CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 5

Exo I. ESPACES VECTORIELS I.

1. Le rang de A est égal à 3 ($L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$). De sorte que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 3 = 0$ ce qui donne $\ker(f) = \{0\}$, d'après le théorème du rang.
2. La matrice dans $\mathcal{B}$ de $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est $B = A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Comme les matrices de coordonnées donnent *($C_1 + C_2 + C_3 = 0$ au brouillon)*

$$(A - I_3) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-2 \\ 1-1+0 \\ 0+1-1 \end{pmatrix} = 0,$$

   nous en déduisons que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(1{,}1{,}1) = 0$ de sorte que $(1{,}1{,}1) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$
   Or le rang de B est 2 (*faire* $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$). De sorte que le théorème du rang induit que la dimension du noyau de $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est $3 - 2 = 1$. A fortiori, on a $\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\big((1{,}1{,}1)\big)$.
   On prend $u = (1{,}1{,}1)$ (c'est le vecteur non nul du noyau le plus simple)
3. En procédant grace aux matrices de coordonnées, il vient :

$$\begin{aligned} A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2-1-2 \\ 1+0+0 \\ 0-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8+2-2 \\ 4+0+0 \\ 0+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   En particulier, nous remarquons que $f(v) = -v$ et que $f(w) = 2w$.
4. En calculant le rang, nous obtenons que

$$\mathrm{rg}(u,v,w) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

   Comme (u,v,w) est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Comme $f(v) = -v$, comme $f(w) = 2w$ et comme la relation $u \in \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ induit que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0$, c'est à dire que $f(u) = u$, on a

$$D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. La matrice des coordonnées de u, v, w dans la base $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
A\times P &= \begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2+1-2 & 2-1-2 & 8+2-2\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&8\\1&1&4\\1&-1&2\end{pmatrix}\\
P\times D &= \begin{pmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&8\\1&1&4\\1&-1&2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En particulier, nous avons $AP = PD$ et donc $A = PDP^{-1}$, car la matrice P est inversible (rang 3). *Nous venons de diagonaliser* A

7. Nous allons procéder matriciellement. Comme $A = PDP^{-1}$ est la matrice de f, la matrice de $f\circ f\circ f$ est

$$A^3 = PD^3P^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^3 P^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}P^{-1}$$

De même, la matrice de $2f\circ f + f - 2\mathrm{Id}_{R^3}$ est

$$\begin{aligned}
2A^2 + A - 2\mathrm{I}_3 &= 2PD^2P^{-1} + PDP^{-1} - 2P\mathrm{I}_3P^{-1} = P(2D^2 + D - \mathrm{I}_3)P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}2\times 1^2+1-2 & 0 & 0\\ 0 & 2\times(-1)^2+(-1)-2 & 0\\ 0 & 0 & 2\times 2^2+2-2\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

Comme ces deux matrices sont égales, nous concluons que

$$f\circ f\circ f = 2f\circ f + f - 2\mathrm{Id}_{R^3}$$

Exo II. ESPACES VECTORIELS II.

1. a.
   - $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de référence
   - Pour $P\in\mathbb{R}_{n+2}[X]$, $P(0)$ et $P'(1)$ sont définis et réels donc $u(P)\in\mathbb{R}^2$
   - Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(P,Q)\in\mathbb{R}_{n+2}[X]^2$. alors, on a

$$\begin{aligned}
u(\lambda P+\mu Q) &= \big((\lambda P+\mu Q)(0), (\lambda P+\mu Q)'(1)\big)\\
&= \big(\lambda P(0)+\mu Q(0), \lambda P'(1)+\mu Q'(1)\big)\\
&= \lambda\big(P(0), P'(1)\big) + \mu\big(Q(0), Q'(1)\big)\\
&= \lambda u(P) + \mu u(Q)
\end{aligned}$$

   En conclusion, $u : P \mapsto u(P)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ dans $\mathbb{R}^2$.

   b. Nous remarquons que $F = \mathrm{Ker}(u)$, par définition de F, de sorte que F est un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$.

2.

a. Comme $X' = 1$ et $1' = 0$, nous remarquons que $u(X) = \big(0,1)$ et $u(1) = \big(1,0)$.

b. Comme $\big(u(1), u(X)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, nous remarquons que

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Vect}(u(1), u(X)\big) \subset \mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^2$$

de sorte que $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^2$. A fortiori, u est surjective.

