

Recommandations

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion encadrée ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

(Paradoxe de Walter Penney)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note P_k l'événement « obtenir pile au k -ème lancer » et F_k l'événement « obtenir face au k -ème lancer ». Pour alléger, on pourra écrire $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « face » dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k . On convient que X prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « pile » dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k . On convient que Y prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objectif de cet exercice est de calculer les espérances de X et Y pour vérifier, contre toute attente, que $E(X)$ et $E(Y)$ ne sont pas égales !! Plus précisément, nous allons voir que $E(X) < E(Y)$, ce qui signifie que le temps d'attente de la première configuration « pile-face » est, en moyenne, plus court que le temps d'attente de la première configuration « pile-pile ».

Partie A. Étude de X

1. Que vaut $X(\Omega)$?
2. Calculer $P(X = 2)$.
3. Soit $k \geq 3$.
 - a) Démontrer que

$$P(X = k | P_1) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

- b) Expliquer sobrement pourquoi l'on a

$$P(X = k | F_1) = P(X = k - 1).$$

- c) En déduire que

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P(X = k - 1).$$

4. Pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on pose $u_k = 2^k P(X = k)$. Démontrer que la suite $(u_k)_{2 \leq k \leq n}$ est arithmétique et en déduire la valeur de $P(X = k)$ pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$.
5.
 - a) Démontrer que, pour tout $m \geq 2$, on a

$$\sum_{k=2}^m \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{m+1}{2^m}.$$

- b) Déterminer $P(X = 0)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.

6.
 - a) Démontrer que, pour tout $m \geq 2$, on a

$$\sum_{k=2}^m \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{m^2 + 3m + 4}{2^m}.$$

- b) Calculer $E(X)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B. Étude de Y

1. Que vaut $Y(\Omega)$?
2. Calculer $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.
3. Soit $k \geq 4$.
 - a) À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que

$$P(Y = k | P_1) = \frac{1}{2}P(Y = k | P_1 F_2)$$

et en déduire que

$$P(Y = k | P_1) = \frac{1}{2}P(Y = k - 2).$$

- b) Démontrer que

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k - 1) + \frac{1}{4}P(Y = k - 2).$$

4. Déterminer $P(Y = k)$ pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$.
5.
 - a) Démontrer par récurrence sur m que, pour tout $m \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on a

$$\sum_{k=2}^m P(Y = k) = 1 - P(Y = m - 1) - 3P(Y = m).$$

- b) Déterminer $P(Y = 0)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

6.
 - a) Démontrer par récurrence sur m que, pour tout $m \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on a

$$\sum_{k=2}^m kP(Y = k) = 6 - (m + 5)P(Y = m - 1) - (3m + 16)P(Y = m).$$

- b) Démontrer que

$$E(Y) = 6 - \frac{5(n + 5) + (2n + 11)\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} - \frac{5(n + 5) - (2n + 11)\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1}$$

et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Un peu d'informatique

1. Écrire, en langage SCILAB, un script qui réalise 100 lancers d'une pièce équilibrée et stocke les résultats de ces lancers (sous forme de "P" et de "F") dans un vecteur u .
2. Que fait le script suivant :

```
X=0; Y=0;
for i=2:100 do
    if u(i-1)=="P" & u(i)=="F" & X==0 do
        X=i;
    end
    if u(i-1)=="P" & u(i)=="P" & Y==0 do
        Y=i;
    end
end
X, Y,
```

3. Que faudrait-il faire pour que les valeurs de X et Y données par SCILAB, soient proches respectivement de 4 et 6 ?