EM LYON 2012 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME 1

Partie I : Interpolation polynomiale

---

1. • φ est une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\Big((\lambda P+Q)(a_1),(\lambda P+Q)(a_2),\dots,(\lambda P+Q)(a_n)\Big)$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\Big(\lambda P(a_1)+Q(a_1),\lambda P(a_2)+Q(a_2),\dots,\lambda P(a_n)+Q(a_n)\Big)$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\left(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\right)+\left(Q(a_1),Q(a_2),\dots,Q(a_n)\right)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\times\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$. φ est linéaire.

• Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. $\big(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\big)=0_{\mathbb{R}^n}$.

Ainsi $P(a_1)=P(a_2)=\cdots=P(a_n)=0$. Donc a_1, a_2, ..., a_n sont n zéros distincts du polynôme P qui est de degré au plus $n-1$. Alors P est le polynôme nul.

Cela suffit pour dire que $\operatorname{Ker}\varphi=\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$ donc que φ est injective.

φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ ont **même dimension finie** n, φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ sur } \mathbb{R}^n}.$$

2. Soit $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\Big(\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(a_i)=b_i\Big)\iff\big(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\big)=(b_1,b_2,\dots,b_n)\iff\varphi(P)=(b_1,b_2,\dots,b_n)$.

$\Big(\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(a_i)=b_i\Big)\iff P=\varphi^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_n)$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{il existe un élément } P \text{ de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et un seul tel que} : \forall i\in[\![1,n]\!], P(a_i)=b_i}.$$

3. Notons que 0, 1, 2 et 3 sont quatre réels deux à deux distincts ! Alors il existe un unique élément P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_0(0)=1$, $P_0(1)=3$, $P_0(2)=11$ et $P_0(3)=31$.

Il existe quatre réels a, b, c, d tels que $P_0 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Notons qu'il est nullement obligatoire de raisonner par équivalences pour trouver a, b, c et d.

Les hypothèses donnent : $\begin{cases} 1 = P_0(0) = d \\ 3 = P_0(1) = a + b + c + d \\ 11 = P_0(2) = 8a + 4b + 2c + d \\ 31 = P_0(3) = 27a + 9b + 3c + d \end{cases}$.

Alors $\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 10 \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} d = 1 \\ c = 2 - a - b \\ 3a + b = 3 \\ 8a + 2b = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} d = 1 \\ c = 2 - a - b \\ 3a + b = 3 \\ 4a + b = 4 \end{cases}$.

En retranchant les deux dernières lignes il vient rapidement $a = 1$. Ce qui donne $b = 0$ et $c = 1$.

Finalement $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 1$. Donc :

$$\boxed{\text{L'unique élément } P_0 \text{ de } \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P_0(0) = 1,\ P_0(1) = 3,\ P_0(2) = 11 \text{ et } P_0(3) = 31 \text{ est } X^3 + X + 1.}$$

Partie II : Polynômes spéciaux

---

1. P_0 est un élément de $\mathbb{R}[X]$. De plus : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Big(P_0(x) = x^3 + x + 1 > 0 \text{ et } P_0'(x) = 3\,x^2 + 1 > 0\Big)$.
Alors :

$$\boxed{X^3 + X + 1 \text{ est un élément de } E.}$$

2. Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux éléments de E.

Notons que $\alpha\, P$, $P + Q$ et PQ sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$ car P et Q sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$ et α est un réel.

Soit x un élément de $]0, +\infty[$. $P(x) > 0$, $Q(x) > 0$, $P'(x) > 0$, $Q'(x) > 0$ et $\alpha > 0$.

Alors $(\alpha\, P)(x) = \alpha\, P(x) > 0$, $(\alpha\, P)'(x) = \alpha\, P'(x) > 0$, $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) > 0$, $(P + Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0$, $(PQ)(x) = P(x)\, Q(x) > 0$ et $(PQ)'(x) = P'(x)\, Q(x) + P(x)\, Q'(x) > 0$. Ceci étant vrai pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on peut alors affirmer que $\alpha\, P$, $P + Q$, PQ sont des éléments de E.

$$\boxed{E \text{ est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication.}}$$

P_0 appartient à E. Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ P_0(x)>0$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ (-P_0)(x)<0$. Ainsi $-P_0$ n'appartient pas à E. Ce qui permet de dire que :

$$\boxed{E \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$$

3. Soit P un élément de E. P_1 est la primitive de P sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0 donc P_1 est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

On a déjà : $\forall x \in]0,+\infty[,\ P_1'(x)=P(x)>0$.

Notons alors que P_1 est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Ceci suffit pour dire que P_1 est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ P_1(x)>P_1(0)=0$.

Ceci achève de montrer que P_1 est un élément de E.

Si P est un élément de E, l'application P_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ P_1(x)=\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ est également un élément de E.

