EML 2007

DEVOIR SURVEILLE 6

Exo I. Algèbre. Dans cet exercice $n \geqslant 3$ et on pose

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : (1 - nX^2)P' + 2nXP = 0\}$$
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad g(P) = (1 - nX^2)P'' + 2nXP'$$

1. a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. On admet pour la suite que $\dim(F) = 1$.
   b. Déterminer un réel α pour que $\alpha X^2 - 1 \in F$. En déduire une base de F.
2. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
3. a. Montrer que $P \in \operatorname{Ker}(g) \Longleftrightarrow P' \in F$.
   b. Déduire de ce qui précède que $(1, \frac{n}{3}X^3 - X)$ est une base de $\operatorname{Ker}(g)$.
   c. g est il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
4. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$.
   a. Préciser $\dim(\operatorname{Im}(g))$ puis calculer $g(X)$ et $g(X^2)$.
   b. En déduire que $\big(g(X), g(X^2)\big)$ forme une base de $\operatorname{Im}(g)$

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $n \geqslant 4$.

   c. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $h(P) = g(P) - P$.
      i. Montrer que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
      ii. Calculer $h(1)$, $h(X)$, $h(X^2)$ et $h(X^3)$
      iii. Pour $k \geqslant 4$, montrer que
      $$h(X^k) = (nk(3-k) - 1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$
      iv. En déduire que h est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
   d. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $f \neq 0$ et $g \circ f = 0$.
      i. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$
      ii. En déduire les valeurs possibles de $\dim(\operatorname{Ker} f)$
   e. Montrer, à l'aide de ce qui précède que $g \circ g \neq 0$.

Exo II. Analyse (Eml). On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I. Etude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. On considère l'application $A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad (x \geqslant 0).$$

   a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} \qquad (x > 0)$$

b. Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$

d. Dresser le tableau de variation de A et en déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application $B : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \qquad (x \geqslant 0).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} \qquad (x > 0)$$

b. Dresser le tableau de variation de B. Quel est le signe de f'' sur $]0, +\infty[$?

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f

Partie II. Un développement en série

5. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$$

6. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, en déduire que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)$$

où l'on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t$

7. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, établir que $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

8. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Partie III. Egalité d'une intégrale et d'une somme de série

9. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, montrer à l'aide du résultat de la question 7 que

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}$$

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

11. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}\end{aligned}$$

12. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Exo III. **PROBA (Ecricom).** On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$. On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{\text{ième}}$ l'autre côté. La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. De même pour les séries suivantes. Pour $i \in N^*$, on note P_i (resp F_i) l'événement le $i^{\text{ième}}$ lancer amène Pile (resp. Face).

Partie I. Etude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.
   a. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$ puis vérifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$$
   b. Montrer que L_1 admet une espérance et la déterminer
   c. Montrer que L_1 admet une variance et la calculer.
2. On note L_2 la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série.
   a. Pout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évenement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i variant de 1 à $n+k+1$ puis calculer $P\big((L_1 = n) \cap (L_2 = k)\big)$
   b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$$

Partie II. Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est équilibrée (i.e. $p = \frac{1}{2}$). On note N_n le nombre de séries lors des n premiers lancers :

- La première série est de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{\text{ième}}$ l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce
- La dernière série se termine nécessairement au $n^{\text{ième}}$ lancer.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP... (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $N_1 = N2 = 1$ $N_3 = \cdots = N_6 = 2$; $N_7 = N_8 = 3$; $N_9 = \cdots = N_{11} = 4$; les données ne permettant évidemment pas de déterminer N_{12}.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
3. a. Rappeler ce que signifie la syntaxe scilab floor(2*rand())
   b. Recopier et compléter le script scilab suivant pour que, n étant un entier entré par l'utilisateur, il simule les n premiers lancers de pièce (dont les résultats seront stockés dans la liste x) et détermine les valeurs de N_1, N_2, , N_n (qui seront stockés dans la liste N)

```
n=input('entrer un entier n non nul') ; x=zeros(1,n); N=zeros(1,n)
x(1)=......... ; N(1)=.........
for i=.........
x(i)=.........
if ......... then, N(i)=........., else N(i)= ......... ,end
end
```

   c. Ecrire une fonction simulant une VAR X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$, on note $G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k$, la fonction génératrice de N_n.
   a. Que vaut $G_n(1)$?
   b. Que représente $G'_n(1)$?
   c. Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$, montrer que

$$P\big((N_n = k) \cap P_n\big) = \frac{1}{2}P\big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\big) + \frac{1}{2}P\big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\big)$$

   On admet de même que

$$P\big((N_n = k) \cap F_n\big) = \frac{1}{2}P\big((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\big) + \frac{1}{2}P\big((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\big)$$

   d. Montrer alors que $P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)$
   e. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.
   f. Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$.
   g. Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers