EML 2007

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 6

Exo I. Algèbre. Dans cet exercice $n \geqslant 3$ et on pose

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : (1-nX^2)P' + 2nXP = 0\}$$
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad g(P) = (1-nX^2)P'' + 2nXP'$$

1. a. • $F \subset \mathbb{R}_n[X]$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, par définition de F
   • $F \neq \emptyset$ car le polynôme nul $P = 0$ est trivialement dans F.
   • Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in F^2$.
   Comme $P \in F \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in F \subset \mathbb{R}_n[X]$ et comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, stable par combinaison linéaire, on a $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus

$$\begin{aligned} & (1-nX^2)(\lambda P+\mu Q)' + 2nX(\lambda P+\mu Q) \\ = \; & \lambda \underbrace{((1-nX^2)P' + 2nXP)}_{=0 \text{ car } P\in F} + \mu \underbrace{((1-nX^2)Q' + 2nXQ)}_{=0 \text{ car } Q\in F} \\ = \; & \lambda.0 + \mu.0 = 0 \end{aligned}$$

   A fortiori, $\lambda P + \mu Q \in F$.
   En conclusion, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

   b. Comme $\alpha X^2 - 1 \in \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ puisque $n \geqslant 3$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} \alpha X^2 - 1 \in F & \iff (1-nX^2)(\alpha X^2-1)' + 2nX(\alpha X^2 - 1) = 0 \\ & \iff (1-nX^2)2\alpha X + 2nX(\alpha X^2-1) = 0 \\ & \iff X(2\alpha - 2n) = 0 \\ & \iff \alpha = n \end{aligned}$$

   En particulier, pour $\alpha = n$, on a $\alpha X^2 - 1 = nX^2 - 1 \in F$. Comme F est de dimension 1, on a

$$F = \mathrm{Vect}(nX^2 - 1)$$

2. • $R_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (le même au départ et à l'arrivée)
   • Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. A fortiori, on a $(1-nX^2)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $2nXP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc aussi $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   • Pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in F^2$, on a

$$\begin{aligned} g(\lambda P + \mu Q) & = (1-nX^2)(\lambda P + \mu Q)'' + 2nX(\lambda P+\mu Q)' \\ & = \lambda\left((1-nX^2)P'' + 2nXP'\right) + \mu\left((1-nX^2)Q'' + 2nXQ'\right) \\ & = \lambda g(P) + \mu g(Q) \end{aligned}$$

   En particulier g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. a. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P' \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(g) & \iff g(P) = 0 \\ & \iff (1-nX^2)P'' + 2nXP' = 0 \\ & \iff (1-nX^2)(P')' + 2nX(P') = 0 \\ & \iff P' \in F \end{aligned}$$

b. En particulier, nous obtenons que

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(g) &\iff P' \in F \\ &\iff P' \in \mathrm{Vect}(nX^2-1) \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, P' = a\left(nX^2-1\right) \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = a\left(n\frac{X^3}{3} - X\right) + b \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}\left(n\frac{X^3}{3} - X, 1\right) \end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $n\frac{X^3}{3} - X$ et 1 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre (et trivialement génératrice de $\mathrm{Ker}(g)$). En particulier, une base de $\mathrm{Ker}(g)$ est $(1, \frac{n}{3}X^3 - X)$.

c. g n'est pas injectif car $\mathrm{Ker}(g) \neq \{0\}$. Donc g ne peut pas être un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.

a. D'après le résultat de la question précédente, on a $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$. Il découle alors du théorème du rang que

$$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = 4 - 2 = 2$$

Comme $n = 3$, nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} g(X) &= (1-3X^2)X'' + 2 \times 6X \times X' = 12X \\ g(X^2) &= (1-3X^2)(X^2)'' + 2 \times 3X(X^2)' = 2(1-3X^2) + 24X^2 = 2 + 18X^2 \end{aligned}$$

b. Comme les vecteurs $g(X)$et $g(X^2)$ forment une famille libre,n en tant que polynômes échelonnés en degré, il résulte du résultat de la question précédente que $\big(g(X), g(X^2)\big)$ forme une base de $\mathrm{Im}(g)$.

c. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $h(P) = g(P) - P$.

i. Comme les applications g et Id sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, l'application $h = g - \mathrm{Id}$ l'est également et donc $h \in \mathcal{L}(E)$

ii. On a

$$\begin{aligned} h(1) &= g(1) - 1 = -1 \text{ car } 1 \in \mathrm{Ker}(g) \\ h(X) &= g(X) - X = (1-nX^2)X'' + 2nXX' - X = 2nX - X = (2n-1)X \\ h(X^2) &= g(X^2) - X^2 = (1-nX^2)(X^2)'' + 2nX(X^2)' - X^2 = 2 + 17X^2 \\ &= 2(1-nX^2) + 4nX^2 - X^2 = 2 + (2n-1)X^2 \\ h(X3) &= g(X^3) - X^3 = (1-nX^2)(X^3)'' + 2nX(X^3)' - X^3 \\ &= 6X(1-nX^2) + 6nX^3 - X^3 = 6X - X^3 \end{aligned}$$

iii. Pour $k \geqslant 4$, on a

$$\begin{aligned} h(X^k) &= g(X^k) - X^k \\ &= (1-nX^2)(X^k)'' + 2nX(X^k)' - X^k \\ &= (1-nX^2)k(k-1)X^{k-2} + 2nXkX^{k-1} - X^k \\ &= k(k-1)X^{k-2} - nk(k-1)X^k + 2nkX^k - X^k \\ &= k(k-1)X^{k-2} + (2nk - nk^2 + nk - 1)X^k \\ &= k(k-1)X^{k-2} + (nk(3-k) - 1)X^k \qquad (k \geqslant 4) \end{aligned}$$

iv. Il résulte des deux questions précédentes que $h(X^k)$ est un polynôme de degré k pour $0 \leqslant k \leqslant n$. De sorte que $(h(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de polynôme échelonnée en degré. Comme c'est une famille libre, nous obtenons que $\text{Im}(h) = \text{Vect}(h(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}) = \mathbb{R}_n[X]$. En particulier, h est de rang $n+1$, h est surjective et comme h est un endomorphisme d'un espace de dimension finie (même dimension finie au départ et à l'arrivée), c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $f \neq 0$ et $g \circ f = 0$.

i. Soit $Q \in \mathfrak{I}(f)$ alors il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = f(P)$. Et alors

$$g(Q) = q(f(P)) = g \circ f(P) = 0(P) = 0$$

En particulier $Q \in \text{Ker}(g)$. En conclusion, on a $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$

ii. On sait que $\dim(\text{Ker}(g)) = 2$ et comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, on a forcément $0 \leqslant \dim(\mathfrak{I}(f)) \leqslant 2$.

e. supposons que $g \circ g = 0$. Alors, d'après le résultat précédent avec $f = g$, on aurait

$$0 \leqslant \dim(\mathfrak{I}(g)) \leqslant 2$$

ce qui n'est pas possible car d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathfrak{I}g) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Ker}\, g) = n + 1 - 2 = n - 1 \geqslant 4 - 1 = 3$$

A fortiori, on a $g \circ g \neq 0$.

Exo II. Analyse (Eml). On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I. Etude de l'application f

1. les applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x$ sont continues sur $]0, +\infty[$ (polynôme), à valeurs strictement positives. Comme $u \mapsto \ln(u)$ est continue sur $]0, +\infty[$, la composée $x \mapsto \ln(1 + x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et le quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continu sur $]0, +\infty[$.
   Par ailleurs, il résulte d'un calcul de développement limité à l'ordre 1 du logarithme que

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x}{x} = \frac{x + o_0(x)}{x} = 1 + o_{0^+}(1)$$

   A fortiori, on a $f(0^+) = 1 = f(0)$. De sorte que f est continue à droite en 0. En conclusion, f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. a. Par le même raisonnement (remplacer « continu » par « $\mathcal{C}^1$ », on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, en dérivant le quotient sur $]0, +\infty[$, on obtient que