4. Soit P un élément de E. P est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0,+\infty[$. Ceci suffit pour dire que P est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Ce qui suffit très largement pour dire que $\forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)\geqslant P(0)$.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est dans } E,\ \forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)\geqslant P(0).}$$

5. Soit P un élément de E.

- $\widetilde{P}$ est application continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ dans $[P(0),+\infty[$ car P est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

- P n'est pas un polynôme constant car P' n'est pas le polynôme nul puisque $\forall x\in]0,+\infty[,\ P'(x)>0$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P(x)=-\infty$. Comme P est strictement positif sur $]0,+\infty[$, nécessairement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\widetilde{P}(x)=+\infty$.

Les deux points précédents montrent que $\widetilde{P}$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un élément de } E,\ \widetilde{P} \text{ est une bijection de } [0,+\infty[\text{ sur } [P(0),+\infty[.}$$

6. Soit P est un élément de E de degré au moins deux.

$\forall x\in]0,+\infty[, \widetilde{P}'(x)=P'(x)>0$. Ceci permet de dire que $\widetilde{P}^{-1}$ est au moins dérivable sur $]P(0),+\infty[$.

De plus $\forall x \in]P(0),+\infty[,\ (\widetilde{P}^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\widetilde{P}'\big(\widetilde{P}^{-1}(x)\big)}$.

Or $\widetilde{P}$ est une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{P}(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{P}^{-1}(x)=+\infty$.

P' est un polynôme de degré au moins 1 strictement positif sur $]0,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}P'(x)=+\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{P}'(x)=+\infty$ et par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{P}'\big(\widetilde{P}^{-1}(x)\big)=+\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\widetilde{P}^{-1})'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\widetilde{P}'\big(\widetilde{P}^{-1}(x)\big)}=0$.

Supposons que $\widetilde{P}^{-1}$ est une application polynômiale. $\widetilde{P}^{-1}$ est alors dérivable sur $[P(0),+\infty[$ et sa dérivée est également une application polynômiale. Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(\widetilde{P}^{-1})'(x)=0$ nécessairement $(\widetilde{P}^{-1})'$ est constante et même nulle sur $[P(0),+\infty[$.

Donc $\widetilde{P}^{-1}$ est constante sur $[P(0),+\infty[$ ce qui contredit le caractère bijectif de $\widetilde{P}^{-1}$.

Donc $\widetilde{P}^{-1}$ n'est pas une application polynomiale.

Si P est un élément de E de degré au moins 2, l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ n'est pas une application polynomiale.

Partie III : Matrices symétriques positives

---

1. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc à coefficients réels !). Le cours montre alors que :

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a. Supposons que A soit dans $\mathcal{S}_n^+$. Soit λ une valeur propre de A. Il existe un élément U non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU=\lambda U$.

Alors ${}^tUAU={}^tU(\lambda U)=\lambda\,{}^tUU=\lambda\,\|U\|^2$. ${}^tUAU$ est un réel positif ou nul car A appartient à $\mathcal{S}_n^+$ et $\|U\|^2$ est un réel strictement positif car U n'est pas nulle. Dans ces conditions λ est un réel positif ou nul. $\lambda\in[0,+\infty[$.

Donc toutes les valeurs propres de A sont dans $[0,+\infty[$.

Si A appartient à $\mathcal{S}_n^+$ alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0,+\infty[$.

b. Réciproquement supposons que toutes les valeurs propres de A sont dans $[0,+\infty[$.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ notons α_i la valeur propre de A associée au vecteur propre U_i.

Par hypothèse $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \geqslant 0$.

Soit U un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ dans la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

$U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i\, U_i$ et $AU = \sum_{i=1}^{n} t_i\, AU_i = \sum_{i=1}^{n} t_i\, \alpha_i\, U_i$.

Comme $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base orthonormée : ${}^tUAU = < U, AU > = \sum_{i=1}^{n} \big(t_i\, t_i\, \alpha_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(t_i^2\, \alpha_i\big)$.

Or $\forall i \in [\![1, n]\!],\ t_i^2 \geqslant 0$ et $\alpha_i \geqslant 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ t_i^2\, \alpha_i \geqslant 0$. Ainsi ${}^tUAU = \sum_{i=1}^{n} \big(t_i^2\, \alpha_i\big) \geqslant 0$.

A est alors une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUAU \geqslant 0$ donc A appartient à $\mathcal{S}_n^+$.

$$\boxed{\text{Si toutes les valeurs propres de } A \text{ sont dans } [0, +\infty[\text{ alors } A \text{ est dans } \mathcal{S}_n^+.}$$

Partie IV : Matrices symétriques positives solution d'une équation polynomiale spéciale

---

1. a. P est de degré $n-1$ donc il existe $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, X^k$ et $c_{n-1} \neq 0$.

