CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I. ESPACES VECTORIELS I. Soit $n \geqslant 2$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $n \times n$.

1. - $F \neq \emptyset$ car $0 \in F$. En effet, la matrice nulle à n lignes et n colonnes satisfait bien $0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \times 0 = 0 = 0 \times A$.
   - Par définition, on a $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est n $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence.
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M,M') \in F^2$. Comme $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous remarquons que M et M' sont deux vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de sorte que $\lambda M + \mu M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, comme $(M,M') \in F^2$, nous observons que $AM = MA$, que $AM' = M'A$ et nous déduisons de la distributivité du produit matriciel et de la loi du scalaire mobile que

     $$A \times (\lambda M + \mu M') = \lambda A \times M + \mu A \times M' = \lambda M \times A + \mu M' \times A = (\lambda M + \mu M') \times A$$

     En particulier, $\lambda M + \mu M' \in F$. CQFD

   Nous avons bien montré que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

2. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et remarquons que

$$\begin{aligned}
M \in F &\iff AM = MA \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+4c & b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 3a+4b \\ 2c+d & 3c+4d \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2a+3c = 2a+b \\ 2b+3d = 3a+4b \\ a+4c = 2c+d \\ b+4d = 3c+4d \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{-b} + 3c = 0 \\ -3a-2b+3d = 0 \\ a+2c-d = 0 \\ b-3c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{-b} + 3c = 0 \\ -3a-6c+3d = 0 \\ \boxed{a} + 2c - d = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{-b} + 3c = 0 \\ \boxed{a} + 2c - d = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{b} = 3c \\ \boxed{a} = d - 2c \end{cases} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} d-2c & 3c \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\iff M \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)
\end{aligned}$$

En particulier, une base de l'espace F est (I_2, A) ou encore $\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Exo II. ESPACES VECTORIELS II.

1. - $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels
   - Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a $(2x + y - z,x - y) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que g est une application.
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a

   $$\begin{aligned} g(\lambda X + \mu X') &= g(\lambda x + \mu x',\lambda y + \mu y',\lambda z + \mu z') \\ &= (2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')) \\ &= \lambda(2x + y - z,x - y) + \mu(2x' + y' - z',x' - y') \\ &= \lambda g(X) + \mu g(X') \end{aligned}$$

   En particulier, g est linéaire

   En conclusion, g est une application linéaire.
2. Comme $g(1,0,0) = (2,1)$, $g(0,1,0) = (1,-1)$ et $g(0,0,1) = (1,0)$, nous obtenons que

   $$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}c}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Nous remarquons que la matrice précédente est de rang 2. De plus, comme $(1,-1) = -(2,1) + 2(1,0)$, nous obtenons que

   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}\,(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)) = \mathrm{Vect}\,((2,1),(1,-1),(1,0)) \\ &= \mathrm{Vect}\,((2,1),(1,0)) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

   En particulier, la famille de deux vecteurs non colinéaires $\big((2,1),(1,0)\big)$ est libre et génératrice, c'est une base de $\mathrm{Im}(g)$. Remarque : la base canonique de $\mathbb{R}^2$ convient aussi.
4. Nous remarquons que $g(1,1,3) = (2+1-3,1-1) = 0$ et donc que $(1,1,3) \in \mathrm{Ker}(g)$ de sorte que $\mathrm{Vect}(1,1,3) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Comme l'espace de gauche et de droite ont le même nombre de vecteursdans leur base (dimension 1), d'après le théorème du rang, nous concluons que

   $$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(1,1,3)$$

   En particulier, le vecteur $(1,1,3)$ constitue une base de $\mathrm{Ker}(g)$
5. L'application g est surjective mais n'est pas injective, d'après les résultats précédents ($\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Ker}(g) \neq \{0\}$)

Exo III. ESPACES VECTORIELS III.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. D'après la donnée de la matrice de u, on a

$$\begin{aligned} u(1,0,0) &= (1,2,2) \\ u(0,1,0) &= (2,1,2) \\ u(0,0,1) &= (-2,-2,3) \end{aligned}$$

