CORRECTION DU DS 6

(durée : 4 h 00)

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note P_k l'événement « obtenir pile au k-ème lancer » et F_k l'événement « obtenir face au k-ème lancer ». On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « face » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k. On convient que X prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession. On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « pile » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k. On convient que Y prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession. L'objectif de cet exercice est de calculer les espérances de X et Y pour vérifier, contre toute attente, que $E(X) < E(Y)$, ce qui signifie que le temps d'attente de la première configuration « pile-face » est, en moyenne, plus court que le temps d'attente de la première configuration « pile-pile ».

Partie A. Étude de X

1. *Que vaut $X(\Omega)$?*

   On a clairement
   $$\boxed{X(\Omega) = \{0\} \cup [\![2;n]\!].}$$

2. *Calculer $P(X = 2)$.*

   On a
   $$\begin{array}{rcll} P(X=2) & = & P(P_1F_2) & \\ & = & P(P_1)P(F_2) & \text{par indépendance} \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}, & \end{array}$$
   donc
   $$\boxed{P(X=2) = \frac{1}{4}\cdot}$$

3. *Soit $k \geqslant 3$.*

   a) *Démontrer que $P(X = k \,|\, P_1) = 1/2^{k-1}$.*

   On a
   $$\begin{array}{rcll} P(X=k \,|\, P_1) & = & P(P_2 \cdots P_{k-1}F_k \,|\, P_1) & \\ & = & P(P_2 \cdots P_{k-1}F_k) & \text{car } P_2 \cdots P_{k-1}F_k \perp\!\!\!\perp P_1 \\ & = & P(P_2) \cdots P(P_{k-1})P(F_k) & \text{par indépendance} \\ & = & \underbrace{\dfrac{1}{2} \times \cdots \times \dfrac{1}{2}}_{k-1 \text{ fois}}, & \end{array}$$
   donc
   $$\boxed{P(X=k \,|\, P_1) = \frac{1}{2^{k-1}}\cdot}$$

b) *Expliquer sobrement pourquoi l'on a* $P(X=k\,|\,F_1)=P(X=k-1)$.

La réalisation de l'événement F_1 n'a aucune influence sur la possibilité d'avoir la séquence « pile-face ». Par conséquent, lorsque l'on sait que F_1 s'est réalisé, on peut considérer que le premier tirage n'a pas existé et donc que la suite de tirages commence au rang 2. Dans ces conditions, mesurer la probabilité de l'événement $(X=k)$ sachant que F_1 s'est réalisé revient, par décalage d'indice, à mesurer la probabilité (sans conditionnement) de l'événement $(X=k-1)$. Donc

$$\boxed{P(X=k\,|\,F_1)=P(X=k-1).}$$

c) *En déduire que* $P(X=k)=1/2^k+P(X=k-1)/2$.

D'après la formule des probabilités totales à travers le système complet d'événements (P_1,F_1), on a

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(P_1)P(X=k\,|\,P_1)+P(F_1)P(X=k\,|\,F_1) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2}\times P(X=k-1), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X=k)=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}P(X=k-1).}$$

d) *Pour tout* $k\in[\![2;n]\!]$, *on pose* $u_k=2^kP(X=k)$. *Démontrer que la suite* $(u_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ *est arithmétique et en déduire la valeur de* $P(X=k)$ *pour tout* $k\in[\![2;n]\!]$.

Pour tout $k\in[\![2;n]\!]$, on a

$$u_k=2^kP(X=k)=2^k\Big(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}P(X=k-1)\Big)=1+2^{k-1}P(X=k-1)=1+u_{k-1},$$

donc $(u_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ est arithmétique. Par suite, pour tout $k\in[\![2;n]\!]$, on a

$$u_k=u_2+k-2=4\frac{1}{4}+k-2=k-1,$$

d'où

$$\boxed{\forall k\in[\![2;n]\!]\,,\qquad P(X=k)=\frac{k-1}{2^k}\cdot}$$

4. a) *Démontrer que, pour tout* $m\geqslant 2$, *on a* $\sum_{k=2}^{m}(k-1)/2^k=1-(m+1)/2^m$.