$SA = SP(S) = S\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^{k+1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^k\right) S = P(S)S = AS$. Donc $SA = AS$.

$A = QDQ^{-1}$ donc $D = Q^{-1}AQ$. Rappelons que $\Delta = Q^{-1}SQ$.

Alors $\Delta D = Q^{-1}SQ\, Q^{-1}AQ = Q^{-1}SAQ = Q^{-1}ASQ = Q^{-1}AQ\, Q^{-1}SQ = D\Delta$.

$$\boxed{SA = AS \text{ et } \Delta D = D\Delta.}$$

b. Posons $\Delta = (\delta_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$. Notons que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ d_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Alors $\Delta D = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\, d_{k,j}\right)$ et $D\Delta = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, \delta_{k,j}\right)$.

En tenant compte de ce qui précède on a encore $\Delta D = (\delta_{i,j}\, \lambda_j)$ et $D\Delta = (\lambda_i\, \delta_{i,j})$.

Comme $\Delta D = D\Delta$: $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \delta_{i,j}\, \lambda_j = \lambda_i\, \delta_{i,j}$.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. $\delta_{i,j}\, \lambda_j = \lambda_i\, \delta_{i,j}$ donc $(\lambda_j - \lambda_i)\, \delta_{i,j} = 0$.

i et j étant distincts il en est de même pour λ_i et λ_j. Donc $\lambda_j - \lambda_i$ n'est pas nul. Alors $\delta_{i,j}$ est nul.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \delta_{i,j} = 0$ donc Δ est diagonale.

S appartient à $\mathcal{S}_n^+$ donc ses valeurs propres sont des éléments de $[0,+\infty[$. Or S et Δ sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres. Par conséquent les valeurs propres de Δ sont des éléments de $[0,+\infty[$.

Comme Δ est diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Alors les éléments diagonaux de Δ sont des réels positifs ou nuls.

$$\boxed{\Delta \text{ est diagonale et ses éléments diagonaux sont tous positifs ou nuls.}}$$

Avant de passer à la question suivantes poussons l'avantage.

$P(\Delta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, \Delta^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, (Q^{-1}SQ)^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, Q^{-1}S^kQ = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^k\right) Q.$

$P(\Delta) = Q^{-1}P(S)Q = Q^{-1}AQ = D$. Alors :

$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D = P(\Delta) = P\left(\mathrm{Diag}\left(\delta_{1,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{n,n}\right)\right) = \mathrm{Diag}\ (P(\delta_{1,1}), P(\delta_{2,2}), \ldots, P(\delta_{n,n}))$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = P(\delta_{i,i})$. Rappelons que P est dans E et que $\delta_{1,1}$, $\delta_{2,2}$,..., $\delta_{n,n}$ sont des réels positifs.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = P(\delta_{i,i}) = \widetilde{P}(\delta_{i,i})$. Ce qui donne $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \delta_{i,i} = \widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)$.

Alors $\Delta = \mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$.

Or $S = Q\Delta Q^{-1}$ et $\boxed{\text{donc } S = Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}.}$

2. Ici le concepteur ne nous a pas fait de cadeau car il nous oblige à montrer que le problème admet une solution et une seule (normal et simple) et qu'en plus la solution s'écrit $\mathbf{Q\Delta Q^{-1}}$ où $\mathbf{\Delta}$ est diagonale (pas de problème) et où Q est la matrice qu'il a fixé au départ, non ? Le dernier point coince un peu...

Posons $\Delta_0 = \mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$ et $S_0 = Q\Delta_0 Q^{-1}$.

La question précédente montre que si S est solution : $S = S_0$. Cela montre que l'équation proposée admet au plus une solution et que s'il existe une solution cela ne peut être que S_0.

On s'apprête donc gentiment à montrer que S_0 est solution. Pas de difficulté pour montrer que $P(S_0) = A$ et que les valeurs propres de S_0 sont positives ou nulles. C'est moins facile de montrer que S_0 est symétrique... sauf si Q est orthogonale (ce qui n'est pas dans le texte). Rusons...

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ considérons un vecteur propre unitaire V_i associé à la valeur propre λ_i.

Les sous-espaces propres de A étant deux à deux orthogonaux, $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mieux c'est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car V_1, V_2, ..., V_n sont unitaires.

$(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est alors une famille orthonormée donc une famille libre de cardinal n de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n, c'est donc une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mieux $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Soit alors Q_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(V_1, V_2, \dots, V_n)$. Q_1 est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

De plus $Q_1^{-1} A Q_1 = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. $A = Q_1 \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q_1^{-1}$.

Posons alors $S_1 = Q_1 \Delta_0 Q_1^{-1} = Q_1 \Delta_0 {}^t Q_1$ et montrons que S_1 est solution.

