pout $0 < x < 1$, montrer que $\frac{x}{2\ln x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^2}{2\ln x}$

   b. A l'aide de ce qui précède, justifier que $\lim_{x\to 1} g(x)$ n'existe pas.

6. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation complet sur D (avec toutes les limites).

Exo V. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n
3. **SCILAB** Ecrire une fonction qui calcule prend un entier n en entrée et qui retourne I_n.

Exo VI. **PROBA**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir au plus n boules. On s'intéresse au protocole suivant :

- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0,1$ et l'urne B sinon (avec la probabilité $q = 1-p$).
- On met une boule dans l'urne choisie
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes soit pleine (c'est à dire contienne n boules), les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

Partie 1 Préliminaires

On définit la suite de terme général a_n par

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Calculer le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour $n \geqslant 1$.
2. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$
3. Etudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle converge vers un nombre réel ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans la suite, on admettra que $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie 2. Etude de l'urne incomplète

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine à l'issue de l'expérience.

1. Déterminer les lois de R_1, R_2, R_3 en justifiant vos calculs.
2. Calculer l'espérance et la variance de R_1, R_2 et R_3

   On suppose desormais que $n \geqslant 2$.

3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?

4. Soit k appartenant à $R_n(\Omega)$
   a. Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne A contienne $n-1$ boules de l'urne B contienne k boules.
   b. Déterminer alors la probabilité $P(R_n = k)$.
   c. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, vérifier que

$$2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-2)$$

On suppose desormais que $p = \frac{1}{2}$

5. Déduire de (4c), l'égalité $E(R_n) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)$
6. En déduire l'expression de $V(-R_n)$ en fonction de n et de $E(R_n)$
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n-E(R_n)}{2n-1}$. Etablir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} puis écrire un algorithme Scilab permettant de calculer l'éspérance de R_n

Exo VII. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On appelle alors fonction génératrice de X, la fonction $G_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X = k) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $G_X(t) = E(t^X)$.
2. Donner l'expression de G_X
   a. lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
   b. lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
   c. lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

Dans la suite, X est une var finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$

3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$
4. Montrer que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$

Exo VIII. SCILAB

1. En utilisant les matrices et les opérations pointées, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{k+1}$.
2. Ecrire un script qui simule le jet de 3 dés et qui affiche « gagné » si un 4, un 2 et un 1 sont obtenus
3. Ecire une fonction prenant en entrée un entier n et retournant le terme u_n de la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \begin{cases} u_n^2 + 1 & \text{si } n\text{pair} \\ \frac{2}{u_n} & \text{si } n\text{impair} \end{cases}$$