3. a. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $L_k = X^{k+2} - (k+2)X \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ et on a

$$L_k' = (k+2)X^{k+1} - (k+2)$$

et donc

$$L_k(0) = 0^{k+2} - (k+2)0 = 0 \qquad \text{et} \qquad L_k'(1) = (k+2)1^{k+1} - (k+2) = 0$$

En particulier $L_k \in F$.

b. Comme $F = \mathrm{Ker}(u)$ et comme $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^2$, il résulte du thèorème du rang que F est de dimension

$$\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}_{n+2}[X]) - \dim(\mathrm{Im}(u)) = n + 3 - 2 = n + 1$$

Comme la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille de $n{+}1$ polynômes échelonés (car $\deg(L_k = k+2)$ en degré de F, qui est de dimension $n+1$, c'est une base de F.

4. Pour $P \in F$, on pose $\Delta(P) = P''(X)$.

a.
- F et $\mathbb{R}_n[X]$ sont des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels
- Pour $P \in F \subset \mathbb{R}_{n+2}[X]$, on a $P \in \mathbb{R}_{n+2}$ et donc $P'' = \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. A fortiori, Δ est une application.
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in F^2$. Alors, on a

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P'' + \mu Q'' = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)$$

A fortiori, $\Delta : P \mapsto \Delta(P)$ définit une application linéaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} P \in \ker(\Delta) &\iff P \in F \text{ et } \Delta(P) = 0 \\ &\iff P \in F \text{ et } P'' = 0 \\ &\iff P \in F \text{ et } \deg(P) \leqslant 1 \\ &\iff P \in F \cap \mathbb{R}_1[X] \end{aligned}$$

Or un polynôme $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$ est de la forme $P = a + bX$ et vérifie

$$a = P(0) = 0 \text{ et } b = P'(1) = 0$$

De sorte que $P = 0$. A fortiori, nous avons $\ker(\Delta) = \{0\}$.

c. Nous avons précédemment montré que $\dim(F) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Autrement dit, on a au départ et à l'arrivée deux espaces vectoriels de même dimension. Comme Δ est injective d'après la question précédente, c'est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

5. a. (*Elle est chaude celle la)*

- $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de référence
- Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de sorte que

$$\begin{aligned}\int_0^x tP(t)\mathrm{d}t - x\int_1^x P(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x t\sum_{k=0}^n a_k t^k \mathrm{d}t - x\int_1^x \sum_{k=0}^n a_k t^k \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^x t\times t^k\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^n a_k x\int_1^x t^k\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left[\frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_0^x - \sum_{k=0}^n a_k x\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x \qquad (x\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

  Et on se rend compte (la flemme de l'écrire) qu'il existe bien un polynôme à coefficients réels $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\int_0^x tP(t)\mathrm{d}t - x\int_1^x P(t)\mathrm{d}t = Q(x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

  Par ailleurs, un tel polynôme est forcément unique (s'il y en a un autre, que je note R, on a $Q(X) = R(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ de sorte que $Q - R = 0$ en tant que polynôme avec une infinité de racines) A fortiori, $f(P)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}[X]$. Donc f est une application
- soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. alors, nous avons

$$\begin{aligned}f(\lambda P+\mu Q)(x) &= \int_0^x t(\lambda P+\mu Q)(t)\mathrm{d}t - x\int_1^x (\lambda P+\mu Q)(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^x tP(t)\mathrm{d}t + \mu\int_0^x tQ(t)\mathrm{d}t - x\left(\lambda\int_1^x P(t)\mathrm{d}t + \mu\int_1^x Q(t)\mathrm{d}t\right)\\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \qquad (x\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

  On déduit alors de l'égalité des fonctions polynômes que

$$f(\lambda P+\mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

En conclusion, f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b. pour $0 \leqslant k \leqslant n$, nous posons $R_k = f(X_k)$ et nous remarquons que

$$\begin{aligned}R_k(x) = &\int_0^x tP(t)\mathrm{d}t - x\int_1^x P(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x t\times t^k\mathrm{d}t - x\int_1^x t^k\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_0^x - x\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \frac{x^{k+2}}{k+2} - x\times\frac{x^{k+1}-1}{k+1}\\ &= \frac{x^{k+2}}{k+2} - \frac{x^{k+2}-x}{k+1} = x^{k+2}\times\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right) - \frac{x}{k+1}\\ &= \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{(k+2)x}{(k+1)(k+2)} = \frac{L_k(x)}{(k+1)(k+2)} \qquad (x\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