A fortiori, il résulte de la linéarité de u que

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u\left(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\right) \\ &= x.u(1,0,0)+y.u(0,1,0)+z.u(0,0,1) \\ &= x(1,2,2)+y(2,1,2)+z(-2,-2,-3) \\ &= (x+2y-2z,2x+y-2z,2x+2y-3z) \end{aligned}$$

2. Nous remarquons que

$$\mathrm{rg}(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Comme le rang $\mathrm{rg}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est égal au nombre de ces3 vecteurs et au nombre de vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{C} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Comme

$$\begin{aligned} u(\vec{i}) &= (1+2-2,2+1-2,2+2-3) = \vec{i} \\ u(\vec{j}) &= (1-2+0,2-1+0,2-2+0) = -\vec{j} \\ u(\vec{k}) &= (0+2-2,0+1-2,0+2-3) = -\vec{k} \end{aligned}$$

nous obtenons que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Nous déduisons des relations

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(\vec{i}) &= \vec{i} = (1,1,1) = 1.(1,0,0)+1.(0,1,0)+1.(0,0,1) \\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(\vec{j}) &= \vec{j} = (1,-1,0) = 1.(1,0,0)-1.(0,1,0)+0.(0,0,1) \\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(\vec{k}) &= \vec{k} = (0,1,1) = 0.(1,0,0)+1.(0,1,0)+1.(0,0,1) \end{aligned}$$

que l'on a

$$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Au brouillon, j'ai trouvé $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & (-1)^2 & -1+1 \\ -1-1+2 & -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \mathrm{I\_3}$$

Nous remarquons que la matrice P est inersible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+1 & -1-1 \\ 1+1 & 1-1+1 & -1+1-2 \\ 1+1 & 1+1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

6. D'après le resultat de la question précédente, nous avons (la flemme de faire la recurrence)

$$\begin{aligned} M^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 0 \\ 1 & -(-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1 & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1-(-1)^n & -1+2(-1)^n \end{pmatrix} \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

Formule vraie également pour $n = 0$

Exo IV. ANALYSE I. Dans cet exercice, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)^2}$ et $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\mathrm{d}t$.

1. L'application $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc sur D et ne s'annule pas sur D. A fortiori, le produit $t \mapsto \ln(t)^2$ est continue sur D et ne s'annule pas sur D et l'inverse $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)^2}$ est continue sur D en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur Det ne s'annule pas sur D.
2. Sur **l'intervalle** $]0,1[$, l'application φ est continue de sorte que la fonction

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t \qquad (0 < x < 1)$$

est l'unique primitive sur $]0,1[$ de la fonction φ s'annulant en $\frac{1}{2}$ et de plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. A fortiori, via la relation de Chasles, nous remarquons que

$$g(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t = F(x^2) - F(x) \qquad (0 < x < 1)$$

En particulier, la fonction g est sur $]0,1[$ la différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est de ce fait dérivable et l'on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)^2} - \frac{1}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x}{(2\ln x)^2} - \frac{1}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x}{(2\ln x)^2} - \frac{4}{(2\ln x)^2} \\ &= \frac{2x-4}{(2\ln x)^2} \end{aligned}$$

Bon, on procède exactement de la même façon sur **l'intervalle** $]1,+\infty[$ en posant

$$T(x) = \int_2^x \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Et on obtient exactement la même formule, de sorte que

$$g'(x) = \frac{2x-4}{(2\ln x)^2} \qquad (x \in D)$$

3. a. La fonction φ est décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$ car la fonction $u \mapsto \ln u$ est croissante, strictement positive sur cet intervalle. A fortiori, on a

$$\frac{1}{(2\ln x)^2} = \frac{1}{\ln(x^2)^2} = \varphi(x^2) \leqslant \varphi(t) \qquad (x \leqslant t \leqslant x^2)$$

En intégrant cette relation sur $[x,x^2]$, il résulte alors de la croissance de l'intégrale que

$$\frac{1}{(2\ln x)^2}\left(x^2 - x\right) = \int_x^{x^2} \frac{1}{(2\ln x)^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \varphi(t)\mathrm{d}t = g(x) \qquad (x > 1)$$

Remarque : lorsque $x > 1$ on a $x < x^2$. A l'inverse, lorsque $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$.

b. En factorisant par x^2 dans la relation précédente, il vient

$$g(x) \geqslant \frac{1}{(2\ln x)^2}\left(x^2 - x\right) = \frac{1}{(2\ln x)^2}x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad (x > 1).$$

Comme le membre de droite diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de croissance comparée, il résulte du principe des gendarmes que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

4. a. Soit $x > 1$.
   - L'application $t \mapsto \ln t$ est de classe$\mathcal{C}^1$ sur $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$, à valeurs dans $[\ln(x), \ln(x^2)]$
   - L'application $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est continue sur $[\ln(x), \ln(x^2)] \subset]0,+\infty[$

   En procédant au changement de variable $u = \ln t$, nous obtenons alors que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \int_{\ln(x)}^{\ln(x^2)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \\
&= -\frac{1}{2\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{2\ln x} \qquad (x > 1)
\end{aligned}
$$

b. Nous remarquons que $\frac{1}{(\ln t)^2} = t \times \frac{1}{t(\ln t)^2}$. En encadrant pour $x \leqslant t \leqslant x^2$, il vient

$$\frac{x}{t(\ln t)^2} \leqslant \frac{1}{(\ln t)^2} = t \times \frac{1}{t(\ln t)^2} \leqslant \frac{x^2}{t(\ln t)^2} \qquad x \leqslant t \leqslant x^2)$$

En intégant cette inégalité de x à x^2, il résulte de la croissance de l'intégrale que

$$\left[\frac{x}{-\ln t}\right]_x^{x^2} = \int_x^{x^2} \frac{x}{t(\ln t)^2}\mathrm{d}t \leqslant g(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t(\ln t)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{x^2}{-\ln t}\right]_x^{x^2}$$

En particulier, il vient

$$\frac{x}{2\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x^2)} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^2}{\ln(x)} - \frac{x^2}{\ln(x^2)} = \frac{x^2}{2\ln(x)} \qquad (x > 1)$$

c. Lorsque $x \to 1^+$, le théorème de croissance comparée induit que le membre de gauche du résultat précédent tend vers $+\infty$, nous déduisons du principe des gendarmes que $\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$

5. a. Dans cette question où $0 < x < 1$, on fait exactement la même chose que dans la 4b sauf que $x < x^2$ et $\ln(x) < 0$ et $\ln(x^2) < 0$ pour $0 < x < 1$. A fortiori, nous pouvons écrire que

$$\frac{x^2}{t(\ln t)^2} \leqslant \frac{1}{(\ln t)^2} = t \times \frac{1}{t(\ln t)^2} \leqslant \frac{x}{t(\ln t)^2} \qquad x^2 \leqslant t \leqslant x)$$

Et en intégrant de x à x^2 (dans le mauvais sens), il résulte alors de la croissance de l'intégrale que

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2}{t(\ln t)^2}\mathrm{d}t \geqslant g(x) \geqslant \int_x^{x^2} \frac{x}{t(\ln t)^2}\mathrm{d}t$$

En intégrant, il vient alors

$$\frac{x^2}{2\ln(x)} = \left[\frac{x^2}{-\ln t}\right]_x^{x^2} \geqslant g(x) \geqslant \left[\frac{x}{-\ln t}\right]_x^{x^2} = \frac{x}{2\ln(x)}$$

De sorte que l'on a

$$\frac{x}{2\ln x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^2}{2\ln x} \qquad (0 < x < 1)$$

On remarque que g est négatif sur]0,1[.

b. Bon, on savait déjà depuis 4c que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ ne peut pas être une limite finie. En faisant tendre x vers 1^- dans l'inégalité précédente, nous obtenons cette fois que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$. J'imagine que c'est ce qu'attend le sujet : en 1 (des deux cotés simultanément) il n'y a ni limite finie, ni divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. (eux concluent que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ n'existe pas, ce que je trouve ambigu).