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times x - \ln(1 + x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2} \qquad (x > 0)$$

b. En effectuant un développement limité de $A(x)$ en 0 à l'ordre 2, il vient

$$\begin{aligned} A(x) &= \tfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \\ &= x \times \tfrac{1}{1-(-x)} - \ln(1+x) \\ &= x \times (1 - x + o_0(x)) - \left(x - \tfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)\right) \\ &= -\tfrac{x^2}{2} + o_0(x^2) NR \end{aligned}$$

En divisant par x^2, il vient

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o_0(1) \qquad (x > 0)$$

De sorte que l'on obtient que $f'(0^+) = -\frac{1}{2}$.

c. On a montré que f' est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $f'(0^+) = -\frac{1}{2}$. A fortiori, il résulte du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

d. Bon, A est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$A'(x) = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} = -\frac{x}{(x+1)^2} < 0 \qquad (x \geqslant 0).$$

En particulier, A est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. On remarque également que $A(0) = 0$ et que A diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

e. En $+\infty$, il résulte du théorème de croissance comparée que

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + o_{+\infty}(1) = o_{+\infty}(1)$$

En particulier, la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

3. On considère l'application $B : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$B(x) = \frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \qquad (x \geqslant 0).$$

a. Avec le raisonnement de la question 1, en remplaçant « continu » par $\mathcal{C}^2$, on montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et, de plus, on a

$$\begin{aligned} f'(x) = & \left(\tfrac{A(x)}{x^2}\right)' = \tfrac{A'(x)x^2 - 2xA(x)}{x^4} \\ & = \tfrac{A'(x)x - 2A(x)}{x^3} \qquad (x > 0) \end{aligned}$$

Or, nous remarquons que

$$\begin{aligned} A'(x)x - 2A(x) = & \tfrac{-x}{(1+x)^2} \times x - 2\left(\tfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) \\ = & \tfrac{-x^2}{(1+x)^2} - \tfrac{2x(1+x)}{1+x} + 2\ln(1+x) \\ = & \tfrac{-3x^2 - 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) = B(x) \qquad (x > 0) \end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} \qquad (x > 0)$$

b. L'application B est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\tfrac{(6x+2)(1+x)^2 - 2(1+x)(3x^2+2x)}{(1+x)^4} + \tfrac{2}{1+x} \\ &= \tfrac{-(6x+2)(1+x)+2(3x^2+2x)+2(1+x)^2}{(1+x)^3} \\ &= \tfrac{-(6x^2+8x+2)+(6x^2+4x)+2(1+2x+x^2)}{(1+x)^3} \\ &= \tfrac{2x^2}{(1+x)^3} > 0 \qquad (x > 0) \end{aligned}$$

A fortiori, l'application B est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et vérifie $B(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} B(x) = +\infty$. Nous en déduisons que B est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc que f'' est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

4. La courbe doit faire la synthèse de tout ce qu'on a trouvé jusqu'à maintenant. En utilisant votre imagination, vous pouvez voir la magnifique courbe tracée par votre vénéré professeur dans ce corrigé.

Partie II. Un développement en série

5. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, il résulte de la formule pour les sommes géométriques de raison $-t \neq 1$ que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k &= \textstyle\sum_{k=0}^{N} (-t)^k = \tfrac{(t)^0 - (-t)^{N+1}}{1-(-t)} \\ &= \tfrac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} = \tfrac{1}{1+t} - \tfrac{(-t)^{N+1}}{1+t} \end{aligned}$$

A fortiori, nous avons montrer que

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$$

6. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$. En intégrant l'égalité précédente (entre fonctions continues) sur le segment $[0,x]$, il résulte de la linéarité de l'intégrale que

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \textstyle\int_0^x \tfrac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \tfrac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \right) \mathrm{d}t \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^{N+1} \tfrac{t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left[\tfrac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x + J_N(x) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \tfrac{x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \end{aligned}$$

7. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous déduisons de l'inégalité $0 \leqslant \frac{t^{N+1}}{1+t} \leqslant t^{N+1}$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$ que

$$\begin{aligned} |J_N(x)| &\leqslant \textstyle\int_0^x \left| (-1)^{N+1} \tfrac{t^{N+1}}{1+t} \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \textstyle\int_0^x \tfrac{t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \textstyle\int_0^x t^{N+1} \mathrm{d}t \\ &= \left[\tfrac{t^{N+2}}{N+2} \right] = \tfrac{x^N+2}{N+2} \end{aligned}$$

8. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on déduit du principe des gendarmes, de la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^N+2}{N+2} = 0$ et de l'inégalité précédente que

$$\lim_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$$

A fortiori, la suite $\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ converge vers $\ln(1+x)$ lorsque N tend vers $+\infty$, d'après l'égalité de la question 6. A fortiori, comme il résulte du changement d'indice $k+1=n$ que

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{N+1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Nous remarquons que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge vers $\ln(1+x)$ parce que, sa suite des sommes partielles (décalée de 1) tend vers $\ln(1+x)$. De sorte que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Partie III. Egalité d'une intégrale et d'une somme de série

9. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, il résulte du résultat de l'égalité du 6 que

$$\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = J_N(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

En divisant par x, l'identité $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ donne alors

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} = \frac{J_N(x)}{x} \qquad (0 < x \leqslant 1).$$

Et, nous déduisons du résultat de la question 7 que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| &= \left|\frac{J_N(x)}{x}\right| = \frac{|J_N(x)|}{x} \\ &\leqslant \frac{x^{N+2}}{x(N+2)} = \frac{x^{N+1}}{N+2} \qquad (0 < x \leqslant 1) \end{aligned}$$

Ce résultat est également vrai pour $x = 0$ car $f(0) = 1$

10. En intégrant sur [0,1], il résulte de l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left(f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \right| &\leqslant \int_0^1 \left| f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{N+2}}{(N+2)^2}\right]_0^1 \\ &\leqslant \frac{1}{(N+2)^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous déduisons de la linéarité de l'intégrale que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^N (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

En particulier, posant $r_n = \displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right) \mathrm{d}x$, il résulte de ces deux estimations que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} + r_N \\ |r_n| &\leqslant \frac{1}{(N+2)^2} \qquad (N \geqslant 0)\end{aligned}$$

En particulier, la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2}$ converge vers la constante $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ lorsque N tend vers $+\infty$. En conclusion, on a

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

11. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, en sommant selon les nombres pairs et seolon les nombres impairs, il résulte de la commutativité et de l'associativité de l'addiction que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N+1 \\ n=2p+1}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N+1 \\ n=2p}} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{0\leqslant p\leqslant N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{1\leqslant p\leqslant N} \frac{1}{(2p)^2} \\ &= \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N+1 \\ n=2p+1}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N+1 \\ n=2p}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \\ &= \sum_{1\leqslant p\leqslant N} \frac{(-1)^{2p}}{(2p+1)^2} + \sum_{1\leqslant p\leqslant N} \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2} \\ &= \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}\end{aligned}$$

12. En faisant tendre N vers l'infini dans la question précédente, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{6} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

En particulier, il vient

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} & \left(1-\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{8} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} & = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} \times \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Or nous avons montré précédemment que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi}{12}$$

Exo III. PROBA (Ecricom). Partie I. Etude des longueurs de séries.

1. a. Pour $n \geqslant 1$, on a $(L_1 = n) = (\cap_{k=1}^{n} F_k \cap P_{n+1}) \cup (\cap_{k=1}^{n} P_k \cap F_{n+1})$. De l'incompatibilité des évenements et de l'indépendance des tirages, il vient

$$\begin{aligned}
P(L_1 = n) & = P(\cap_{k=1}^{n} F_k \cap P_{n+1}) + P(\cap_{k=1}^{n} P_k \cap F_{n+1}) \\
& = P(\prod_{k=1}^{n} P(F_k) \times P(P_{n+1}) + \prod_{k} = 1^n P(P_k) \times P(F_{n+1}) = pq^n + qp^n
\end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons deux séries géomètriques de raison q et p en calculant

