CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I. On fixe $x_0 \in]1, +\infty[$ et on pose

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \qquad (n \geqslant 0)$$

1. L'application $f : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x-1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \qquad (x > 1).$$
Pour $x > 1$, nous remarquons que
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 1 - \tfrac{1}{(x-1)^2} = 0 \\ &\iff \tfrac{1}{(x-1)^2} = 1 \\ &\iff (x-1)^2 = 1 \\ &\iff x - 1 = 1 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$
Par ailleurs, $f'(x)$ tend vers 1 en $+\infty$ et vers $-\infty$ en 1^+ de sorte que (je ne dessine pas les TAB de VAR, c'est trop pénible à dactylographier, mais je le décris) : $f'(x) < 0$ pour $1 < x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $2 < x$. A fortiori, f décroit strictement sur]1,2], de $+\infty$ à $f(2) = 4$, et croit strictement sur $[2, +\infty[$, de 4 à $+\infty$ de
2. Etude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition
   $$P_n : \qquad x_n \text{ EST BIEN DÉFINI ET } x_n > 0$$
   - P_0 est vraie car x_0 est fixé par l'énoncé dans $]1, +\infty[$.
   - Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1}.
     Comme f est définie sur $]1, +\infty[$, qui contient x_n d'après $\mathcal{P}_n$, le nombre $f(x_n) = x_{n+1}$ est bien défini. Comme f ne prend que des valeurs dans $[4, +\infty[$ d'après le résultat de la question précédente, nous avons de plus que $x_{n+1} = f(x_n) \geqslant 4 > 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

   En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

   b. Pour $n \geqslant 0$, nous remarquons que $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = 1 + \frac{1}{x_n - 1} > 0$ car $x_n > 1$. En particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

   c. Montrer par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Supposons que la suite (x_n) converge, vers une limite finie ℓ. Comme la suite u est croissante et comme $u_n \geqslant u_0$, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, il vient $\ell \geqslant u_0 > 1$ Par passage à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ (et par continuité de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$), nous obtenons alors que
   $$\ell = f(\ell) = \ell + 1 + \frac{1}{\ell - 1}$$
   En particulier, $0 = 1 + \frac{1}{\ell - 1} > 0$ ce qui est impossible. En conclusion, la suite (x_n) ne peut pas converger vers une limite finie, et comme c'est une suite croissante, elle diverge nécéssairement vers $+\infty$.
3. Etude de la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad x_n \geqslant n+1$$

- P_0 est vraie car $x_0 > 1$ de sorte que $x_0 \geqslant 0+1$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} Comme $x_n \geqslant n+1$ d'après $\mathcal{P}_n$, nous remarquons que

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \geqslant n+1+\frac{1}{x_n-1} \geqslant n+1$$

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour $n \geqslant 2$, nous déduisons de l'inégalité précédente que

$$x_n - x_{n-1} - 1 = x_{n-1} + 1 + \frac{1}{x_{n-1}-1} - x_{n-1} - 1 = \frac{1}{x_{n-1}-1}$$

Comme $x_{n-1} \geqslant n-1+1 = n > 0$, il vient

$$0 \leqslant x_n - x_{n-1} - 1 = \frac{1}{x_{n-1}-1} \leqslant \frac{1}{n-1}$$

c. En sommant cette inégalité pour $2 \leqslant k \leqslant n$, il résulte du principe des sommes télescopiques que

$$\begin{array}{lll} \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1} - 1) & = \sum_{k=2}^{n} x_k - \sum_{k=2}^{n} x_{k-1} - \sum_{k=2}^{n} 1 & \\ & = \sum_{k=2}^{n} x_k - \sum_{k'=1}^{n-1} x_{k'} - (n-1) & \text{CDI } k' = k-1 \\ & = \sum_{k=2}^{n-1} x_k + x_n - \left(x_1 + \sum_{k'=2}^{n-1} x_{k'}\right) - (n-1) & \text{Chasles} \\ & = x_n - x_1 - (n-1) \qquad (n \geqslant 2) & \end{array}$$