6. On a montré précédemment que

$$g'(x) = \frac{2x-4}{(2\ln x)^2} \qquad (x \in D)$$

Cette dérivée ne s'annule qu'en 2 et est :

- positive strictement sur $]2, +\infty[$
- négative strictement sur]0,1[et]1,2[

D'où les variations de g.Quant aux limites :

- $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$ d'après 5a
- $\lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$ d'après 5a
- $\lim_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$ d'après 4c
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ d'après 3b

Exo V. ANALYSE II. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. On a

$$I_0 = \int_0^1 x^0 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Pour I_1, on procède à une intégration par partie. Comme $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$sur [0,1] (c'est vrai mais c'est abuser de demander cela aux étudiants pour la seconde fonction : je serai clément), on obtient que

$$\begin{aligned} I_1 &= \textstyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[x\frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}\,dx \\ &= 0 + \tfrac{2}{3}\textstyle\int_0^1 (1-x)^{3/2}\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{(1-x)^{5/2}}{-5/2}\right]_0^1 \\ &= \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{5/2} = \tfrac{4}{15} \end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. On procède à une intégration par partie. Comme $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$sur [0,1] (c'est vrai mais c'est abuser de demander cela aux étudiants pour la seconde fonction : je serai clément), on obtient que

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ \mathrm{d}x = \left[x^n\frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}\frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}\ dx \\
&= 0 + \tfrac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\ dx \\
&= \tfrac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\ dx \\
&= \tfrac{2}{3}n\left(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\ dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ dx\right) \\
&= \tfrac{2}{3}n\left(I_{n-1} - I_n\right) \qquad (n \geqslant 1)
\end{aligned}$$

Du coup, on obtient que

$$I_n\left(1+\frac{2n}{3}\right) = \frac{2n}{3}I_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

Ou encore

$$I_n = \frac{\frac{2n}{3}}{1+\frac{2n}{3}}I_{n-1} = \frac{2n}{3+2n}I_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

En translatant de 1 (en posant $n = n' + 1$), il vient

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{5+2n}I_n \qquad (n \geqslant 0)$$

3.

```
function [I] = integre(n)
    I = 2 / 3             // I(0)
    for a = 1:n
       I = (2*a)/(3+2*a)*I      // I(a) = (2a/ 3+2a)*I(a-1)
    end
endfunction
```

Exo VI. PROBA I. **Partie 1 Préliminaires (suites)**

On définit la suite de terme général a_n par

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\tfrac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{\sqrt{n}}{4^n}\frac{(2n)!}{n!^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{4}(2n+2)!n!^2}{\sqrt{n}(n+1)!^2(2n)!} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}(2n+2)(2n+1)(2n)!n!^2}{4\sqrt{n}(n+1)^2n!^2(2n)!} = \frac{\sqrt{n+1}(2n+2)(2n+1)}{4\sqrt{n}(n+1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}(2n+2)(2n+1)}{\sqrt{n}(2n+2)^2} = \frac{\sqrt{n+1}(2n+1)}{\sqrt{n}(2n+2)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}(2n+1)}{\sqrt{n}2(n+1)} = \frac{(2n+1)}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \qquad (n \geqslant 1)
\end{aligned}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

- P_1 est vraie car $a_1 = \frac{\sqrt{1}}{4}\binom{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons P_{n+1}. Nous déduisons de la question précédente et de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \times \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= a_n \times \frac{(2n+1)}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times \frac{(2n+1)}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Or nous remarquons que

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}}} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} &\iff \frac{\sqrt{2n+1}}{2} \leqslant \frac{n+1}{\sqrt{2n+3}} \\ &\iff \sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} \leqslant 2(n+1) = 2n+2 \\ &\iff (2n+1)(2n+3) \leqslant (2n+2)^2 \\ &\iff (2n+2-1)(2n+2+1) \leqslant (2n+2)^2 \\ &\iff (2n+2)^2 - 1 \leqslant (2n+2)^2 \iff \text{Vrai} \end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$a_{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$$

C'est à dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \geqslant 1$.