- ${}^t S_1 = {}^t\big(Q_1 \Delta_0 {}^t Q_1\big) = {}^t({}^t Q_1) {}^t\Delta_0 {}^t Q_1 = Q_1 \Delta_0 {}^t Q_1 = S_1$ car Δ_0 est diagonale. Donc S_1 est symétrique.

S_1 et Δ_0 sont semblables donc ont mêmes valeurs propres. Or $\Delta_0 = \mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$ donc les valeurs propres de Δ_0 sont $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1)$, $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_2)$, ..., $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$. Comme $\widetilde{P}^{-1}$ est une application de $[P(0), +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, les valeurs propres de Δ_0 et donc de S_1 sont des éléments de $[0, +\infty[$.

Ceci achève de montrer que S_1 est dans $\mathcal{S}_n^+$.

- Montrons que $P(S_1) = A$.

$P(S_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S_1^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, (Q_1 \Delta_0 Q_1^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, Q_1 \Delta_0^k Q_1^{-1} = Q_1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, \Delta_0^k\right) Q_1^{-1}$.

$P(S_1) = Q_1 P(\Delta_0) Q_1^{-1}$. Calculons $P(\Delta_0)$.

$P(\Delta_0) = P\left(\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)\right)$.

$P(\Delta_0) = \mathrm{Diag}\left(P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1)\right), P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_2)\right), \dots, P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)\right)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!], \widetilde{P}^{-1}(\lambda_i) \in [0, +\infty[$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)\right) = \widetilde{P}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)\right) = \lambda_i$.

Ainsi $P(\Delta_0) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $P(S_1) = Q_1 P(\Delta_0) Q_1^{-1} = Q_1 \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q_1^{-1} = A$.

S_1 appartient à $\mathcal{S}_n^+$ et $P(S_1) = A$ donc S_1 est solution. Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } S \in \mathcal{S}_n^+ \text{ et } P(S) = A \text{ admet une solution et une seule.}}$$

Nous avons vu que S_1 est solution et que si S est solution :

$S = Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}$.

Donc $S_1 = Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}$.

Ainsi $Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}$ est la solution. Cela permet alors de dire que :

Si Q est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)Q^{-1}$, la solution de l'équation $S \in \mathcal{S}_n^+$ et $P(S) = A$ est $Q\Delta_0 Q^{-1}$ où Δ_0 est la matrice diagonale $\text{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$.

3. a. $P = X^3 + X + 1$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

De plus $\forall x \in]0, +\infty[,\ P(x) = x^3 + x + 1 > 0$ et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Alors :

$$\boxed{P = X^3 + X + 1 \text{ est un élément de } E.}$$

b. Soit λ un réel et soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$AU = \lambda U \iff \begin{cases} 2x - y = \lambda\, x \\ -x + 2y = \lambda\, y \\ 21z + 10t = \lambda\, z \\ 10z + 21t = \lambda\, t \end{cases} \iff \begin{cases} y = (2-\lambda)x \\ -x + (2-\lambda)y = 0 \\ t = \dfrac{1}{10}\,(\lambda - 21)z \\ 10z + (21-\lambda)t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (2-\lambda)x \\ \big((2-\lambda)^2 - 1\big)x = 0 \\ t = \dfrac{1}{10}\,(\lambda - 21)z \\ \dfrac{1}{10}\big(10^2 - (\lambda-21)^2\big)z = 0 \end{cases}.$$

$$AU = \lambda U \iff \begin{cases} (1-\lambda)(3-\lambda)x = 0 \\ y = (2-\lambda)x \\ (\lambda - 11)(31-\lambda)z = 0 \\ t = \dfrac{1}{10}\,(\lambda - 21)z \end{cases}.$$

Si λ n'appartient pas à $\{1, 3, 11, 31\}$, $AU = \lambda U \iff x = y = z = t = 0 \iff U = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda = 1$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 3$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 11$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = -z \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 31$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = z \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont 1, 3, 11 et 31.}}$$

Remarque Nous aurions pu remarquer que A *est la matrice diagonale par blocs* $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} & A_2 \end{pmatrix}$ *avec* $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $A_2 = \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$ *et utiliser que* $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} A_1 \cup \operatorname{Sp} A_2$...

A est clairement symétrique et ses valeurs propres sont des éléments de $[0, +\infty[$ donc :

$$\boxed{A \text{ appartient à } \mathcal{S}_4^+.}$$

c. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$.

Posons $V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posons encore $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 11$ et $\lambda_4 = 31$.

Pour tout i dans $[\![1, 4]\!]$, (V_i) est une base orthonormée de SEP (A, λ_i). De plus $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{4} \text{SEP } (A, \lambda_i)$ et, SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2), SEP (A, λ_3), SEP (A, λ_4) sont deux à deux orthogonaux. Alors (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, 3, 11 ; 31.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (V_1, V_2, V_3, V_4). Q est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée et $Q^{-1}AQ$ est la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(1, 3, 11, 31)$.