Mais nous déduisons également de l'inégalité du 3b que

$$0 = \sum_{k=2}^{n} 0 \leqslant \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1} - 1) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{1}{k'} \qquad \text{CDI k'=k-1}$$

En particulier, pour $n \geqslant 2$, nous obtenons que $0 \leqslant x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

d. i. Pour $0 < x < 1$, la fonction $h : x \mapsto x + \ln(1-x)$ est dérivable de dérivée

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} < 0$$

En particulier, h est décroissante et vérifie $f(0) = 0$ De sorte que h est négative sur]0,1[. A fortiori, on a $x \leqslant -\ln(1-x)$ pour $0 < x < 1$.

ii. Pour $k \geqslant 2$, l'inégalité précédente pour $x = \frac{1}{k} \in]0,1[$ donne que

$$\frac{1}{k} = x \leqslant -\ln(1-x) = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln(k) - \ln(k-1)$$

iii. Soit $n \geqslant 2$. En somant l'inégalité précédente de $k = 2$ à $n-1$, nous déduisons encore du principe des sommes télescopiques que

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} & \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}(\ln(k) - \ln(k-1)) \\ & \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k-1) \\ & \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k'=1}^{n-2} \ln(k') \qquad \text{CDI } k' = k-1 \\ & \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \ln(k) + \ln(n-1) - \left(\ln(1) + \sum_{k'=2}^{n-2} \ln(k')\right) \\ & \leqslant \ln(n-1) \end{array}$$

En particulier, en ajoutant 1, nous concluons que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln(n-1)\qquad (n\geqslant 2)$$

iv. Pour $n\geqslant 2$, il résulte alors des l'inégalité établie au 3c et au 3diii que

$$0\leqslant x_n-x_1-(n-1)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln(n-1)$$

En particulier, comme $x_1=f(x_0)\geqslant 4$, on a

$$n+1\leqslant x_1+n-1\leqslant x_n\leqslant x_1+(n-1)+1+\ln(n-1)=x_1+n+\ln(n-1)\qquad (n\geqslant 2)$$

v. En divisant par n, nous obtenons que

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant\frac{x_1}{n}+1+\frac{\ln(n-1)}{n}\qquad (n\geqslant 2)$$

Comme le théorème de croissance comparée induite que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n-1)}{n}=0$, et comme le membre de gauche et de droite tendent vers 1, il résulte du principe des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}=1$

Exo II. Pour $n\geqslant 1$, on pose

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2k!\qquad T_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!\quad\text{ et }\quad W_n=\sum_{k=1}^{n}k\times k!$$

1. a. Pour $k\geqslant 1$, on remarque que $(k+1)!-k!=(k+)\times k!-k!=\big((k+1)-1\big)\times k!=k\times k!$

   b. En reportant dans l'expression de W_n, il résulte du principe des sommes télescopiques que

$$\begin{array}{ll} W_n & =\sum_{k=1}^{n}k\times k!=\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)!-k!\big)\\ & =\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!\\ & =\sum_{k'=2}^{n+1}k'!-\sum_{k=1}^{n}k!\qquad \text{CDI } k'=k+1\\ & =\sum_{k'=2}^{n}k'!+(n+1)!-\big(1!+\sum_{k=2}^{n}k!\big)\qquad \text{Chasles}\\ & =(n+1)!-1\qquad (n\geqslant 1)\end{array}$$

2. a. Pour $n\geqslant 1$, nous remarquons que

$$\begin{array}{ll} S_n & =\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2k!\\ & =\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)k!\\ & =\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!-2\sum_{k=1}^{n}k\times k!\\ & =T_n-2W_n\qquad (n\geqslant 1)\end{array}$$

   b. Pour $n\geqslant 1$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n:\qquad S_n=2+(n-2)\times(n+1)!$$

- P_1 est vraie car $S_1 = \sum_{k=1}^{1}(k-1)^2 k! = (1-1)^2 1! = 0 = 2 + (0-2) \times 1!$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons P_{n+1} Nous déduisons de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^2 k! \\ &= 2 + (n-2) \times (n+1)! + n^2(n+1)! \\ &= 2 + \big((n-2) + n^2\big) \times (n+1)! \\ &= 2 + (n+2)(n-1) \times (n+1)! \\ &= 2 + (n-1) \times (n+2)! \end{aligned}$$