3. D'après le calcul effectué en 1, on a

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+1)}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{(2n+1)}{\sqrt{2n(2n+2)}} \\ &= \frac{(2n+1)}{\sqrt{(2n+1-1)(2n+1+1)}} = \frac{(2n+1)}{\sqrt{(2n+1)^2-1}} > 1 \end{aligned}$$

A fortiori, la suite (a_n) qui est positive est strictement croissante. Comme a_n est majorée par

$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad (n \geqslant 1)$$

La suite (a_n) est convergente et on a

$$\frac{1}{2} = a_1 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, il vient

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Partie 2. Etude de l'urne incomplète (proba)

1. Lorsque $n = 1$, une urne reçoit une balle puis l'expérience s'arrete alors que l'autre urne n'en a pas. Donc

$$R_1 = 0$$

Lorsque $n = 2$, l'urne incomplète peut contenir zéro ou une boule de sorte que R_2 suit une loi de bernouilli et

$$\begin{aligned} P(R_2 = 1) &= P\big((A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)\big) \\ &= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) \text{ événements incompatibles} \\ &= P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) \text{ événements indépendants} \\ &= pq + qp = 2pq \end{aligned}$$

En particulier, on a $R_2 \hookrightarrow B(2pq)$
De même, R_2 peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 et on a

$$\begin{aligned} P(R_2 = 0) &= P\big((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)\big) = ... = p^3 + q^3 \\ P(R_2 = 1) &= P\big((A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\big) \\ &\quad + P\big((B_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap B_4) \cup (B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap B_4) \cup (A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)\big) \\ &= 3p^3q + 3pq^3 = 3pq(p^2 + q^2) = 3pq(1 - 2pq) \\ P(R_2 = 2) &= 1 - (p^3 + q^3) - 3pq(1 - 2pq) \\ &= (p+q)^3 - (p^3 + q^3) - 3pq + 6p^2q^2 = 3p^2q + 3qp^2 - 3pq + 6p^2q^2 \\ &= 3pq(p+q) - 3pq + 6p^2q^2 = 6p^2q^2 \end{aligned}$$

Chelou la loi de R_3...

2. On déduit l'espérance et la variance des lois trouvées et de la formule de Koenig-Huigens

$$E(R_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(R_1) = 0$$
$$E(R_2) = 2pq \qquad \text{et} \qquad V(R_2) = 2pq(1 - 2pq)$$

Et on a

$$\begin{aligned} E(R_3) &= 0 \times P(R_3 = 0) + 1 \times P(R_3 = 1) + 2 \times P(R_3 = 2) = 1 \times 3pq(1 - 2pq) + 2 \times 6p^2q^2 = 3 \\ &= 3pq(1 + 2pq) \\ E((R_3)^2) &= 0^2 \times P(R_3 = 0) + 1^2 \times P(R_3 = 1) + 2^2 \times P(R_3 = 2) \\ &= 1 \times 3pq(1 - 2pq) + 4 \times 6p^2q^2 = 3pq + 18p^2q^2 = 3pq(1 + 6pq) \\ V(R_3) &= E((R_3)^2) - E(R_3)^2 = 3pq(1 + 6pq) - (3pq(1 + 2pq))^2 = 3pq\left(1 + 6pq - 3pq(1 + 2pq)^2\right. \\ &= 3pq\left(1 + 3pq - -12p^2q^2 - 12p^3q^3\right) \end{aligned}$$

Chaud R_3... (le calcul pour $R_3 = 4$ points) **On suppose desormais que $n \geqslant 2$.**