A fortiori, on a $R_k = f(X^k) = \lambda_k L_k$ avec $\lambda_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

c. F est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ mais comme $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de F, il résulte de la question précédente que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(u(X^0, \dots u(X^n)\right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{L_0}{2}, \dots, \frac{L_n}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(L_0, \dots, L_n\right) = F\end{aligned}$$

A fortiori, la restriction $\tilde{f}$ de f à l'arrivée à F est une application linéaire de$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], F)$.

d. Comme $R_n[X]$ et F sont deux espaces vectoriels de mêm est dimension $n+1$ et comme $\mathrm{Im}(f) = F$, ce qui revient à dire que $\tilde{f}$ est surjective, l'application $\tilde{f}$ est un isomorphisme (de $\mathbb{R}_n[X]$ dans F).

6. a. soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors nous posons $R = f(P'')$ et nous procédons à une intégration par partie pour obtenir que

$$\begin{aligned}
R(x) &= \int_0^x tP''(t)\mathrm{d}t - x\int_1^x P''(t)\mathrm{d}t \\
R(x) &= [tP'(t)]_0^x - \int_0^x P'(t)\mathrm{d}t - x\left[P'(t)\right]_1^x \\
R(x) &= xP'(x) - \int_0^x P'(t)\mathrm{d}t - x\left(P'(x) - P'(1)\right) \\
R(x) &= xP'(1) - \int_0^x P'(t)\mathrm{d}t \\
R(x) &= xP'(1) - [P(t)]_0^x \\
R(x) &= xP'(1) - (P(x) - P(0)) \\
R(x) &= P(0) + xP'(1) - P(x)
\end{aligned}$$

A fortiori, si $P \in F$ (*hypothèse manquant dans le sujet original ?)*, comme $P(0) = 0$ et $P'(1) = 0$, nous obtenons que

$$f(P'')(x) = R(x) = -P(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Ce qui nous donne l'identité polynomiale $f(P'') = -P$. En particuloier, on a $f(P'') = \lambda P$ avec $\lambda = -1$.

b. D'après le résultat de la question précédente, pour $P \in F$, on a $f(P'') = -P$. A fortiori, comme $\Delta(P) = P''$, il vient $f(\Delta(P)) = -P$ C'est à dire $f \circ \Delta = -\mathrm{Id}_F$. En composant à droite avec Δ^{-1}, il vient

$$f = -\mathrm{Id}_F \circ \Delta^{-1}$$

C'est à dire $\Delta^{-1} = -f$

Exo III. PROBAS. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On tire une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ième}}$ tirage et S_k la somme des numéros obtenus lors des k premiers tirages

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On note T_n le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple. Pour $n = 10$, si l'on tire les boules 2, 4, 1, 5, 9, dans cet ordre, alors on a $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

PARTIE A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit une loi uniforme $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. A fortiori, on a $E(X_n) = \frac{n+1}{2}$.
2. a. La variable T_n prend toutes les valeurs allant de 1 (si on tire directement la boule n) à n (si on tire n fois de suite la boule 1). De sorte que $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$
   b. En particulier, on a
$$P(T_n = 1) = \frac{1}{n} \qquad P(T_n = n) = P(\cap_{k=1}^{n-1}(X_k = 1)) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
3. Pour $n = 2$. On a $T_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$ et $P(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$ d'après les questions précédentes, de sorte que T_2 suit une loi uniforme $T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2\})$
4. Pour $n = 3$. On a On a $T_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et $P(T_3 = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(T_3 = 3) = \frac{1}{3^2}$ de sorte que
$$P(T_3 = 2) = 1 - P(T_3 = 1) - P(T_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{9-3-1}{9} = \frac{5}{9}$$
   A fortiori, on a
$$E(T_3) = 1P(T_3 = 1) + 2P(T_3 = 2) + 3P(T_3 = 3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$$