En particulier $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \geqslant 1$.

c. En reportant les expressions du 1b et du 2b dans la relation trouvée au 2a, il vient alors

$$T_n = S_n + 2W_n = 2 + (n-2) \times (n+1)! + 2\left((n+1)! - 1\right) = (n-2+2) \times (n+1)! = n \times (n+1)! \qquad (n \geqslant$$

Pour $n \geqslant 1$, on a alors $T_n = r_n \times (n+1)!$ avec $r_n = n$.

Exo III. Edhec E 2003.

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0. A fortiori, $\mathrm{e}^x - 1$ est strictement négatif sur $]-\infty, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, a fortiori, on a $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0$
2. a. La fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Comme cette dérivée est du signe de x, la fonction g décroît strictement sur $]-\infty, 0]$ de 1 à $g(0) = 0$, puis elle croît strictement sur $[0, +\infty[$ de 0 à $+\infty$.

b. En particulier, $g(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^*$ et nul en 0.

On pose $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$

3. Nous déduisons de l'inégalité établie en 1 que

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}f &\iff x \neq 0 \text{ et } \tfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0 \\ x \in \mathcal{D}f &\iff x \neq 0 \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$.

4. a. Nous remarquons que la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée

$$h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

est du signe de x (car l'exponentielle est strictement croissante et $\mathrm{e}^0 = 1$). A fortiori, h décroit sur $]-\infty, 0]$, de $+\infty$ à $g(0) = 0$ et croît sur $[0, +\infty[$, de 0 à $+\infty$ A fortiori, la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$, de sorte que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour $x \in \mathbb{R}$

b. D'après l'inégalité précédente, lorsque x est strictement positif, on a

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \geqslant \frac{x+1-1}{x} = 1$$

De sorte que $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) \geqslant \ln(1) = 0$ Lorsque x est strictement négatif, on a $0 > \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 1 + x - 1 = x$ De sorte que

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

A fortiori, $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) \leqslant \ln(1) = 0$

5. Comme $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}(1 - \mathrm{e}^{-x})\right)$, il résulte du théorème de croissance compa-réeque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0$ puis que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 0^+$, nous remarquons que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Enfin (plus difficile), il résulte de la définition dun nombre dérivé en 0 de l'exponentielle que

$$1 = exp'(0) = \lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

De sorte que l'on a, par continuité du logarithme en 0, $\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}} f(x) = 1$