Pour tout $m\geqslant 2$, on pose $\mathscr{P}(m)$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{m}\frac{k-1}{2^k}=1-\frac{m+1}{2^m}\cdot$

<u>Initialisation :</u> Pour $m=2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{2}\frac{k-1}{2^k}=\frac{1}{4}$ et $1-\dfrac{2+1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $m\geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1}\frac{k-1}{2^k} &= \sum_{k=2}^{m}\frac{k-1}{2^k}+\frac{m}{2^{m+1}} \\ &= 1-\frac{m+1}{2^m}+\frac{m}{2^{m+1}} \qquad \text{par H.R.} \\ &= 1-\frac{(m+1)+1}{2^{m+1}}, \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(m+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m\geqslant 2,\qquad \sum_{k=2}^{m}\frac{k-1}{2^k}=1-\frac{m+1}{2^m}\cdot}$$

b) *Déterminer $P(X=0)$ et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.*

On a

$$P(X=0) = 1 - \sum_{k=2}^{n} P(X=k) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2^k} \qquad \text{d'après A. 4.}$$

donc, d'après A. 5. a),

$$\boxed{P(X=0) = \frac{n+1}{2^n}\cdot}$$

Les croissances comparées nous disent que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X=0) = 0,}$$

ce qui s'interprète en disant que

> si on lance un très grand nombre de fois la pièce, on obtiendra quasi-certainement la séquence « pile-face ».

5. a) *Démontrer que, pour tout $m \geqslant 2$, on a $\sum_{k=2}^{m} k(k-1)/2^k = 4 - (m^2+3m+4)/2^m$.*

Pour tout $m \geqslant 2$, on pose $\mathscr{Q}(m)$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m}\cdot$

Initialisation : Pour $m=2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle 4 - \frac{2^2+3.2+4}{2^2} = \frac{1}{2}$ donc $\mathscr{Q}(2)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $m \geqslant 2$ tel que $\mathscr{Q}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{Q}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{m+1} \frac{k(k-1)}{2^k} &= \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{(m+1)m}{2^{m+1}} \\
&= 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m} + \frac{(m+1)m}{2^{m+1}} \qquad \text{par H.R.} \\
&= 4 - \frac{m^2+5m+8}{2^1} \\
&= 1 - \frac{(m+1)^2+3(m+1)+4}{2^{m+1}},
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{Q}(m+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{m^2+3m+4}{2^m}\cdot}$$

b) *Calculer $E(X)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.*

On a

$$E(X) = \sum_{k\in\{0\}\cup[\![2;n]\!]} kP(X=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} \qquad \text{d'après A. 4.,}$$

ce qui donne, d'après le résultat de la question précédente,

$$\boxed{E(X) = 4 - \frac{n^2+3n+4}{2^n}\cdot}$$

Les croissances comparées nous disent alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X) = 4.}$$

Partie B. Étude de Y

1. *Que vaut $Y(\Omega)$?*

   On a encore

$$\boxed{Y(\Omega) = \{0\} \cup [\![2; n]\!].}$$

2. *Calculer $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.*

   On a

$$P(Y=2) = P(P_1P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

   et

$$P(Y=3) = P(F_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

   où l'on a, par deux fois, utilisé l'indépendance des tirages. Donc

$$\boxed{P(Y=2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P(Y=3) = \frac{1}{8}\cdot}$$

3. *Soit $k \geqslant 4$.*

   a) *À l'aide des probabilités totales, démontrer que $P(Y=k \mid P_1) = P(Y=k \mid P_1F_2)/2$ et en déduire que $P(Y=k \mid P_1) = P(Y=k-2)/2$.*

   D'après la formule des probabilités totales appliquées à travers le système complet d'événements (P_2, F_2), on a

$$P(Y=k \mid P_1) = P(P_2 \mid P_1)P(Y=k \mid P_1P_2) + P(F_2 \mid P_1)P(Y=k \mid P_1F_2).$$

