DEVOIR SURVEILLE 1

On rappelle qu'une suite croissante :

▷ converge si, et seulement si, elle est majorée

▷ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, elle n'est pas majoré

Exo I. On fixe $x_0 \in]1, +\infty[$ et on pose

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \qquad (n \geqslant 0)$$

1. Etablir le tableau de variation sur $]1, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x-1}$
2. Etude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que x_n est bien défini et que $x_n > 1$.
   b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   c. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, i.e. que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
3. Etude de la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   a. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $x_n \geqslant n + 1$
   b. Pour $n \geqslant 2$, montrer que $0 \leqslant x_n - x_{n-1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{n-1}$
   c. Pour $n \geqslant 2$, en déduire que $0 \leqslant x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   d. i. Pour $0 < x < 1$, montrer que $x \leqslant -\ln(1-x)$
      ii. Pour $k \geqslant 2$, en déduire que $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
      iii. Pour $n \geqslant 2$, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n-1)$
      iv. Pour $n \geqslant 2$, montrer que $n + 1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)$
      v. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exo II. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k! \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+1) k! \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$$

1. a. Pour $k \geqslant 1$, montrer que $(k+1)! - k! = k \times k!$
   b. En déduire l'expression de la somme W_n pour $n \geqslant 1$.
2. a. Pour $n \geqslant 1$, exprimer S_n en fonction de T_n et de W_n
   b. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $S_n = 2 + (n-2) \times (n+1)!$
   c. En déduire alors que

$$T_n = r_n \times (n+1)! \qquad (n \geqslant 1),$$

pour une expression r_n que l'on determinera en fonction de n

Exo III. Edhec E 2003.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0$
2. a. Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$.

   b. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

   On pose $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$
3. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$ de f
4. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

   b. En déduire le signe de f sur $\mathcal{D}f$
5. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0
6. Exprimer f' en fonction de g
7. Dresser le tableau de variations complet de f
8. a. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, vérifier que $f(x) - x = f(-x)$

   b. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^* *$

   c. L'équation $f(x) = x$ a t-elle des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$?
9. Représenter sur un même graphique la droite d'équation $y = x$ puis l'allure de f
10. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$

    a. Montrer que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

    b. Montrer que la suite u converge. On note ℓ sa limite.

    c. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 0$

Exo IV. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geqslant 0)$$

1. Pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$

   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2.

   b. En déduire que $v_n = 2^n - 1$ pour $n \geqslant 0$.

   Nous déterminons l'expression de u_n en fonction de n de deux façons différentes.
2. **Première méthode.** On pose $a_n = u_{n+1} - 2u_n$ pour $n \geqslant 0$

   a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2

   b. En déduire l'expression de a_n pour $n \in \mathbb{N}$

   c. En utilisant les questions 2b et 3b, déterminer alors l'expression de u_n en fonction de n
3. **Seconde méthode**

   a. Pour $n \geqslant 1$, vérifier que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0$

   b. Retrouver alors l'expression de u_n en fonction de n