

DEVOIR SURVEILLE 5

Exo I. ESPACES VECTORIELS I. Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f
2. Déterminer le noyau de $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On note u un vecteur non nul de ce noyau
3. Calculer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$.
4. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
5. Déterminer (**sans calcul**) la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.
6. Calculer les produits AP et PD ou $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice (des coordonnées) des vecteurs u, v, w dans la base canonique $\mathcal{B}$.
7. Montrer que l'on a $f \circ f \circ f = 2f \circ f + f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exo II. ESPACES VECTORIELS II. On fixe $n \geq 4$ et on pose

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+2}[X], \quad u(P) = (P(0), P'(1))$$

1. a. Montrer que $u : P \mapsto u(P)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ dans $\mathbb{R}^2$.
b. En déduire que $F = \{P \in \mathbb{R}_{n+2}[X] : P(0) = 0 = P'(1)\}$ est un $\mathbb{R}$ -EV.
2. a. Calculer $u(X)$ et $u(1)$
b. En déduire que u est surjective
3. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $L_k = X^{k+2} - (k+2)X$
a. Pour $0 \leq k \leq n$, montrer que $L_k \in F$
b. Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de F
4. Pour $P \in F$, on pose $\Delta(P) = P''(X)$.
a. Montrer que $\Delta : P \mapsto \Delta(P)$ définit une application linéaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Déterminer $\ker(\Delta)$.
c. En déduire que Δ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}_n[X]$
5. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P) = Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est l'unique polynôme vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x tP(t)dt - x \int_1^x P(t)dt$$

- a. Montrer que $f : P \mapsto f(P)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- b. pour $0 \leq k \leq n$, montrer que $f(X^k) = \lambda_k L_k$ où λ_k est un nombre réel à déterminer en fonction de k .
- c. En déduire que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], F)$.
- d. Prouver que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans F .
6. a. A l'aide d'une intégration par partie, prouver que $f(P'') = \lambda P$ avec λ nombre réel à préciser
b. A l'aide de ce qui précède, déterminer Δ^{-1} en fonction de f

Exo III. PROBAS. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On tire une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ième}}$ tirage et S_k la somme des numéros obtenus lors des k premiers tirages

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

On note T_n le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple. Pour $n = 10$, si l'on tire les boules 2, 4, 1, 5, 9, dans cet ordre, alors on a $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

PARTIE A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance
2. a. Déterminer $T_n(\Omega)$
b. Calculer $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$
3. Dans cette question $n = 2$. Donner la loi de T_2
4. Dans cette question $n = 3$. Donner la loi de T_3 et calculer $E(T_3)$

PARTIE B

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $S_k(\Omega)$
2. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 - a. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}
 - b. En utilisant un système complet d'événements liés à S_k , démontrer que

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \quad (k+1 \leq i \leq n)$$

3. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule de Pascal liant $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$
b. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$, en déduire que

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

- c. Pour $1 \leq k \leq n$, prouver par récurrence la proposition

$$\mathcal{H}_k : \quad \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

4. a. Pour $1 \leq k \leq n-1$, comparer les événements $(T_n > k)$ et $(S_k \leq n-1)$
b. Pour $0 \leq k \leq n$, en déduire que $P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$

5. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$ puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$

6. En utilisant que $\ln(1+u) = u\alpha(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \alpha(u) = 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$

Exo IV. On rappelle que f est dérivable en 0, avec $f(0) = a$ et $f'(0) = b$, si, et seulement si,

$$f(x) = a + bx.\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 1$$

On pose $F(0) = 1$ et

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \quad (x \neq 0)$$

1. a. Pour $x \neq 0$, montrer que le nombre $F(x)$ est bien défini.
- b. Pour $x > 0$, établir que $0 \leq F(x) \leq 1$.
- c. Etudier la parité de F (on pourra procéder à un changement de variable)
- d. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et établir que

$$xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \quad (x > 0)$$

- e. Sur $]0, +\infty[$, établir que $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq F(x)$ puis que F est décroissante.
2. a. Montrer que F est continue en 0
- b. (très difficile) Pour $u \geq 0$ et $r(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right)$, établir que

$$0 \leq r(u) \leq \frac{3}{8}u^2$$

- c. En déduire qu'il existe des nombres réels $(a_k)_{0 \leq k \leq 7}$ tels que

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + x^7.\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Indication : calculer la première intégrale et majorer la seconde dans

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \left(1 + \frac{t^4}{2}\right) dt + \frac{1}{x} \int_0^x r(t^4) dt,$$

- d. En déduire que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

Exo V. SCILAB.

1. On exécute le programme suivant :

```
function v=u(n)
    v = 1
    for k=1:n
        v = 1 + log(1+v)
    end
endfunction
```

Comment peut-on interpréter le résultat suivant :

```
--> u(11)
```

`ans = 2.1461879`

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Compléter l'instruction Scilab de la deuxième ligne (avec les tirets) afin de définir cette matrice sous Scilab.

```
A = ones(4, 4)
-----
```

3. On considère deux suites réelles définies par la donnée de $u_0 = \alpha$ et par

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{u_n}}}{2} \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{u_n}}}{2} \quad (n \geq 0)$$

Compléter la fonction Scilab suivante (sachant que les tirets peuvent représenter plusieurs lignes) afin qu'elle renvoie u_n et v_n .

```
function [u,v] = suites(alpha ,n)
    u = alpha
    for k = 1:n
        -----
        -----
    end
endfunction
```

4. Un joueur A lance 10 pièces équilibrées et un joueur B lance 15 pièces pour lesquelles la probabilité d'obtenir pile est $p = 1/3$. Ecrire une fonction « manche » qui renvoie 1 (victoire) lorsque A obtient strictement plus de piles que B et qui renvoie 0 sinon (défaite).
5. Ecrire un script qui simule 100 manches et qui affiche le nombre moyen de victoires obtenu par le joueur A