DEVOIR SURVEILLE 2

On pourra utiliser que $\ln(1+x) = x - \dfrac{\alpha(x)}{2x^2}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 1$

Exo I. Sophie est étudiante en Pharmacie et doit réviser des examens dans les matières suivantes : Cancérologie (C), Dermatologie (D), Immunologie (I) et Rhumatologie (R) ; chacune de ces quatre matières se décompose en quatre thèmes : Sémiologie (S), Chimie thérapeutique (Ch), Pharmacologie (P) et Toxicologie (T). *Les lettres entre parenthèses seront utilisées pour décrire les matières et thèmes.*

1. Le premier jour, Sophie décide de faire un planning de 10 séquences d'une heure de travail ; par exemple Sémiologie en Cancérologie de 8h à 9h, puis Toxicologie en Rhumatologie de 9h à 10h, etc. Quel que soit le planning, la contrainte est de ne jamais étudier deux fois le même thème dans la même matière.
   a. Combien y a-t-il de plannings possibles pour cette journée ?
   b. Combien y a-t-il de plannings possibles pour cette journée en étudiant exactement deux fois de la Toxicologie dans la journée ?
   c. Combien y a-t-il de plannings possibles pour cette journée en étudiant au moins une fois dans la journée de la Sémiologie ?
2. Le deuxième jour, Sophie décide de se focaliser sur cinq objectifs **différents** seulement ; par exemple Toxicologie dans les quatre matières et Chimie thérapeutique en Immunologie.
   a. Combien a-t-elle de possibilités ?
   b. Combien a-t-elle de possibilités en choisissant au moins une fois Pharmacologie ou Sémiologie ?
   c. Combien a-t-elle de possibilités en choisissant au moins une fois Pharmacologie et au moins une fois Cancérologie ?

Exo II. **Inspiré d'HEC E 2003 et d'EML S 99**. On pose $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera D
2. f se prolonge t-elle par continuité en 1 ?
3. Etudier la limite de f en $-\infty$. Interpréter.
4. Montrer que f est continue sur D (*commencer par* D^*)
5. Montrer que f est dérivable sur D (*en* 0*, faire la limite du taux d'accroissement*)
6. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D^*$
7. Etudier le signe de la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$ pour $x < 1$.
8. Dresser le tableau de variation de f
9. Dessiner la courbe de f, en précisant les asymptotes et la tangente à l'origine

Exo III. Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exo IV.
1. Combien existe t-il d'anagrammes du mot COCACOLA (sans accent, ni espace) ?
2. Combien y'en a t-il qui commencent par un O ?
3. Combien y'en a t-il qui sont tels que toutes les voyelles sont côte à côte ?

Exo V. Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \qquad (n \geqslant 0)$$

1. Pour $n \geqslant 0$, montrer que u_n est défini et que $u_n \geqslant 1$
2. Si la suite (u_n) converge, montrer qu'elle converge vers 4.
3. On pose $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ pour $n \geqslant 0$
   a. Montrer que (u_n) converge si (v_n) converge vers 0.
   b. Pour $n \geqslant 0$, vérifier que $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$ et en déduire que
   $$|v_{n+2}| \leqslant \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{3} \qquad (n \geqslant 0)$$
   c. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et
   $$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{3} \qquad (n \geqslant 0)$$
   Pour $n \geqslant 0$, prouver que $|v_n| \leqslant x_n$.
   d. Montrer que la suite (x_n) tends vers 0 (*trouver une formule pour* x_n)
   e. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exo VI. A chaque suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \qquad (n \geqslant 1).$$

1. **Deux premiers exemples**
   a. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n = a$ pour $n \geqslant 1$. Calculer v_n pour $n \geqslant 1$.
   b. On suppose que $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Calculer v_n pour $n \geqslant 1$.
2. **Un troisième exemple.** On suppose que $u_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant 1$.
   a. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = n$.
   b. Pour $n \geqslant 1$, en déduire les expressions de v_{2n} et de v_{2n+1} en fonction de n.
   c. Déterminer les limites des suites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$
   d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. **Un quatrième exemple.** On suppose que $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ pour $n \geqslant 1$.
   a. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, établir que $0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant \mathrm{e}x$.
   b. Pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, vérifier que $0 \leqslant k\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - k \leqslant \mathrm{e}$ puis montrer que
   $$0 \leqslant v_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

c. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et donner sa limite.

4. **Une solution plus générale.** On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à valeurs positives.

   a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

   b. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$

   c. Pour $n \geqslant 1$, en déduire que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

   d. Pour $n \geqslant 1$, montrer par ailleurs que $v_n \geqslant \frac{u_n}{2}$.

   e. En déduire alors que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge. On note ℓ' sa limite.

   f. Pour $n \geqslant 1$, montrer que

$$v_{2n} = \frac{n(n+1)v_n}{2n(2n+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)}v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)}u_{n+1}$$

   g. Conclure alors que $\ell' = \frac{\ell}{2}$.

Exo VII. Scilab.

1. Ecrire un programme qui demande un nombre entier n et qui affiche
   - « US Presidents » si $n < 2016$
   - « Lies and tweets » si $2016 \leqslant n < 2020$
   - « kick in the nuts » si $n = 2020$
   - « Lock him up ! » si $n > 2020$
2. Ecrire un programme qui demande un entier n et affiche la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$
3. Ecrire une fonction qui demande un entier n et qui affiche le terme u_n de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = nu_n + 3$ pour $n \geqslant 0$