   Or

   - ▷ $P(P_2 \mid P_1) = P(P_2) = \frac{1}{2}$ par indépendance ;
   - ▷ $P(Y=k \mid P_1P_2) = 0$ puisque la première séquence « pile-pile » ne peut pas apparaître au k-ème tirage (avec $k \geqslant 4$) pour la première fois alors que cette séquence est apparue au deuxième essai ;
   - ▷ $P(F_2 \mid P_1) = P(F_2) = \frac{1}{2}$ par indépendance ;
   - ▷ $P(Y=k \mid P_1F_2) = P(Y=k-2)$ car, de la même façon qu'à la question A. 3. b), la réalisation de P_1F_2 n'influence pas l'apparition de la séquence « pile-pile » ce qui permet de dire qu'il revient au même de mesurer la probabilité de l'événement $(Y=k)$ sachant que P_1F_2 s'est réalisé ou de mesurer, par décalage d'indice, la probabilité (sans conditionnement) de l'événement $(Y=k-2)$.

   donc

$$P(Y=k \mid P_1) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}P(Y=k-2),$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{P(Y=k \mid P_1) = \frac{1}{2}P(Y=k-2).}$$

   b) *Démontrer que $P(Y=k) = P(Y=k-1)/2 + P(Y=k-2)/4$.*

   D'après la formule des probabilités totales appliquées à travers le système complet d'événements (P_1, F_1), on a

$$P(Y=k) = P(P_1)P(Y=k \mid P_1) + P(F_1)P(Y=k \mid F_1).$$

   Or $P(Y=k \mid F_1) = P(Y=k-1)$ par le même raisonnement qu'à la question A. 3. b), donc, en tenant compte du résultat de la question précédente, on a

$$P(Y=k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}P(Y=k-2) + \frac{1}{2} \times P(Y=k-1),$$

   donc

$$\boxed{P(Y=k) = \frac{1}{2}P(Y=k-1) + \frac{1}{4}P(Y=k-2).}$$

4. *Déterminer $P(Y=k)$ pour tout $k \in [\![2;n]\!]$.*

Pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, on pose $v_k = P(Y=k)$ de sorte que, d'après la question précédente, on ait

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence double est $r^2 - r/2 - 1/4 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1/4 + 1 = 5/4$ donc les solutions de cette équation sont les deux nombres réels $r_1 = (1+\sqrt{5})/4$ et $r_2 = (1-\sqrt{5})/4$. Par suite, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad v_k = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^k + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^k.$$

Comme $v_2 = 1/4$ et $v_3 = 1/8$, il est logique de poser $v_1 = 0$ et $v_0 = 1$ (mais attention, cela n'a pas de sens en probabilité...), donc

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}A + \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}B = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$A = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad P(Y=k) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^k + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^k.}$$

5. a) *Montrer que, pour $m \in [\![2;n]\!]$, on a $\sum_{k=2}^m P(Y=k) = 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m)$.*

Pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on pose $\mathscr{R}(m)$: $\displaystyle\sum_{k=2}^m P(Y=k) = 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m)$.

<u>Initialisation :</u> Pour $m=2$, on a

$$\sum_{k=2}^2 P(Y=k) = P(Y=2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad 1 - P(Y=1) - 3P(Y=2) = 1 - 0 - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

donc $\mathscr{R}(2)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Fixons $m \in [\![2;n]\!]$ tel que $\mathscr{R}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{R}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1} P(Y=k) &= \sum_{k=2}^{m} P(Y=k) + P(Y=m+1) \\ &= 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m) + P(Y=m+1) \qquad \text{par H.R.} \\ &= 1 - \big(4P(Y=m+1) - 2P(Y=m)\big) \\ &\qquad -3P(Y=m) + P(Y=m+1) \qquad \text{par B. 3. b)} \\ &= 1 - P(Y=m) - 3P(Y=m+1), \end{aligned}$$

donc $\mathscr{R}(m+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^m P(Y=k) = 1 - P(Y=m-1) - 3P(Y=m).}$$

b) *Déterminer $P(Y=0)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.*
Le résultat de la question précédente nous dit que

$$P(Y=0) = 1 - \sum_{k=2}^{n} P(Y=k) = P(Y=n-1) + 3P(Y=n),$$

donc, d'après le résultat de la question 4, on a

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1} \\ &\quad + 3\frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n} + 3\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(Y=0) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1} + \frac{5-2\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}.}$$

Comme $(1+\sqrt{5})/4$ et $(1-\sqrt{5})/4$ appartiennent à $]-1;1[$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(Y=0) = 0,}$$

ce qui s'interprète en disant que

> si on lance un très grand nombre de fois la pièce, on obtiendra quasi-certainement la séquence « pile-pile ».