PARTIE B

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, S_k prend toutes les valeurs entre k (les k premieres boules tirées portent le numéro 1) et kn (les k premieres boules tirées portent le numéro n) De sorte que $S_k(\Omega) = [\![k,kn]\!]$
2. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$.
   a. On a trivialement $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$
   b. Supposons $k+1 \leqslant i \leqslant n$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(S_k = j)_{k \leqslant j \leqslant kn}$, il vient
$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \textstyle\sum_{j=k}^{kn} P(S_k = j) \times P_{S_k=j}(S_{k+1} = i) \\ &= \textstyle\sum_{j=k}^{kn} P(S_k = j) \times P(X_{k+1} = i-j) \end{aligned}$$
   Comme $P(X_{k+1} = i-j)$ vaut $\frac{1}{n}$ si $i-j \in [\![1,n]\!]$ et 0 sinon puisque $X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$, il vient
$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \textstyle\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \times P(X_{k+1} = i-j) \\ &= \textstyle\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \textstyle\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \end{aligned}$$
   En effet, pour obtenir une somme égale à i, avec $k+1 \leqslant i \leqslant n$, sachant que la précédente somme S_k vaut $j \geqslant k$, il faut que $1 \leqslant i-j \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k$ de sorte que $k \leqslant j \leqslant i-1$
3. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, la formule de Pascal est

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $i > k$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_i : \qquad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

- La proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie car

$$\sum_{j=k}^{k} \binom{j-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$$

- Supposons $\mathcal{P}_i$ pour un entier $i > k$ et prouvons $\mathcal{P}_{i+1}$. D'après la relation de Chasles, la proposition $\mathcal{P}_i$ et la relation de Pascal, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i}{k} \end{aligned}$$

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_i$ est vraie pour $i > k$

c. Soit $n \geqslant 1$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{H}_k : \qquad \forall i \in [\![k,n]\!] \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

- La proposition $\mathcal{H}_1$ est vraie car

$$P(S_1 = i) = P(X_1 = i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1} \binom{i-1}{0} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

- Supposons $\mathcal{H}_k$ pour un entier $k \in [\![1,n[\![$ et prouvons $\mathcal{P}_{k+1}$. Soit $i \in [\![k+1,n]\!]$. D'après B.2b, la proposition$\mathcal{H}_k$ et le résultat de B3b, nous avons

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{n^k} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} \qquad (k+1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{H}_k$ est vraie pour $1 \leqslant k \leqslant n$

4. a. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $(T_n > k) = (S_k \leqslant n-1)$: Le nombre de tirage nécessaire pour obtenir une somme supérieure ou égale à n est strictement supérieur à k si, et seulement si, la somme des k premiers tirages est inférieure ou égale à $n-1$.

   b. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, nous déduisons que B3c et de B3b que

$$\begin{aligned} P(T_n > k) = \quad & P(S_k \leqslant n-1) = \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) \\ & = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} \\ & = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

5. Comme T_n est une VAR finie, à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, et comme

$$(T_n = k) = (T_n > k-1) \setminus (T_n > k),$$

il résulte du changement d'indice $\ell = k-1$ que

$$\begin{aligned} E(T_n) \quad & = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) \\ & = \sum_{k=1}^{n} k\big(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\big) \\ & = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\ & = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)P(T_n > \ell) - \sum_{k=1}^{n+1} kP(T_n > k) \\ & = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell P(T_n > \ell) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} kP(T_n > k) + (n+1)\underbrace{P(T_n > n+1)}_{=0}\right) \\ & = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) \end{aligned}$$

En particulier, il résulte du résultat obtenu au B4a et du binôme de Newton que

$$E(T_n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{n^\ell}\binom{n-1}{\ell} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

6. En procédant à un dévelopement limité, nous remaquons que

$$\begin{aligned} E(T_n) \quad & = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n-1} \\ & = \mathrm{e}^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ & = \mathrm{e}^{(n-1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ & = \mathrm{e}^{1+o(1)} \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient alors (par composition de limites, la fonction exponentielle étant continue en 1)

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

Exo IV. On pose $F(0) = 1$ et

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t \qquad (x \neq 0)$$

1. a. L'application $t \mapsto 1+t^4$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), à valeurs strictements positives. Par composition avec l'application continue $u \mapsto u^{-1/2}$ sur $]0,+\infty[$, l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. A fortiori, pour chaque nombre réel x, l'intégrale $\in_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$ est définie (en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment). Par conséquent, pour $x \neq 0$, le quotient $F(x)$ est bien défini, car son dénominateur n'est pas nul.

   b. Pour $x > 0$, nous avons

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant x)$$

   En intégrant cette inégalité sur $[0,x]$, il résuklte de la croissance de l'intégrale que

$$0 = \int_0^x 0\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = F(x) \leqslant \int_0^x 1\mathrm{d}t = x$$

   En divisant par $x > 0$, il vient alors que $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ pour $x > 0$.

   c. soit $x > 0$.