Notons que $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A = QDQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(1, 3, 11, 31)$.

$Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $A = QDQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,(1, 3, 11, 31)$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

d. Dans ces conditions et d'après ce qui précède, l'équation $S \in \mathcal{S}_1^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule qui est $S_0 = Q\,\mathrm{Diag}\,\big(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_3), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_4)\big)Q^{-1}$.

Notons que $S_0 = Q\,\mathrm{Diag}\,\big(\widetilde{P}^{-1}(1), \widetilde{P}^{-1}(3), \widetilde{P}^{-1}(11), \widetilde{P}^{-1}(31)\big)Q^{-1}$.

Or $P = X^3 + X + 1 = P_0$. Donc **I Q3.** donne $P(0) = 1 = \lambda_1$, $P(1) = 3 = \lambda_2$, $P(2) = 11 = \lambda_3$ et $P(3) = 31 = \lambda_4$.

Comme P est dans E et 0, 1, 2, 3 sont des éléments de $[0, +\infty[$: $\widetilde{P}^{-1}(1) = 0$, $\widetilde{P}^{-1}(3) = 1$, $\widetilde{P}^{-1}(11) = 2$, $\widetilde{P}^{-1}(31) = 3$.

Alors $S_0 = Q\,\mathrm{Diag}\,(0, 1, 2, 3)\,Q^{-1} = Q\,\mathrm{Diag}\,(0, 1, 2, 3)\,{}^tQ$.

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{Diag}\,(0, 1, 2, 3)\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'équation $S \in \mathcal{S}_4^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule : $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

1. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$ $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.}$$

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $W_n - W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^n t - \cos^{n+1} t\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((1-\cos t)\,\cos^n t\big)\,\mathrm{d}t.$

$\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $(1-\cos t)\,\cos^n t \geqslant 0$ et $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $W_n - W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((1-\cos t)\,\cos^n t\big)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$; $W_n \geqslant W_{n+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \geqslant W_{n+1}$.

$$\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n t \geqslant 0$ et $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Supposons que W_n soit nulle. Alors $t \to \cos^n t$ est continue et positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'intégrale nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $0 \neq \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Dans ces conditions $t \to \cos^n t$ est nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En fait il n'en est rien car $\cos^n 0 = 1$!

Donc W_n n'est pas nulle et $W_n \geqslant 0$. Ainsi $W_n > 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_n > 0.}$$

3. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Notons que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\cos^{n+1} t\,\mathrm{d}t.$

Posons alors $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \cos^{n+1} t$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $u'(t) = \cos t$ et $v'(t) = -(n+1)\,\sin t\,\cos^n t$.

Ceci légitime l'intégration par parties qui suit.

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\cos^{n+1} t\,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\,\cos^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\big(-(n+1)\,\sin t\,\cos^n t\big)\,\mathrm{d}t.$$

$$W_{n+2} = \sin\frac{\pi}{2}\,\cos^{n+1}\frac{\pi}{2} - \sin 0\,\cos^{n+1} 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos^n t\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\,\cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, \mathrm{d}t = (n+1) \, W_n - (n+1) \, W_{n+2}$.

Donc $(n+2) \, W_{n+2} = (n+1) \, W_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2) \, W_{n+2} = (n+1) \, W_n.}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2) \, W_{n+2} = (n+1) \, W_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2) \, W_{n+2} \, W_{n+1} = (n+1) \, W_n \, W_{n+1} = (n+1) \, W_{n+1} \, W_n$.

Ainsi la suite $\big((n+1) \, W_n \, W_{n+1}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1) \, W_{n+1} \, W_n = (0+1) \, W_1 \, W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1) \, W_{n+1} \, W_n = W_1 \, W_0 = \frac{\pi}{2}.}$$

4. a. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \, W_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2} \, W_n.}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2} \, W_n$ et $W_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \geqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$. Il vient alors par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ ainsi :

$$\boxed{W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_n.}$$

$\dfrac{\pi}{2} = (n+1) \, W_{n+1} \, W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} (n+1) \, (W_n)^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} n \, (W_n)^2$. Alors $n \, W_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ donc $W_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2 \, n}$.

Ainsi $W_n = |W_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2 \, n}}$.

$$\boxed{W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \, n}}.}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} \, (n!)^2} \, \dfrac{\pi}{2}$.

- $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} \, (0!)^2} \, \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{1 \times 1} \, \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = W_0 = W_{2 \times 0}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \, W_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \, \dfrac{(2n)!}{2^{2n} \, (n!)^2} \, \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2n+2}{2n+2} \, \dfrac{2n+1}{2n+2} \, \dfrac{(2n)!}{2^{2n} \, (n!)^2} \, \dfrac{\pi}{2}$.