3. La variable R_n prend toutes les valeurs entieres entre 0 (lorsque on ne choisit que l'urne A) et $n-1$ (lorsqu'on alterne une fois sur deux entre l'urne A et l'urne B), de sorte que

$$R_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$$

4. Soit k appartenant à $R_n(\Omega)$
   a. Remarquons que si l'on fixe le nombre $n-1+k$ de boules tirées, la probabilité demandée est la même que celle pour avoir $n-1$ succés (obtenir l'urne A) au cours de $n-1+k$ épreuves aléatoires indépendantes suivant la même loi de bernouilli de paramètre p. De sorte que l'on peut obtenir la probabilité demandée, via la loi binomiale et la probabilitée demandée est donc

$$\binom{n-1+k}{n-1}p^{n-1}q^k$$

   b. Du coup, pour obtenir $R_n = k$ à l'issue de l'expérience, il faut forcément ajouter une boule dans l'urne qui en contient $n-1$ alors que l'autre en contient k, de sorte que (notant $\mathcal{A}_n$ le nombre de boules dans A au bout de n lancers et notant $\mathcal{B}_n$ le nombre de boules dans A au bout de n lancers)

$$\begin{aligned}
P(R_n = k) &= P((\mathcal{A}_{n+k-1} = n-1 \text{ et } A_{n+k}) \cup (\mathcal{B}_{n+k-1} = n-1 \text{ et } B_{n+k})) \\
&= P(\mathcal{A}_{n+k-1} = n-1)P(A_{n+k}) + P(\mathcal{B}_{n+k-1} = n-1)P(B_{n+k})) \\
&= p \times P(\mathcal{A}_{n+k-1} = n-1) + q \times P(\mathcal{B}_{n+k-1} = n-1) \\
&= p \times \binom{n-1+k}{n-1}p^{n-1}q^k + q \times \binom{n-1+k}{n-1}p^{n-1}q^k \\
&= \binom{n-1+k}{n-1}p^{n-1}q^k \qquad (0 \leqslant k < n)
\end{aligned}$$

   c. Lorsque $p = \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-2$, on a $0 \leqslant k \leqslant k+1 < n$ et alors

$$\begin{aligned}
2(k+1)P(R_n = k+1) &= 2(k+1)\binom{n-1+k+1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 2(k+1)\frac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)!}\frac{1}{2^{n+k}} \\
&= \frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\frac{1}{2^{n+k-1}} \\
(n+k)P(R_n = k) &= (n+k)\binom{n+k-1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2^k} \\
&= (n+k)\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}\frac{1}{2^{n+k-1}} \\
&= \frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\frac{1}{2^{n+k-1}}
\end{aligned}$$

   Du coup, nous avons montré que

$$2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-2)$$

5. Comme $R_n(\Omega) = [\![0,n-1]\!]$, en procédant au changement d'indice $k = k'+1$, on a

$$
\begin{aligned}
E(R_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} kP(R_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(R_n = k) \\
&= \sum_{k'=0}^{n-2} (k'+1)P(R_n = k'+1) = \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(n+k')P(R_n = k')}{2} \\
&= \frac{n}{2} \sum_{k'=0}^{n-2} P(R_n = k') + \frac{1}{2} \sum_{k'=0}^{n-2} k'P(R_n = k') \\
&= \frac{n}{2} \left(P(\Omega) - P(R_n = n-1)\right) + \frac{1}{2} \left(E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)\right) \\
&= \frac{n}{2} - \frac{n}{2} P(R_n = n-1) + \frac{1}{2} E(R_n) - \frac{n-1}{2} P(R_n = n-1) \\
&= \frac{n}{2} - \frac{n}{2} P(R_n = n-1) + \frac{1}{2} E(R_n) - \frac{n-1}{2} P(R_n = n-1)
\end{aligned}
$$

En particulier, on a

$$
\frac{1}{2} E(R_n) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} P(R_n = n-1) - \frac{n-1}{2} P(R_n = n-1)
$$

Et donc

$$
E(R_n) = n - nP(R_n = n-1) - (n-1)P(R_n = n-1) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)
$$