   - Comme $u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$, à valeurs dans $[-x,0]$
   - et comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[-x,0]$,

   en procédant au changement de vairiable $t = -u$, il vient

$$F(-x) = \tfrac{1}{-x}\int_0^{-x} \tfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$$
$$= \tfrac{1}{-x}\int 0^x \tfrac{1}{\sqrt{1+(-u)^4}}(-\mathrm{d}u) = \tfrac{1}{x}\int_0^x \tfrac{1}{\sqrt{1+u^4}}\mathrm{d}u$$
$$= F(x) \qquad (x > 0)$$

   A fortiori, l'application F est paire sur $\mathbb{R}$.

   d. Comme l'application $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, nous remarquons que l'application $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que c'est l'unique primitive de g sur $\mathbb{R}$, s'annulant en 0. En particulier, le quotient $F : x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, on a

$$F'(x) = \frac{G'(x)}{x} - \frac{G(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{G(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}} - \frac{F(x)}{x} \qquad (x \neq 0).$$

   A fortiori, en multipliant par $x > 0$, on obtient que

$$xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \qquad (x > 0)$$

e. Pour $x > 0$, nous déduisons de la décroissance de l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ sur $\mathbb{R}^+$ que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant \frac{1}{1+t^4} \qquad (0 \leqslant t \leqslant x)$$

En intégrant sur $[0,x]$, il résulte alors de la croissance de l'intégrale que

$$x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \int 0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t = xF(x)$$

En divisant par $x > 0$, nous obtenons alors que $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant F(x)$. En reportant dans la relation établie en 1d, il vient alors

$$xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 0 \qquad (x > 0)$$

De sorte que $F'(x) \leqslant 0$ pour $x > 0$. En conclusion, F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. a. Nous avons montré que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. De sorte qu'elle admet le dévelopement limité à l'ordre 1

$$xF(x) = G(x) = G(0)+G'(0)x+o_0(x) = 0+g(0)x+o_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+0^4}}x+o_0(x) = x+o_0(x)$$

En divisant par $x \neq 0$, il vient

$$F(x) = \frac{x+o_0(x)}{x} = 1 + o_0(1)$$

De sorte que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} = 1 = F(0)$. En particulier, F est continue en 0

b. Erreur d'énoncé. Nous allons montrer que $r(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right)$ vérifie

$$0 \leqslant r(u) \leqslant \frac{3}{8}u^2 \qquad (u \geqslant 0)$$

La fonction$r : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et nous avons

$$r'(u) = -\frac{1}{2}(1+u)^{-3/2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2(1+u)^{3/2}} + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

Comme $r(0) = 0$, il résulte de la croissance de la fonction f que

$$0 \leqslant r(u) \qquad (u \geqslant 0)$$

L'autre inégalité est très très chaude. Remarquons que (comme le polynôme $1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8}$ ne s'annule jamais, car $\Delta < 0$, il reste strictement positif sur $\mathbb{R}$)

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \tfrac{u}{2}\right) \leqslant \tfrac{3u^2}{8} \\
\iff\quad & \tfrac{1}{\sqrt{1+u}} \leqslant 1 - \tfrac{u}{2} + \tfrac{3u^2}{8} \\
\iff\quad & \tfrac{1}{1+u} \leqslant (1 - \tfrac{u}{2} + \tfrac{3u^2}{8})^2 \\
\iff\quad & 1 \leqslant (1+u)(1 - \tfrac{u}{2} + \tfrac{3u^2}{8})^2 \\
\iff\quad & 1 \leqslant (1+u)\left(1 - u + u^2(\tfrac{1}{4} + \tfrac{6}{8}) - \tfrac{3}{8}u^3 + \tfrac{9u^4}{8^2}\right) \\
\iff\quad & 1 \leqslant 1 - u + u^2(\tfrac{1}{4} + \tfrac{6}{8}) - \tfrac{3}{8}u^3 + \tfrac{9u^4}{8^2} + u - u^2 + u^3(\tfrac{1}{4} + \tfrac{6}{8}) - \tfrac{3}{8}u^4 + \tfrac{9u^5}{8^2} \\
\iff\quad & 1 \leqslant 1 + u^3 \tfrac{40 - 15u + 9u^2}{8^2}
\end{aligned}
$$

