Corrigé du devoir maison 8

Travail libre :

1. Résoudre le système $PX = Y$ ... on trouve $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. cf corrigé DS 3 2017-18

Question :

Montrons que $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$: soit $x \in Ker(f)$ donc $f(x) = 0_F$
et donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ puisque g linéaire. On obtient bien $x \in Ker(g \circ f)$.

Montrons que $Im(g \circ f) \subset Im(g)$: soit $y \in Im(g \circ f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$.
ce qui peut se réécrire, $y = g(f(x))$ et donc en posant $a = f(x) \in F$, on obtient $y = g(a)$.
On a bien $y \in Im(g)$.

Exercice 1:

1. Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrons que $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
   Or $f(P) = (6aX + 2b) + X^2(3aX^2 + 2bX + c) - 3X(aX^3 + bX^2 + cX + d - d) = X^4(3a - 3a) + X^3(2b - 3b) + X^2(c - 3c) + X(6a) + 2b = -bX^3 - 2cX^2 + 6aX + 2b \in \mathbb{R}_3[X]$.
   Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de la dérivation $f(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)'' + X^2(\lambda P+Q)' - 3X(\lambda P + Q - (\lambda P(0) + Q(0)) = \lambda P'' + \lambda X^2 P' - \lambda 3X(P - P(0)) + Q'' + X^2 Q' - 3X(Q - Q(0)) = \lambda f(P) + f(Q)$.
2. $Ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow -bX^3 - 2cX^2 + 6aX + 2b = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \{b = c = a = 0$ par identification $\Leftrightarrow P(X) = d$. D'où $Ker(f) = \{P(X) = d, d \in \mathbb{R}\} = Vect(1)$ (ensemble des polynômes constants). Comme le polynôme 1 est non-nul, il forme de plus une famille libre de $Ker(f)$, donc une base de $Ker(f)$. Comme $Ker(f) \neq \{0\}$, f n'est pas injective.
3. $Im(f) = Vect(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = Vect(0, -2X^2, -X^3 + 2, 6X) = Vect(X^2, -X^3 + 2, X)$. Or cette famille génératrice de $Im(f)$ $\{X^2, -X^3 + 2, X\}$ est constituée de polynômes non-nuls de degrés deux à deux distincts, donc est libre, donc est une base de $Im(f)$. f n'est pas surjective car on voit que $Im(f) \subsetneq \mathbb{R}_3[X]$ (3 représentants au lieu 4).

Exercice 2: `Esc S 2008`

1. Question calculatoire ... mais ca finit par sortir si l'on n'oublie pas l'hypothèse $p + q = 1$!
2. D'après l'énoncé, à l'étape 0, deux boules noires sont placées sur la table donc $P(X_0 = 0) = 1$ et $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0$. Puis une boule noire est enlevée. On note alors B_1 l'événement "on repose une boule blanche à l'étape 1". Alors $P(X_1 = 0) = P(\overline{B_1}) = q$, $P(X_1 = 1) = P(B_1) = p$ et $P(X_1 = 2) = 0$ car on ne change qu'une boule sur les deux, donc il reste forcément au moins une boule noire sur la table.
3. Sachant $(X_k = 0)$, deux boules noires sont posées sur la table donc au début de l'étape $k + 1$, une boule noire a été enlevée, et donc $(X_{k+1} = 0)$ est réalisée ssi une boule noire est reposée : d'où $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = q$, et $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 1) = p$, $P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 2) = 0$.
   Sachant $X_k = 2$, deux boules blanches sont posées sur la table donc au début de l'étape $k+1$, une boule blanche a été enlevée, et donc $(X_{k+1} = 2)$ est réalisée ssi une boule blanche est reposée etc. : $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = p$, et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = q$, $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 0) = 0$.
   Sachant $(X_k = 1)$, il y a une boule blanche et une noire sur la table. Pour que $(X_{k+1} = 0)$ soit réalisé, il faut que la boule noire soit retirée (une chance sur deux), et qu'une boule blanche soit posée : $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{2}p$ et par symétrie, $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}q$.
   Dans ces conditions, $(X_{k+1} = 1)$ est réalisé dans deux cas incompatibles : on enlève une blanche, et on repose une blanche ou l'on enlève une noire et on repose une noire : $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$.
4. $\{(X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2)\}$ forme un s.c.e.. D'après la formule des probabilités totales, $P((X_{k+1} = 0))$
   $= P(X_k = 0)P_{(X_k=0)}((X_{k+1} = 0) + P(X_k = 1)P_{(X_k=1)}((X_{k+1} = 0) + P(X_k = 2)P_{(X_k=2)}((X_{k+1} = 0)$
   $= qP(X = 0) + \frac{1}{2}pP(X_k = 1)$ et de même, on trouve
   $P(X_{k+1} = 1) = pP(X_k = 0) + \frac{1}{2}P(X_k = 1) + qP(X_k = 2)$, $P(X_{k+1} = 2) = \frac{p}{2}P(X_k = 1) + pP(X_k = 2)$.
   Il reste à faire le produit matriciel MU_k pour constater qu'on trouve U_{k+1}.
5. Raisonnement par récurrence :
   n=1 : ne pas oublier que le calcul PD a déjà été fait ! et penser à réutiliser $p + q = 1$.
   Supposons que pour un certain k,
   $U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $U_{k+1} = MU_k = MPD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = PDD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$ (par 1.) $= PD^{k+1} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. Comme D est une matrice diagonale, et que pour tout $k \geq 1$, $0^k = 0$, on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
   $U_k = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p - q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p - q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p(\frac{1}{2})^{k-1} \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Et on en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_k = 0) = pq(\frac{1}{2})^{k-1} + q^2$, $P(X_k = 1) = p(p - q)(\frac{1}{2})^{k-1} + 2pq$
   et $P(X_k = 2) = -p^2(\frac{1}{2})^{k-1} + p^2$.
   Comme $\frac{1}{2} \in]0, 1[$, on trouve $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 0) = q^2$, $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 1) = 2pq$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 2) = p^2$.