6. On procède de la même façon pour la variance, vial la formule de Koenig-Huygens :

$$
\begin{aligned}
E(R_n^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(R_n = k) = \sum_{k'=0}^{n-2} (k'+1)^2 P(R_n = k'+1) = \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(k'+1)(n+k')P(R_n = k')}{2} \\
&= \frac{n}{2} \sum_{k'=0}^{n-2} P(R_n = k') + \frac{n+1}{2} \sum_{k'=0}^{n-2} k'P(R_n = k') + \frac{1}{2} \sum_{k'=0}^{n-2} k'^2 P(R_n = k') \\
&= \frac{n}{2} \left(P(\Omega) - P(R_n = n-1)\right) + \frac{n+1}{2} \left(E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)\right) + \frac{1}{2} \left(E(R_n^2) - (n \right. \\
&= \frac{n}{2} \left(1 - P(R_n = n-1)\right) + \frac{n+1}{2} \left(E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)\right) + \frac{1}{2} \left(E(R_n^2) - (n-1) \right. \\
&= \frac{n}{2} - \frac{n}{2} P(R_n = n-1) + \frac{n+1}{2} E(R_n) - \frac{(n-1)(n+1)}{2} P(R_n = n-1) + \frac{1}{2} E(R_n^2) - \frac{(n-}{2}
\end{aligned}
$$

A fortiori, on a

$$
\frac{1}{2} E(R_n^2) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} P(R_n = n-1) + \frac{n+1}{2} E(R_n) - \frac{(n-1)(n+1)}{2} P(R_n = n-1) - \frac{(n-1)^2}{2} P(R_n = n-1)
$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
E(R_n^2) &= n - nP(R_n = n-1) + (n+1)E(R_n) - (n-1)(n+1)P(R_n = n-1) - (n-1)^2 P(R_n = \\
E(R_n^2) &= n - (n + (n-1)(n+1) + (n-1)^2)P(R_n = n-1) + (n+1)E(R_n)
\end{aligned}
$$

Et, à fortiori, on a

$$
V(R_n) = E(R_n^2) - E(R_n)^2 = n - (n + (n-1)(n+1) + (n-1)^2)P(R_n = n-1) + (n+1)E(R_n) - E(R_n)^2
$$

Comme $P(R_n = n-1) = \frac{n-E(R_n)}{2n-1}$, il vient

$$V(R_n)=E(R_n^2)-E(R_n)^2=n-(n+(n-1)(n+1)+(n-1)^2)\frac{n-E(R_n)}{2n-1}+(n+1)E(R_n)-E(R_n)^2$$

La flemme de simplifier, c'est gore et vraiment pas cool (*ne pas traiter cette question, ça n'en vaut pas le coup*)

7. Par contre, cette question vaut le coup (elle débloque 8). On déduit des résultats de la question 5 et de la question 4b que

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{n-E(R_n)}{2n-1}=P(R_n=n-1)=\frac{n-1+n-1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}2^{n-1}}=\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{2^n}\\
u_{n-1} &= \binom{2n-4}{n-2}\frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

En utilisant les factorielles, il vient

$$\begin{aligned}
\binom{2n-2}{n-1} &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}=\frac{(2n-2)\times(2n-3)\times(2n-4)!}{(n-1)^2(n-2)!^2}\\
&= \frac{(2n-2)\times(2n-3)}{(n-1)^2}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!^2}=\frac{2\times(2n-3)}{n-1}\times\binom{2n-4}{n-2}
\end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
u_n &= \binom{2n-2}{n-1}\times\frac{1}{2^n}=\frac{2\times(2n-3)}{n-1}\times\binom{2n-4}{n-2}\times\frac{1}{2^n}\\
&= \frac{2\times(2n-3)}{n-1}\times\frac{1}{2^2}\times\binom{2n-4}{n-2}\times\frac{1}{2^{n-2}}\\
&= \frac{2n-3}{2n-2}\times u_{n-1} \qquad (n\geqslant 2)
\end{aligned}$$

8. **SCILAB.**

```
n = input("entier n ? ")
u =  (1-0)/(2*1-1)  // u(1)
for k=2:n
   u  = (2*k-3)/(2*k-2)* u   //  u(k)={2k-3\F 2k-2} ×u(k-1)
end
e = n - u * (2*n -1) // esperance de Rn calculée à partir de un
disp(e, "Esperance de Rn")
```

Exo VII. **PROBA II.** Soient $n\in\mathbb{N}$ et X une variable discrète finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On appelle alors fonction génératrice de X, la fonction $G_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}t^kP(X=k)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