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) & = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (pq^n + qp^n) = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n + q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \\
& = p\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n - q^0\right) + q\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n - p^0\right) \\
& = p\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) + q\left(\frac{1}{1-p} - p^0\right) \\
& = p\left(\frac{1}{p} - 1\right) + q\left(\frac{1}{q} - 1\right) \\
& = 1 - p + 1 - q = 2 - (p+q) = 1
\end{aligned}$$

b. L'espérance de L_1 est

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} nP(L_1 = n) & = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(pq^n + qp^n) = pq \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} + pq \sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} \\
& = pq\frac{1}{(1-q)^2} + pq\frac{1}{(1-p)^2} \\
& = pq(\frac{1}{p^2} + pq\frac{1}{q^2} = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

Comme ces séries sont absolument convergentes, on a $E(L_1) = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$.

c. En faisant apparaître deux dérivées de la série géomètrique, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
E\big(L_1(L_1-1)\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(L_1=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(pq^n+qp^n\right)\\
&= pq^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} + qp^2\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2}\\
&= pq^2\frac{2}{(1-q)^3} + qp^2\frac{1}{(1-p)^3}\\
&= pq^2\frac{1}{p^3} + qp^2\frac{1}{q^3} = \frac{2q^2}{p^2}+\frac{2p^2}{q^2}
\end{aligned}$$

A fortiori, il résulte de la formule de König-Huygens et de la formule de transfert que

$$\begin{aligned}
V(L_1) &= E(L_1^2)-E(L_1)^2 = E\big(L_1(L_1-1)\big)+E(L_1)-E(L_1)^2\\
&= \frac{2q^2}{p^2}+\frac{2p^2}{q^2}+\frac{q}{p}+\frac{p}{q}-\left(\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)^2\\
&= \frac{q^2}{p^2}+\frac{p^2}{q^2}+\frac{q}{p}+\frac{p}{q}-2\\
&= \frac{q}{p^2}+\frac{p}{q^2}-2
\end{aligned}$$

2. On note L_2 la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série.
   a. Pout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$(L_1=n)\cap(L_2=k) = \Big(\cap_{i=1}^{n}P_i\cap_{i=n+1}^{n+k}F_i\cap P_{n+k+1}\Big)\cup\Big(\cap_{i=1}^{n}F_i\cap_{i=n+1}^{n+k}P_i\cap F_{n+k+1}\Big)$$

   En particulier, il résulte de l'incompatibilité des deux événements de l'union et de l'indépendance des tirages que

$$\begin{aligned}
P\left((L_1=n)\cap(L_2=k)\right) &= P\left(\cap_{i=1}^{n}P_i\cap_{i=n+1}^{n+k}F_i\cap P_{n+k+1}\right)+P\left(\cap_{i=1}^{n}F_i\cap_{i=n+1}^{n+k}P_i\cap F_{n+k+1}\right)\\
&= P(P_{n+k+1})\prod_{i=1}^{n}P(P_i)\times\prod_{i=n+1}^{n+k}P(F_i)\\
&\quad +P(F_{n+k+1})\prod_{i=1}^{n}P(F_i)\times\prod_{i=n+1}^{n+k}P(P_i)\\
&= p^nq^kp+q^np^kq \qquad (n\geqslant 1, k\geqslant 1)
\end{aligned}$$

   b. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, Il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au ssystème complet dévénements $\{L_1=n\}_{n\geqslant 1}$ que

$$\begin{aligned}
P(L_2=k) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\big((L_1=n)\cap(L_2=k)\big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\big(p^n q^k p + q^n p^k q\big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p^n q^k p + \sum_{n=1}^{\infty} q^n p^k q\\
&= q^k p2 \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} + p^k q^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\\
&= q^k p2 \sum_{n'=0}^{\infty} p^{n'} + p^k q^2 \sum_{n'=0}^{\infty} q^{n'}\\
&= q^k p2 \times \frac{1}{1-p} + p^k q^2 \times \frac{1}{1-q}\\
&= \frac{q^k p^2}{q} + \frac{p^k q^2}{p} = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1} \qquad (k \geqslant 1)
\end{aligned}$$

