

->

CORRECTION DU DM 1

1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

En particulier, f est continue en 0.

De même, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$, en passant à la limite dans le taux d'accroissement, nous obtenons que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x + 1} = +\infty.$$

A fortiori, f n'est pas dérivable en 0.

2.

- a. La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0 \quad (x > 0).$$

Par conséquent, φ croît strictement sur $]0, +\infty[$.

- b. Il résulte du théorème de croissance comparée entre $\ln x$ et x que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

La fonction φ étant continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $] -\infty, +\infty[$ et admet, de ce fait, un unique antécédent pour 0 dans $]0, +\infty[$. Autrement dit, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée β .

- c. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(x + 1) - x \ln x}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 + \ln x}{(x + 1)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x + 1)^2} \quad (x > 0).$$

- d. D'après (2c), $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont même signe. Il résulte alors de (2a) et (2b) que

x	0	β	$+\infty$
$\varphi(x)$		-	0
$f'(x)$		-	0
f	0	\searrow	
			\nearrow

3. a. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + 1/x} = +\infty.$$

b. En remarquant que

$$\ln(x) - f(x) = \frac{(x+1)\ln x - x\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x+1},$$

il résulte du théorème de croissance comparée que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - f(x) = 0$.

4. Avant de tracer la courbe, remarquons que f s'annule seulement en 0 et en 1 d'après l'énoncé et puisque

$$f(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \quad (x > 0).$$

Nous observons également que $f(\beta) = -\beta$. En effet la relation $\varphi(\beta) = 0$ induit d'une part que $\ln(\beta) = -1 - \beta$ et d'autre part que

$$f(\beta) = \frac{\beta \ln \beta}{\beta + 1} = \frac{\beta(-1 - \beta)}{\beta + 1} = -\beta.$$