1. Soit $t\in\mathbb{R}$. D'après le théorème de transfert, appliqué à la VAR X qui est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a

$$E(t^X)=\sum_{x\in X(\Omega)}t^xP(X=x)=\sum_{k=0}^{n}t^kP(X=k)=G_X(t)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

2. Soit $t\in\mathbb{R}$. Donner l'expression de $G_X(t)$

a. Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on a $P(X=0)=q$ et $P(X=1)=p$ de sorte que

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k)=t^0P(X=0)+t^1P(X=1)=q+pt \qquad (t\in\mathbb{R})$$

b. Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a $P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ pour $k\in[\![0,n]\!]$, de sorte qu'il résulte du binôme de Newton que

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} t^k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^kq^{n-k}=(pt+q)^n \qquad (t\in\mathbb{R})$$

c. lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, on a $P(X=k)=\frac{1}{n}$ pour $k\in[\![1,n]\!]$, de sorte qu'il résulte de la somme des termes d'une suite géométrique de raison t que

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k)=\sum_{k=1}^{n} t^k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k=\begin{cases}\frac{1}{n}\frac{t-t^{n+1}}{1-t} & \text{si} \quad t\neq 1\\ 1 \quad \text{si} & t=1\end{cases}$$

Dans la suite, X est une var finie quelconque à valeurs dans $[\![0,n]\!]$

3. Si l'on dérive la fonction G_X (qui est un polynôme et donc indéfiniment dérivable), on obtient que

$$\begin{aligned}G'_X(t) &= \left(\sum_{k=0}^{n} t^kP(X=k)\right)'=\sum_{k=0}^{n}(t^k)'P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}kt^{k-1}P(X=k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}kt^{k-1}P(X=k) \qquad (t\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

En particulier, nous remarquons que

$$G'_X(1)=\sum_{k=1}^{n}k1^{k-1}P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=E(X)-0\times P(X=0)=E(X)$$

4. De même, nous remarquons que

$$\begin{aligned}G''_X(t) &= (G'_X)'(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}kt^{k-1}P(X=k)\right)'=\sum_{k=1}^{n}k(t^{k-1})'P(X=k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)t^{k-2}P(X=k)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)t^{k-2}P(X=k) \qquad (t\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

De sorte qu'il résulte du théorème de transfert que

$$\begin{aligned}G''_X(1) &= \sum_{k=2}^{n}k(k-1)1^{k-2}P(X=k)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)P(X=k)\\ &=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)P(X=k)=E(X(X-1))\\ &=E(X^2)-E(X)=V(X)+E(X)^2-E(X)\\ & V(X)+G'_X(1)^2-G_X(1)\end{aligned}$$

En particulier, on a Montrer que $V(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2$

Moralité : un exo théorique qui fait peur de prime abord peut être sacrément plus simple et facile qu'un exo d'apparence concrète... **Pas se fier aux apparences :** *lire l'énoncé, réfléchir à comment faire et décider ENSUITE si l'exo vaut le coup d'être fait ou pas.*

Exo VIII. SCILAB

1.

```
s = 0                      s = sum(((1:7).^3)./((1:7)+1))   // + cool
for k=1:7
  s = s + k^3/(k+1)        s = sum((1:7).^3./(2:8))   // encore + cool ?
end
```

2.

```
a = floor(rand()*6)+1 // dé 1
b = floor(rand()*6)+1 // dé 2
c = floor(rand()*6)+1 // dé 3
   disp("gagné")
end

d = floor(rand(1,3)*6)+1   // + cool
if d == [ 4, 2, 1] || d == [ 4, 1, 2] || d == [ 2, 1, 4] ||
          d == [ 2, 4, 1] || d == [ 1, 2, 4] || d == [ 1, 4, 2] then
   disp("gagné")
end
```

3.

```
function [u] = suite(n)
u = 1
for k = 1 : n
   if k == 2*floor(k/2) then
      u = u^2-2
   else
      u = 4 / u
   end
end
endfunction
```

4.

```
n = 1
while suite(n)<=1.999 || suite(n)>=2.001   // pas performant mais ok
   n = n+1
end
disp(n)
```