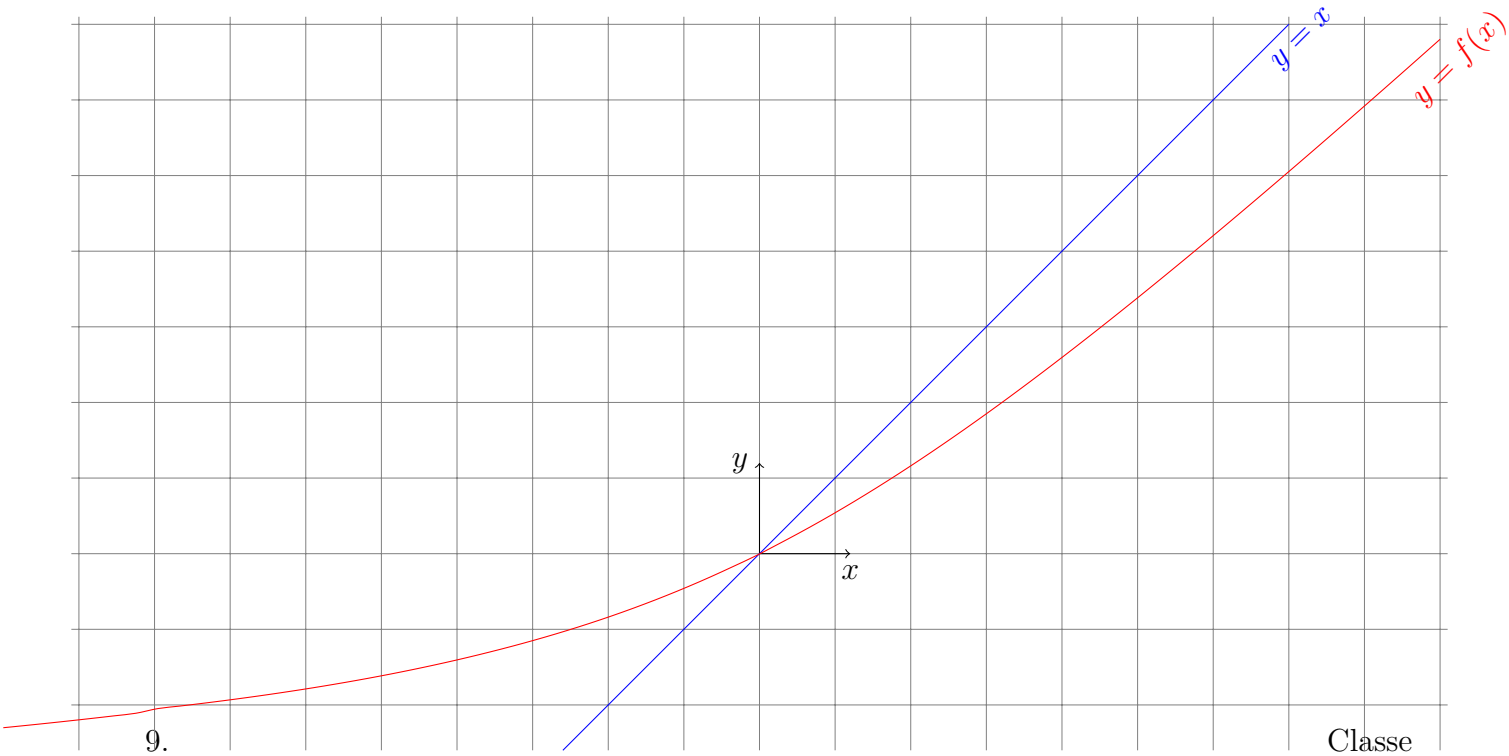
6. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)' \times \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}} \\ &= \frac{x\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \\ &= \frac{g(x)}{x(\mathrm{e}^x-1)} \qquad (x \in \mathbb{R}^*) \end{aligned}$$

7. La fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$ de sorte que $f'(x)$ est du signe de $x(\mathrm{e}^x - 1)$, qui est toujours positif. c'est à dire $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ A fortiori, f croît sur $]-\infty, 0[$, de $-\infty$ à 0, puis f croit sur $]0,1[$, de 0 à $f(1) = \ln(\mathrm{e} - 1) \in]0,1[$, puis f croît sur $[1, +\infty[$, de $\ln(\mathrm{e} - 1)$ à $+\infty$.
8. a. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, nous déduisons des propriétés du logarithme et de l'exponentielle que

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) - \ln(\mathrm{e}^x) \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x}\right) = \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \\ &= f(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}^*) \end{aligned}$$

   b. Sur $\mathbb{R}_+^*$, le nombre $f(x)-x$ à le signe de $f(-x)$ d'après la relation précédente. En particulier $f(x) - x < 0$ pour $x > 0$.
   c. L'équation $f(x) = x$ ne peut pas avoir de solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le résultat précédent.



9. Classe

mon dessin... (mais il faut faire figurer l'allure (les branches infinies) en $-\infty$ (asymptote horizontale) et en $+\infty$ (asymptote oblique)

10. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : u_n > 0$$

- P_0 est vraie car $x_0 > 0$ d'après l'énoncé
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} Comme u_n est strictement positif d'après $\mathcal{P}_n$ et comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}+^*$, nous remarquons que $u_{n+1} = f(u_n) > 0$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Comme $u_n > 0$ et comme $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0$ d'après le résultat de la question 8b. Nous remarquons que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. A fortiori, elle converge vers une limite finie ℓ.

c. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons que $\ell \neq 0$. Alors, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, nous obtenons que $\ell = f(\ell)$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = \ln\left(\tfrac{\mathrm{e}^\ell - 1}{\ell}\right) \\ \iff \mathrm{e}^\ell &= \tfrac{\mathrm{e}^\ell - 1}{\ell} \\ \iff \ell\mathrm{e}^\ell &= \mathrm{e}^\ell - 1 \\ \iff \ell\mathrm{e}^\ell - \mathrm{e}^\ell + 1 &= 0 \\ \iff g(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

Or la fonction g ne s'annule qu'en 0 donc $\ell = 0$, ce qui est impossible. Nous avons donc bien montré que $\ell = 0$.