Partie II. Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

1. - $N_1 = 1$ suit une loi certaine et $E(N_1) = 1$ car il n'y a qu'un seul jet, qui ne peut donner qu'une seule série.
   - $N_2(\Omega) = [\![1{,}2]\!]$. Et il résulte de l'incompatibilité des événement de la réunion et de l'indépendance des tirages que

     $$\begin{aligned}
     P(N_2=1) &= P((P_1\cap P_2)\cup(F_1\cap F_2)) = P(P_1\cap P_2)+P(F_1\cap F_2)\\
     &= P(P_1)\times P(P_2) + P(F_1)\times P(F_2) = \tfrac14+\tfrac14=\tfrac12
     \end{aligned}$$

     A fortiori, N_1 suit la loi uniforme sur $[\![1{,}2]\!]$ de sorte que $E(N_2) = \frac{1+2}{2} = \frac32$
   - $N_3(\Omega) = [\![1{,}2{,}3]\!]$ avec

     $$\begin{aligned}
     P(N_3=1) &= P((P_1\cap P_2\cap P_3)\cup(F_1\cap F_2\cap F_3)) = P(P_1\cap P_2\cap P_3)+P(F_1\cap F_2\cap F_3)\\
     &= P(P_1)\times P(P_2)\times P(P_3)+P(F_1)\times P(F_2)\times P(F_3) = \tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{2^3}=\tfrac14\\
     P(N_3=3) &= P((P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)) = P(P_1\cap F_2\cap P_3)+P(F_1\cap P_2\cap F_3)\\
     &= P(P_1)\times P(F_2)\times P(P_3)+P(F_1)\times P(P_2)\times P(F_3) = \tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{2^3}=\tfrac14\\
     P(N_3=2) &= 1-P(N_3=1)-P(N_3=3) = \tfrac12
     \end{aligned}$$

     En particulier, on a $E(N_3) = 1\times\frac14 + 2\times\frac12 + 3\times\frac14 = \frac84 = 2$
2. Pour $n \geqslant 1$, on a $N_n(\Omega) = [\![1{,}n]\!]$ car n jet de pieces produisent au moins une série (si on tire tout le temps le même coté) et au plus n séries (si le coté obtenu change à chaque tirage). On peut obtenir exactement k séries en faisant alterner les cotés obtenus sur les k premiers tirages et en ne les alternant plus après le $k^{\text{ième}}$ jet.

$$\begin{aligned}
P(N_n=1) &= P((P_1\cap P_2\cap P_3\cap\ldots\cap P_n)\cup(F_1\cap F_2\cap F_3\cap\ldots\cap F_n))\\
&= P(P_1\cap P_2\cap P_3\cap\ldots\cap P_n)+P(F_1\cap F_2\cap F_3\cap\ldots\cap F_n)\\
&= P(P_1)\times\ldots P(P_n)+P(F_1)\times\ldots\times P(F_n) = \tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{2^n}=\tfrac{2}{2^n}\\
P(N_n=n) &= P((P_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\ldots))\\
&= P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots)+P(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\ldots)\\
&= P(P_1)\times P(F_2)\times P(P_3)\times\ldots+P(F_1)\times P(P_2)\times P(F_3)\times\ldots = \tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{2^n}=\tfrac{2}{2^n}
\end{aligned}$$

3. a. floor(2*rand()) simule une loi uniforme sur $[\![0,1]\!]$: cela renvoie 0 ou 1 avec équiprobabilité.

   b.

```
n=input('entrer un entier n non nul') ; x=zeros(1,n); N=zeros(1,n)
x(1)=floor(2*rand()) ; N(1)=1
for i=2:n
x(i)=floor(2*rand())
if x(i) == x(i-1) then, N(i)=N(i-1), else N(i)= N(i-1)+1 ,end
end
```

   c.

```
function [r] = X(p)
  r=1
  while rand()>1/p
     r = r + 1
  end
endfunction
```