Exercice 3:

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u(\lambda P+Q) = (\lambda P(a)+Q(a), \lambda P(b)+Q(b), \lambda P(c)+Q(c)) = \lambda(P(a), P(b), P(c))+(Q(a), Q(b), Q(c)) = \lambda u(P)+u(Q)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $P \in Ker(u) \Leftrightarrow u(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow P(a) = 0 = P(b) = P(c) \Leftrightarrow a, b, c$ sont 3 racines distinctes de $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et u est injective.

3. $I = Im(u) = Vect(u(1), u(X), u(X^2)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4))$
$= Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1))$ car $\frac{1}{2}((0,1,4)-(0,1,2)) = (0,0,1)$
$= Vect(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$ car $(0,1,2) - 2*(0,0,1) = (0,1,0)$
$= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ car $(1,1,1)-(0,1,0)-(0,0,1) = (1,0,0)$ donc u est surjective.
OU via la compatibilité d'un système (ne pas aller jusqu'à la résolution!!), pour mq que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe bien $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = (x,y,z)$ (définition de la surjection, que l'application soit linéaire ou non).
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mq il existe $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que
$\left\{\begin{array}{l} P(0) = x \\ P(1) = y \\ P(2) = z \end{array}\right.$. Or $\left\{\begin{array}{ll} \gamma & = x \\ \alpha+\beta+\gamma & = y \\ 4\alpha+2\beta+\gamma & = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta+\gamma & = y \\ -2\beta-3\gamma & = z-4y \\ \gamma & = x \end{array}\right.$ système compatible car de Cramer.

4. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf DM 4).
a) Analyse : soit A un polynôme qui convient. Alors A est de degré au plus 2, et b et c sont deux racines distinctes, donc $(X-b)(X-c)$ divise A et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A(X) = (X-b)(X-c)Q(X)$. Or $deg(A) \leq 2 \Rightarrow deg(Q) \leq 0$ d'où $Q(X) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $A(X) = \alpha(X-b)(X-c)$. Puis $A(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.
Un unique candidat : $A(X) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(X-b)(X-c)$.
Synthèse immédiate : ce polynôme convient bien car $A \in \mathbb{R}_2[X]$, $A(a) = 1$ et $A(b) = 0 = A(c)$.
b) De même, on trouve $B(X) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}(X-a)(X-c)$ et $C(X) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}(X-a)(X-c)$.

5. a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda A(X) + \mu B(X) + \nu C(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors en $X = a$ on obtient :
$\lambda A(a) + \mu B(a) + \nu C(a) = 0$ càd $\lambda = 0$. De même, en $X = b$ puis $X = c$, on trouve $\mu = 0 = \nu$.
b) Trouvons les (uniques) (α, β, γ) tels que $P(X) = \alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X)$. Même astuce : 3 inconnues, donc il faut 3 équations : on regarde en $X = a$, puis $X = b$ et $X = c$. On trouve $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$.
Finalement tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $P(X) = P(a)A(X) + P(b)B(X) + P(c)C(X)$.