Corrigé du devoir maison 7

Exercice 1: Intégrales de Wallis (Exercice 12 Feuille 12) fréquemment posé aux concours

1. $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n(\cos t - 1)dt \leq 0$. En effet, 0< $\frac{\pi}{2}$, et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 \geq \cos t \geq 0$ donc $(\cos t)^n \geq 0$ et $\cos t - 1 \leq 0$.
   De plus, pour les mêmes raisons que ci-dessus, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2}(\cos t)^n dt \geq 0$.
   Donc la suite (W_n), décroissante et minorée par 0, converge.

3. IPP sur W_{n+2}. Premières tentatives : $u' = 1$ et $v = (\cos t)^{n+2}$ ou $u' = (\cos t)^2$ et $v = (\cos t)^n$ Ne marchent pas.
   Astuce : écrire $(\cos t)^{n+2} = \cos t(\cos t)^{n+1}$ et poser $u' = \cos t$ et $v = (\cos t)^{n+1}$.
   Alors $u = \sin t$ et $v' = -(n+1)(\sin t)(\cos t)^n$. u, v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'où
   $W_{n+2} = [(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\pi/2}(\sin t)^2(\cos t)^n dt = 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2}(1 - (\cos t)^2)(\cos t)^n dt$
   $= (n+1)[\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n dt - \int_0^{\pi/2}(\cos t)^2(\cos t)^n dt] = (n+1)[W_n - W_{n+2}]$.
   D'où $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ càd $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

4. ** $\boxed{\text{Par récurrence}}$: $n = 0$: $\frac{0!}{(1*0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$.
   Supposons que pour un certain n, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et montrons que $W_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$.
   Or $W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}$ par 2. $= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$ par H.R. $= \frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$
   $= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1))^2(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$.
   Ou par itération ... en partant de la formule du 2. en W_{2n} (donc fonction de W_{2n-2}), et en itérant jusqu'à W_0.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$ par 2. $= u_n$. Donc la suite (u_n) est constante.
   Or $u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$ et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{\pi}{2}$.
6. Par 4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2}$ et
   $W_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\frac{1}{W_{2n}}\frac{\pi}{2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 2:

Posons f l'intégrande : $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$, définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

1. si $x > 0$, alors $3x > 0$ donc $0 \notin [x, 3x]$ et f est bien continue sur $[x, 3x]$ donc $F(x)$ existe.
   si $x < 0$, alors $3x < 0$ donc $0 \notin [3x, x]$ et f est bien continue sur $[3x, x]$ donc $F(x)$ existe.
   F est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a bien $-x \in \mathbb{R}^*$ et $F(-x) = \int_{-x}^{-3x}\frac{\cos(t)}{t}dt$. Changement de variable : $y = -t$ ($t \mapsto -t$ C^1 sur $\mathbb{R}$).
   Alors $t = -y$, $dt = -dy$ et $t = -x \Rightarrow y = x$ et $t = -3x \Rightarrow y = 3x$ d'où $F(-x) = \int_x^{3x}\frac{\cos(-y)}{-y}(-dy)$
   $= \int_x^{3x}\frac{\cos(-y)}{y}dy = \int_x^{3x}\frac{\cos(y)}{y}dy = F(x)$ par parité du cosinus. Donc F est paire sur $\mathbb{R}^*$.
3. (a) Pour tout $x > 0$, d'après l'inégalité triangulaire $\boxed{\text{car } 3x > x}$,
   $|\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt| \leq \int_x^{3x}|\frac{\sin(t)}{t^2}|dt = \int_x^{3x}\frac{|\sin(t)|}{t^2}dt \leq \int_x^{3x}\frac{1}{t^2}dt$ par croissance de l'intégrale, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq 1$. Or $\int_x^{3x}\frac{1}{t^2}dt = [-\frac{1}{t}]_x^{3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$ d'où le résultat.

   (b) Soit $x > 0$. Intégration par parties : $u'(x) = \cos(t)$, $u(x) = \sin(t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$. u et v sont de classe C^1 sur $[x, 3x]$ et $F(x) = [\frac{\sin t}{t}]_x^{3x} + \int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

   (c) $\frac{2}{3x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc en appliquant le théorème d'encadrement au résultat du (a), on obtient $\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   De plus, $|\frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{x}| \leq \frac{|\sin(3x)|+3|\sin(x)|}{x} \leq \frac{4}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. (a) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$, alors $3x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et cos étant une fonction décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, elle l'est sur $[x, 3x]$. D'où par construction : $x \leq t \leq 3x \Rightarrow \cos(3x) \leq \cos(t) \leq \cos(x) \Rightarrow \frac{\cos(3x)}{t} \leq \frac{\cos(t)}{t} \leq \frac{\cos(x)}{t}$ [car $t > 0$] et par croissance de l'intégrale, comme $3x > x$ puisque $x > 0$, $\int_x^{3x}\frac{\cos(3x)}{t}dt \leq \int_x^{3x}\frac{\cos(t)}{t}dt \leq \int_x^{3x}\frac{\cos(x)}{t}dt$
   d'où : $\cos(3x)[\ln(|t|)]_x^{3x} \leq F(x) \leq \cos(x)[\ln(|t|)]_x^{3x}$ et finalement, comme $\ln(3x) - \ln(x) = \ln(\frac{3x}{x}) = \ln(3)$, on obtient : $\cos(x)\ln(3) \leq F(x) \leq \cos(x)\ln(3)$.

   (b) Théorème d'encadrement appliqué au (a) : $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \ln(3)$.
   Comme F est paire sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \ln(3)$ donc finalement, $\lim\limits_{x\to0} F(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to0} F(x) = \ln(3) \in \mathbb{R}$. Donc F se prolonge par continuité en 0 (avec la valeur $\ln(3)$).