$W_{2(n+1)} = \dfrac{(2n+2) \, (2n+1) \, (2n)!}{(2(n+1)) \, (2(n+1)) \, 2^{2n} \, (n!)^2} \, \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2} \, ((n+1) \, n!)^2} \, \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)} \, ((n+1)!)^2} \, \dfrac{\pi}{2}$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.}$$

6. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ a_n = -1-\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = n\left[-\dfrac{1}{n}-\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right].$

Rappelons que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$. Donc $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$.

$1-\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Par produit :

$\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{1}{3n^3}+\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{4n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right).$

$\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{12n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right).$

$-\dfrac{1}{n}-\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right).$

Or $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ a_n = n\left[-\dfrac{1}{n}-\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right].$

Alors $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et ainsi $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}.$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{12n^2}$ est convergente et à termes positifs, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général a_n converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } a_n \text{ converge.}}$$

7. Notons que pour tout élément de $\mathbb{N}^*$, A_n est strictement positif.

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} = \dfrac{n^n\,e^{-n}\,\sqrt{n}}{n!}\,\dfrac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}\,e^{-(n-1)}\sqrt{n-1}}.$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n!}\,\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\,\frac{e^{-n}}{e^{-(n-1)}}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{n}\,n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} e^{-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} = \ln\frac{A_n}{A_{n-1}} = \ln\left(e^{-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = -1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} = -1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = a_n.$$

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln A_n - \ln A_{n-1} = a_n.}$$

8. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln A_n = \ln A_n - \ln A_1 + \ln A_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln A_k - \ln A_{k-1}) - 1$ (par "télescopage" et car $\ln A_1 = \ln e^{-1} = -1$).

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln A_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k - 1$. Or la série de terme général a_n converge donc la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$ converge. Alors la suite $(\ln A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons ℓ' sa limite ($\ell' = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_k - 1$).

De la continuité de la fonction exponentielle en ℓ' il résulte que la suite $(e^{\ln A_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\ell'}$.

Alors la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\ell'}$ qui est un réel strictement positif.

$$\boxed{\text{La suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et sa limite } \ell \text{ est strictement positive.}}$$

9. a. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ver ℓ qui est un réel non nul donc $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Alors $\dfrac{1}{n!}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ donc $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}$.

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}.}$$

b. $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ d'après **4. b.** Donc $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}$ donc $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}\, \sqrt{2n}$.

$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}$ donc $2^{2n}\,(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n}\,\dfrac{1}{\ell^2} n^{2n} e^{-2n}\, n = \dfrac{1}{\ell^2}(2n)^{2n}\, e^{-2n}\, n$.

Alors $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{\ell}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}\, \sqrt{2n}}{\frac{1}{\ell^2}(2n)^{2n}\, e^{-2n}\, n}$. En simplifiant il vient : $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell\,\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.

Donc $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell\,\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\,\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}$.

Or $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. Ainsi $\dfrac{\pi\ell}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

Donc la suite de terme général $\dfrac{\frac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$ converge vers 1.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\frac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}} = \dfrac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}\,\dfrac{\sqrt{4n}}{\sqrt{\pi}} = \ell\sqrt{2\pi}$.

Donc la suite de terme général $\dfrac{\frac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$ est constante égale à $\ell\sqrt{2\pi}$ et converge vers 1. Alors $\ell\sqrt{2\pi} = 1$.

Donc $\dfrac{1}{\ell} = \sqrt{2\pi}$. Or $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}$. Ainsi $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}$ ou $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\, e^{-n}\, \sqrt{2\pi\, n}$.

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\, e^{-n}\, \sqrt{2\pi\, n}.}$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

1. • $x \to 0$ et $x \to \dfrac{x}{a^2}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ sont positives ou nulles sur $\mathbb{R}$ donc f_a est positive ou nulle sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ donc f_a est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

• $x \to 0$ et $x \to \dfrac{x}{a^2}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f_a est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Alors f_a est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Remarque Observons que $\forall x \in [0, +\infty[,\, f_a(x) = \dfrac{x}{a^2}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ *car* $f_a(0) = 0$. *Alors* f_a *est continue sur* $]-\infty, 0]$ *et sur* $[0, +\infty[$. *Ceci suffit pour dire que* f_a *est continue sur* $\mathbb{R}$.

• f_a est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_a(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

La remarque précédente a montré que $\forall x \in [0, +\infty[,\, f_a(x) = \dfrac{x}{a^2}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ et que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ \displaystyle\int_0^x f_a(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{a^2}\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, \mathrm{d}t = \Big[-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\Big]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1.$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f_a(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{f_a \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. Notons F_a la fonction de répartition de X. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_a(t)\, \mathrm{d}t$.