6. a) *Démontrer par récurrence sur m que, pour tout $m \in [\![2;n]\!]$, on a*

$$\sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6 - (m+5)P(Y=m-1) - (3m+16)P(Y=m).$$

On pose $\mathscr{S}(m) : \displaystyle\sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6 - (m+5)P(Y=m-1) - (3m+16)P(Y=m)$ pour tout $m \in [\![2;n]\!]$.
<u>Initialisation :</u> On a

$$\sum_{k=2}^{2} kP(Y=k) = 2P(Y=2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 6-7P(Y=1)-22P(Y=2) = 6-7\times 0-22\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

donc $\mathscr{S}(2)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Fixons $m \in [\![2;n]\!]$ tel que $\mathscr{S}(m)$ est vraie et démontrons $\mathscr{S}(m+1)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m+1} kP(Y=k) &= \sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) + (m+1)P(Y=m+1) \\ &= 6 - (m+5)P(Y=m-1) - (3m+16)P(Y=m) \\ &\qquad + (m+1)P(Y=m+1) \qquad \text{par H.R.} \\ &= 6 - (m+5)\big(4P(Y=m+1) - 2P(Y=m)\big) \\ &\qquad - (3m+16)P(Y=m) + (m+1)P(Y=m+1) \qquad \text{par B. 3. b)} \\ &= 6 - (m+6)P(Y=m) - (3m+19)P(Y=m+1) \\ &= 6 - \big((m+1)+5\big)P(Y=m) - \big(3(m+1)+16\big)P(Y=m+1), \end{aligned}$$

donc $\mathscr{S}(m+1)$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{m} kP(Y=k) = 6 - (m+5)P(Y=m-1) - (3m+16)P(Y=m).}$$

b) *Calculer $E(Y)$ et préciser la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.*

On a

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k\in\{0\}\cup[\![2;n]\!]} kP(Y=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} kP(Y=k) \\
&= 6-(n+5)P(Y=n-1)-(3n+16)P(Y=n) \qquad \text{d'après B. 6. a)} \\
&= 6-(n+5)\Big[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}\Big] \\
&\qquad -(3n+16)\Big[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n}\Big],
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\boxed{E(Y)=6-\frac{5(n+5)+(2n+11)\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}-\frac{5(n+5)-(2n+11)\sqrt{5}}{10}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big)^{n-1}.}$$

Comme $(1+\sqrt{5})/4$ et $(1-\sqrt{5})/4$ appartiennent à $]-1;1[$, les croissances comparées nous disent que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X)=6.}$$

Partie C. Un peu d'informatique

1. *Écrire, en langage SCILAB, un script qui réalise* `100` *lancers d'une pièce équilibrée et stocke les résultats de ces lancers (sous forme de* `"P"` *et de* `"F"`*) dans un vecteur* `u`*.*

   On écrit

```
for i=1:100 do
  piece=rand();
  if piece<0.5 then u(i)="P"; else u(i)="F"; end
end
```

2. *Que fait le script donné dans l'énoncé ?*

   On constate que

ce script détermine les valeurs de X et Y pour le tableau `u` fabriqué à la question précédente.

3. *Que faudrait-il faire pour que les valeurs de X et Y données par SCILAB, soient proches respectivement de 4 et 6 ?*

   Il faudrait moyenner, c'est-à-dire qu'

il faudrait effectuer un grand nombre de fois (à l'aide d'un `for`) les scripts des deux questions précédentes, stocker les différents résultats pour X et Y dans un tableau et faire la moyenne de ces deux tableaux.