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$, on note $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k$, la fonction génératrice de N_n.

   a. Comme $N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$, c'est la probabilité de tout l'univers des possibles

$$G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)1^k = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) = P(\Omega) = 1$$

   b. C'est l'esperance de N_n. On a

$$G_n'(1) = \left(\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k\right)'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\left(s^k\right)'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)k = E(N_n)$$

   c. Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on peut soit passer de $k-1$ série à k série au $n^{\text{ième}}$ tirage via un changement au $n^{\text{ième}}$ tirage soit passer de k séries à k séries (auquel cas, il ne faut pas de changement au $n^{\text{ième}}$ tirage (quoiqu'il arrive, le $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage est complétement déterminé par la donn"e du $n^{\text{ième}}$ tirage)
   En particulier, on a

$$(N_n = k) \cap P_n = \big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n\big) \cup \big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n\big)$$

   De sorte que

$$\begin{aligned} P((N_n = k) \cap P_n) &= P\left(\big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n\big) \cup \big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n\big)\right) \\ &= P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n\right) + P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n\right) \\ &= P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \times P_{(N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1}}(P_n) \\ &\quad + P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) \times P_{(N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}}(P_n) \\ &= P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \times \tfrac{1}{2} + P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) \times \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

d. Il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{P_n,F_n\}$ que

$$\begin{aligned}
P(N_n=k) \quad &= P((N_n=k)\cap P_n)+P((N_n=k)\cap F_n)\\
&= P\left((N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1})\right)\times\frac{1}{2}+P\left((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}\right)\times\frac{1}{2}\\
&\quad +P\big((N_{n-1}=k)\cap F_{n-1}\big)\times\frac{1}{2}+P\big((N_{n-1}=k-1)\cap P_{n-1}\big)\times\frac{1}{2}\\
&= P(N_{n-1}=k-1)\times\frac{1}{2}+P(N_{n-1}=k)\times\frac{1}{2}\qquad (n\geqslant 2)
\end{aligned}$$

e. Soit $n\geqslant 2$. En reportant dans la définition de G_b, il suit

$$\begin{aligned}
G_n(s) \quad &= \sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)s^k\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(P(N_{n-1}=k-1)\times\frac{1}{2}+P(N_{n-1}=k)\times\frac{1}{2}\right)s^k\\
&= \frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n}\underbrace{P(N_{n-1}=k-1)}_{=0\text{ si }k=1}s^k+\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n}\underbrace{P(N_{n-1}=k)}_{=0\text{ si }k=n}s^k\\
&= \frac{1}{2}\times\sum_{k=2}^{n}P(N_{n-1}=k-1)s^k+\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n-1}P(N_{n-1}=k)s^k\\
&= \frac{1}{2}\times\sum_{k'=1}^{n-1}P(N_{n-1}=k')s^{k'+1}+\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n-1}P(N_{n-1}=k)s^k\\
&= \frac{1}{2}\times sG_{n-1}(s)+\frac{1}{2}\times G_{n-1}(s)\\
&= \frac{s+1}{2}\times sG_{n-1}(s)
\end{aligned}$$

f. Nous remarquons que

$$G_1(s)=\sum_{k=1}^{1}P(N_1=k)s^k=P(N_1=1)s^1=s$$

A fortiori, comme $G_n(s)$ est une suite géométrique de raison $(s+1)/2$, nous obtenons que

$$G_n(s)=\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}G_1(s)=\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}s\qquad (n\geqslant 1)$$

g. Le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers est $E(N_n)$, c'est à dire

$$\begin{aligned}
E(N_n)= \quad & G_n'(1)=\left(\left(\tfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}s\right)'(1)\\
&=\left(\tfrac{n-1}{2}\left(\tfrac{1+s}{2}\right)^{n-2}s+\left(\tfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}\right)(1)\\
&=\tfrac{n-1}{2}+1=\tfrac{n+1}{2}
\end{aligned}$$