Comme f_a est nulle sur $]-\infty, 0]$, $\forall x \in]-\infty, 0], F_a(x) = 0$.

Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_a(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x f_a(t)\, \mathrm{d}t$.

Or nous avons vu plus haut que $\displaystyle\int_0^x f_a(t)\, \mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ donc $F_a(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

$$\boxed{\text{La fonction de répartition } F_a \text{ de } X \text{ est définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ F_a(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

3. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, a}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. g_a est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres 0 et a^2.

E(Y) existe et vaut 0 et $V(Y)$ existe et vaut a^2. Alors $E(Y^2)$ existe et vaut a^2.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut a^2.

Comme $t \to t^2\, g_a(t)$ est paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, g_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{a^2}{2}\cdot$

Observons alors que $\forall t \in [0,+\infty[,\ t\, f_a(t) = \dfrac{t^2}{a^2}\, e^{-\frac{t^2}{2a}} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{a}\, t^2\, g_a(t)$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f_a(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{a}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, g_a(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{a}\,\dfrac{a^2}{2}$ soit encore $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, a$.

Notons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\, f_a(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_a(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, a$. Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, a.}$$

4. D'abord $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

$t \to t^2\, f_a(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. $\forall t \in [0,+\infty[,\ t^2\, f_a(t) = t^2\, \dfrac{t}{a^2}\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 2\,t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{a^2}\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. Ceci légitime l'intégration par parties suivante.

Soit x dans $\mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^x t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t^2\, \frac{t}{a^2}\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)\mathrm{d}t = \left[t^2\big(-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\big)\right]_0^x - \int_0^x 2\,t\left(-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)\mathrm{d}t.$

$$\int_0^x t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2\int_0^x t\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t = -x^2\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2a^2 \int_0^x \frac{t}{a^2}\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^x t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2a^2 \int_0^x f_a(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 0$ par croissance comparée et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2a^2\int_0^x f_a(t)\,\mathrm{d}t\right) = 2a^2\int_0^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t = 2a^2$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t = 2a^2$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2a^2$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2a^2$.

Ainsi X possède un moment d'ordre 2, qui vaut $2a^2$, donc une variance.

$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 2a^2 - \big(E(X)\big)^2 = 2a^2 - \dfrac{\pi}{2}\, a^2 = \dfrac{4-\pi}{2}\, a^2.$

$$\boxed{X \text{ possède une variance qui vaut } \dfrac{4-\pi}{2}\, a^2.}$$

5. a. Notons F_Z la fonction de répartition de Z.

V prend ses valeurs dans $]0,1]$ donc $-2\ln V$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$, $Z = a\sqrt{-2\ln V}$ également.

Alors $\forall x \in]-\infty,0[,\ F_Z(x) = 0 = F_a(x)$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$.

$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(a\sqrt{-2\,\ln V} \leqslant x) = P\left(-2\,\ln V \leqslant \left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right) = P\left(\ln V \geqslant -\dfrac{x^2}{2a^2}\right) = P\left(V \geqslant e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right).$

$F_Z(x) = 1 - P\left(V < e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - P\left(V \leqslant e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)$ car V est une variable aléatoire à densité.

V suit la loi uniforme sur $]0,1]$ et $e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ appartient à $]0,1]$ donc :

$F_Z(x) = 1 - P\left(V \leqslant e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = F_a(x).$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = F_a(x)$. Z a même loi que X.

$$\boxed{\text{Si } V \text{ suit la loi uniforme sur }]0,1] \text{ alors } a\sqrt{-2\,\ln V} \text{ suit la même loi que } X.}$$

b. Notons que la fonction random fournit un réel au hasard appartenant à $[0,1[$ donc 1-random fournit un réel au hasard appartenant à $]0,1]$...

```
program pipo;

var a:real;

begin

randomize;

write('Donner a (a strictement positif). a=');readln(a);

writeln('X prend la valeur :',a*sqrt(-2*ln(1-random)));

end.
```

6. $\{T_n > n+1\}$ se réalise si et seulement si les $n+1$ premiers tirages donnent $n+1$ boules différentes. Ceci est impossible car l'urne contient n boules. Alors :

$$\boxed{P(T_n > n+1) = 0.}$$

7. Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$.

$\{T_n > k\}$ se réalise si et seulement si les k premiers tirages donnent k boules différentes.

Notons un instant A_n^k le nombre de k-listes sans répétition d'éléments de $[\![1,n]\!]$.

Il y a n^k manières de faire k tirages avec remise dans l'urne U_n et il y a A_n^k manières de faire k tirages dans U_n et d'obtenir k boules différentes.