Et comme $\Delta = 15^2 - 4 * 40 * 9 < 0$, le polynôme $40 - 15u + 9u^2$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$. (question de malade, j'ai bien mis une heure pour trouver) Du coup, on a bien

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leqslant \frac{3u^2}{8} \qquad (u \geqslant 0)$$

A la reflexion non. J'ai paniqué, mal calculé et trouvé une réponse horrible mais il y avait bien plus simple (avec les tableaux de variation). En posant $s'u) = r(u) - \frac{3u^2}{8}$. L'application s est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$s'(u) = r'(u) - \frac{6u}{8} = -\frac{1}{2}(1+u)^{-3/2} - \frac{6u}{8} \qquad (u \geqslant 0)$$

De sorte que

$$s''(u) = \frac{3}{4}(1+u)^{-5/2} - \frac{6}{8} = \frac{3}{4}(1+u)^{-5/2} - \frac{3}{4} \leqslant 0$$

Donc s' est décroissante avec $s(0) = r'(0) - 0 = 0$ de sorte que s' est négative avec $s(0) = r(0) - 0$ donc s est de signe négatif, d'où la seconde inégalité...Voila, plus simple et classique

c. Pour $u = t^4$, nous obtenons alors que

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - \left(1 - \frac{t^4}{2}\right) \leqslant \frac{3t^8}{8} \qquad (t \geqslant 0)$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et x, il vient

$$0 = \int_0^x 0\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - \left(1 - \frac{t^4}{2}\right)\right) \mathrm{d}t = xF(x) - \left[t - \frac{t^5}{10}\right]_0^x \leqslant \int_0^x \frac{3t^8}{8}\mathrm{d}t = \left[\frac{3t^9}{8\times 9}\right]_0^x$$

En particulier, il vient

$$0 \leqslant xF(x) - x + \frac{x^5}{10} \leqslant 3\frac{x^9}{8\times 9} \qquad (x > 0).$$

En divisant par $x > 0$, nous obtenons alors que

$$0 \leqslant F(x) - 1 + \frac{x^4}{10} \leqslant 3\frac{x^8}{8\times 9} \qquad (x > 0).$$

Et donc qu'il existe des nombres réels $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant 7}$ tels que

$F(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+x^7.\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

On a $a_0 = 1$, $a_4 = -\frac{1}{10}$ et les autres nombres sont nuls.

d. comme F est continue en 0 et admet un dévelopement limité à l'ordre 1, elle est dérivable en 0 et on a

$$F'(0) = a_1 = 0$$

Exo V. SCILAB.

1. Ce programme calcule le 11 ième terme de la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \log(1 + u_n) \end{cases}$$

En particulier, on a $u_{11} = 2.1461879$ (aux erreurs de calcul près)

2.

```
A = ones(4, 4)
A(2:3,2:3)=0
```

3. On considère deux suites réelles définies par la donnée de $u_0 = \alpha$ et par

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{u_n}}}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{u_n}}}{2} \qquad (n \geqslant 0)$$

Compléter la fonction Scilab suivante (sachant que les tirets peuvent représenter plusieurs lignes) afin qu'elle renvoie uu_n et v_n.

```
function [u,v] = suites(alpha ,n)
  u = alpha
  for k = 1:n
    v = sqrt(2-sqrt(u))/2 // v d'abbord sinon, ce n'est pas correct
    u = sqrt(2+sqrt(u))/2
  end
endfunction
```

4.

```
function [r] = manche()
  A = sum(rand(1, 10)<1/2)
  B = sum(rand(1, 15)<1/3)
  if A > B then
     r = 1
  else
     r = 0
  end
endfunction
```

5.

```
s = 0
for a = 1: 100
   s = s + manche()
end
disp(s/100)
```