Exo IV. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 =$ é et

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geqslant 0)$$

1. Pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$
   a. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ v_{n+2} &= u_{n+3} - u_{n+2} \qquad (n \geqslant 0). \end{aligned}$$

   Nous observons d'abord que

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \iff u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0 \qquad (n \geqslant 0)$$

   Puis que

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n \qquad (n \geqslant 0)$$

   De sorte que la suite (v_n) satisfait la récurrence linéaire d'ordre 2.

$$v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0 \qquad (n \geqslant 0)$$

   b. Comme le polynôme caractéristique associé à la récurrence linéaire précédente est

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2),$$

   qui admet les racines distinctes 1 et 2, nous remarqons qu'il existe un unique couple de nombres réels (λ,μ) tel que

$$v_n = \lambda 1^n + \mu 2^n = \lambda + \mu 2^n \qquad (n \geqslant 0).$$

   Comme $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 1 = 0$ et comme $v_1 = u_2 - u_1 = 2 - 1 = 1$, nous observons que

$$\begin{cases} 0 &= v_0 = \lambda + \mu \\ 1 &= v_1 = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

   Ce système admet pour unique solution $\mu = 1$ et $\lambda = -1$ de sorte que

$$v_n = -1 + 2^n \qquad (n \geqslant 0).$$

2. **Première méthode.**
   a. Nous procédons de même qu'en 1a en remarquant que

$$\begin{aligned} a_n &= u_{n+1} - 2u_n \\ a_{n+1} &= u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ a_{n+2} &= u_{n+3} - 2u_{n+2} \qquad (n \geqslant 0). \end{aligned}$$

   Et nous observons aussi que

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \qquad (n \geqslant 0)$$

   De sorte que la suite (a_n) satisfait la récurrence linéaire d'ordre 2.

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n \geqslant 0).$$

b. Nous procédons de la même façon qu'en 1b. Comme le polynôme caractéristique associé à la récurrence linéaire précédente est

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2,$$

qui admet la racine double 1, nous remarqons qu'il existe un unique couple de nombres réels (λ,μ) tel que

$$a_n = \lambda 1^n + \mu n 1^n = \lambda + \mu n \qquad (n \geqslant 0).$$

Comme $a_0 = u_1 - 2u_0 = 1 - 2 = -1$ et comme $v_1 = u_2 - 2u_1 = 2 - 2 = 0$, nous observons que

$$\begin{cases} -1 & = a_0 = \lambda \\ 0 & = a_1 = \lambda - \mu \end{cases}$$

Ce système admet pour unique solution $\mu = -1$ et $\lambda = -1$ de sorte que

$$a_n = -1 - n \qquad (n \geqslant 0).$$

c. Comme $v_n = u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$ et comme $a_n = u_{n+1} - 2u_n = -1 - n$, nous remarquons que

$$u_n = (u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1} - 2u_n) = v_n - a_n = 2^n - 1 - (-n-1) = 2^n - 1 + n + 1 = 2^n + n \qquad (n \geqslant 0)$$

3. **Seconde méthode**

a. Pour $n \geqslant 1$, nous déduiosons du principe des sommes télescopiques que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k'=1}^{n} u_{k'} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= u_n - u_0 \end{aligned}$$

En particulier, on a bien $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0$

b. En injectant le résultat de 1b dans la somme précédente, nous obtenons une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^k - 1\right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{2^0 - 2^n}{1-2} + n \\ &= 1 + \frac{1-2^n}{-1} + n \\ &= n + 1 - (1 - 2^n) \\ &= n + 2^n \qquad (n \geqslant 0) \end{aligned}$$