Alors $P(T_n > k) = \dfrac{A_n^k}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \dfrac{n!}{n^k\,(n-k)!}\cdot$ $P(T_n > k) = \dfrac{n!}{n^k\,(n-k)!}\cdot$

Notons que ce résultat vaut encore pour $k = 0$ car $P(T_n > 0) = 1 = \dfrac{n!}{1 \times n!} = \dfrac{n!}{n^0\,(n-0)!}\cdot$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(T_n > k) = \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}.}$$

► Dans la suite y appartient à $[0, +\infty[$ et $k_n = \text{Ent}\,(y\sqrt{n})$.

8. $P\,(Y_n > y) = P\left(\dfrac{T_n}{\sqrt{n}} > y\right) = P(T_n > y\sqrt{n})$.

Montrons que les événements $\{T_n > y\sqrt{n}\}$ et $\{T_n > k_n\}$ sont égaux.

Soit r un élément de $\mathbb{N}$.

• Supposons que $r > y\sqrt{n}$. Alors $r > y\sqrt{n} \geqslant \text{Ent}\,(y\sqrt{n}) = k_n$ et donc $r > k_n$.

• Réciproquement supposons que $r > k_n$. Comme r est un entier : $r \geqslant k_n + 1$. Donc $r \geqslant k_n + 1 > y\sqrt{n}$ et ainsi $r > y\sqrt{n}$.

Finalement $r > y\sqrt{n} \Longleftrightarrow r > k_n$ et ceci pour tout r dans $\mathbb{N}$.

Alors, comme T_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, les événements $\{T_n > y\sqrt{n}\}$ et $\{T_n > k_n\}$ sont égaux.

Donc $P\,(Y_n > y) = P(T_n > y\sqrt{n}) = P(T_n > k_n)$.

$$\boxed{P(Y_n > y) = P(T_n > k_n).}$$

9. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ k_n \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n$ donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ 0 \leqslant y - \dfrac{k_n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on obtient par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{\sqrt{n}} = y$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\dfrac{k_n}{\sqrt{n}}\right) = 0 \times y = 0$.

Donc il existe un élément n_0 de $[\![2, +\infty[\![$ tel que : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \dfrac{k_n}{n} \leqslant 1$.

Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. $k_n \leqslant n$ donc $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n) = \dfrac{n!}{n^{k_n}\,(n-k_n)!}$.

Observons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - k_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 0$.

L'équivalent obtenu dans **I 9. b.** permet alors de dire que :

$P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n\,e^{-n}\,\sqrt{2\pi n}}{n^{k_n}\,(n-k_n)^{n-k_n}\,e^{-(n-k_n)}\,\sqrt{2\pi(n-k_n)}}$. Donc, en simplifiant, il vient :

$P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(\dfrac{n}{n-k_n}\right)^{n-k_n}\sqrt{\dfrac{n}{n-k_n}}$ ou $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$ et ainsi $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } y \text{ appartenant à } [0,+\infty[,\ P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}.}$$

10. a. $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$. Alors $t-1 \underset{t\to 0}{=} -1+t+\mathrm{o}(t^2)$ et $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} -t-\dfrac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$.

Par produit $(t-1)\ \ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} t + \dfrac{t^2}{2} - t^2 + \mathrm{o}(t^2)$. $(t-1)\ \ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$.

Donc $-t+(t-1)\ \ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} -\dfrac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$.

$$\boxed{-t+(t-1)\ \ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2).}$$

b. Ce qui précède donne $-t+(t-1)\ \ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 0$: $-\dfrac{k_n}{n} + \left(\dfrac{k_n}{n}-1\right)\ \ln\left(1-\dfrac{k_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{k_n^2}{2n^2}$.

En multipliant par n on obtient : $-k_n + (k_n-n)\ \ln\left(1-\dfrac{k_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{k_n^2}{2n}$.

Nous avons vu plus haut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = y$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n^2}{n} = y^2$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-k_n+(k_n-n)\ \ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{k_n^2}{2n}\right) = -\frac{y^2}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(-k_n+(k_n-n)\ \ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}.}$$

11. Par continuité de la fonction exponentielle en $-\dfrac{y^2}{2}$ il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\left(-k_n+(k_n-n)\ \ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-k_n}\ \left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Or $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\ \left(1-\dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n>y) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-k_n}\ \left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant y) = \lim_{n\to+\infty}(1-P(Y_n>y)) = 1-e^{-\frac{y^2}{2}} = F_1(y)$ et ceci pour tout élément y de $[0,+\infty[$.

$\forall y \in]-\infty,0[,\ \forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ P(Y_n \leqslant y) = P\left(\dfrac{T_n}{\sqrt{n}} \leqslant y\right) = P(T_n \leqslant y\sqrt{n}) = 0$.

Donc $\forall y \in]-\infty,0[,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant y) = 0 = F_1(y)$.

Finalement $\forall y \in \mathbb{R},\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant y) = 0 = F_1(y)$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la suite } (Y_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de densité } f_1.}$$