->

CORRECTION DU DM 2

1. a.

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0^2 + u_0 = 1^2 + 1 = 2 \\u_2 &= u_1^2 + u_1 = 2^2 + 2 = 6 \\u_3 &= u_2^2 + u_2 = 6^2 + 6 = 42\end{aligned}$$

- b. Pour $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - u_n = u_n^2 \geq 0$. A fortiori, la suite u est croissante.
- c. Supposons que u converge vers une limite finie. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$, nous obtenons d'une part que $\ell = \ell^2 + \ell$ et d'autre part que $\ell = 0$, ce qui est impossible car $u_n \geq u_0 = 1$ pour $n \geq 0$. A fortiori, la suite u ne converge pas. Comme elle est croissante, nous en déduisons qu'elle n'est pas bornée et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty.$$

2. a. Pour $n \geq 0$, nous déduisons des identités $v_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ que

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = \frac{\ln u_{n+1} - 2 \ln u_n}{2^{n+1}} \\&= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \frac{u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

- b. a. Comme $2^{n+1} > 0$ et $u_n \geq u_0 = 1 > 0$ pour $n \geq 0$, la suite u étant croissante, nous remarquons que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \geq 0 \quad (n \geq 0).$$

En particulier la suite v est croissante.

- b. Comme $u_n \geq 1$, nous remarquons que $1 \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2$ et, le logarithme étant une fonction croissante, que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln 2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- c. Il résulte de la relation $v_0 = \frac{\ln u_0}{2^0} = 0$ et du principe des sommes télescopiques que

$$v_k = v_k - v_0 = \sum_{n=0}^{k-1} (v_{n+1} - v_n) \quad (k \geq 0)$$

A l'aide de l'inégalité précédente, nous pouvons alors majorer v_k par une somme géométrique

$$v_k \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\ln 2}{2^{n+1}} = \frac{\ln(2)/2^k - \ln(2)/2}{1/2 - 1} = \ln(2) \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \leq \ln(2) \quad (k \geq 0).$$

En conclusion, la suite v est majorée par $\ln(2)$.

- d. La suite v étant croissante et majorée, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme v_n est croissante, on a $v_n \geq v_1 = \ln(2)/2$ pour $n \geq 1$. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, il vient

$$\ell \geq \ln(2)/2 > 0.$$

- e. Comme v est croissante et converge vers ℓ , nous avons $v_n \leq \ell$ pour $n \geq 0$. A fortiori, nous déduisons de la croissance de l'exponentielle que

$$u_n = e^{2^n v_n} \leq e^{2^n \ell} = (e^\ell)^{2^n} = \alpha^{2^n} \quad (n \geq 0).$$

- c. a. La suite u étant croissante, pour $p \geq n \geq 0$, nous remarquons que $u_p \geq u_n$ et donc que $1 + \frac{1}{u_p} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$. Le logarithme étant croissant, il suit

$$v_{p+1} - v_p = \frac{1}{2^{p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_p}\right) \leq \frac{1}{2^{p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

- b. A l'aide du principe des sommes télescopiques, nous déduisons de l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned} v_k - v_n &= \sum_{p=n}^{k-1} (v_{p+1} - v_p) \leq \sum_{p=n}^{k-1} \frac{1}{2^{p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{p=n}^{k-1} \frac{1}{2^{p+1}} \\ &\leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \frac{2^{-k-1} - 2^{-n-1}}{2^{-1} - 1} = \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) (2^{-n} - 2^{-k}) \\ &\leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) 2^{-n} \end{aligned}$$

- c. En fixant n et en faisant tendre k vers l'infini, il résulte de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que

$$\ell - v_n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) 2^{-n} \quad (n \geq 0).$$

En multipliant par 2^n et en composant avec l'exponentielle, il suit

$$e^{\ell 2^n - 2^n v_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \quad (n \geq 0).$$

Comme $u_n = e^{v_n 2^n}$ et comme $e^\ell = \alpha$, nous remarquons d'une part que

$$\frac{\alpha^{2^n}}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \quad (n \geq 0)$$

et d'autre part, en multipliant par u_n , que

$$\alpha^{2^n} \leq u_n + 1 \quad (n \geq 0).$$

- d. D'après les inégalités précédentes, nous avons

$$\alpha^{2^n} - 1 \leq u_n \leq \alpha^{2^n} \quad (n \geq 0).$$

En divisant par α^{2^n} , nous obtenons que

$$1 - \frac{1}{\alpha^{2^n}} \leq \frac{u_n}{\alpha^{2^n}} \leq 1 \quad (n \geq 0).$$

Comme $\alpha = e^\ell > 1$, en passant à la limite, il résulte alors du principe des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \alpha^{-2^n}) = 1$. Autrement dit, nous avons démontré que

$$u_n \sim \alpha^{2^n}.$$