

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 2

Exo I.

1. a. Il y a autant de plannings possibles pour cette journée que de 10-listes sans répétition choisis parmi les 16 thèmes (4 matières divisées en 4 thèmes (c'est mal énoncé)). Il y en a donc

$$A_{16}^{10}$$

- b. On choisit la position des deux Toxologies, cela fait $\binom{10}{2}$. On choisit les deux matières qui vont avec, il y en a autant que de 2-liste sans répétition choisies parmi les 4 matières, c'est-à-dire A_4^2 . Puis, sur les 8 autres tranches horaires, on choisit 8 couple (matière-thème) différents parmi les 12 possibles (il ne faut plus de Toxico). Au final, le nombre de plannings possibles est

$$\binom{10}{2} \times A_4^2 \times A_{12}^8$$

- c. On procède par complémentaire, en enlevant à toutes les configurations (trouvé en 1a) le nombre de planning sans Sémiologie, égal au nombre de 10 listes sans répétition choisis parmi les couples sans Sémiologie. Il y en a au total

$$A_{16}^{10} - A_{12}^{10}$$

2. a. Attention, vu l'exemple, il n'y a pas d'ordre dans les configurations qui les intéressent. On choisit donc 5 objectifs parmi les 16 possibles, il y en a

$$\binom{16}{5}$$

- b. On procède par le complémentaire en retirant à tous les choix de 5 objectifs possible, c'est à dire $\binom{16}{5}$, le nombre de choix sans Pharmacologie et sans Sémiologie, c'est à dire $\binom{8}{5}$. Il y en a donc

$$\binom{16}{5} - \binom{8}{5}$$

- c. On procède par le complémentaire en enlevant les configurations avec aucun des deux $\binom{4}{3} \times \binom{4}{3}$ en enlevant les configuration sans P mais avec C, $\binom{9}{5}$ et les configurations sans C avec P, $\binom{4}{1} \binom{8}{3}$. Au total, il y en a

$$\binom{9}{5} - \binom{8}{5} - 2 \times \binom{4}{1} \binom{8}{3}$$

Exo II. Inspiré d'HEC E 2003 et d'EML S 99.

1. On a $D =] - \infty, 1[$ car

$$\begin{aligned} x \in D &\iff x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } 1 - x > 0) \\ &\iff x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } 1 > x) \\ &\iff x < 1 \iff x \in] - \infty, 1[\end{aligned}$$

2. Comme $\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty$, la fonction f ne se prolonge pas par continuité en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\ln(1-x)}{x} = +\infty$$

3. Lorsque x tends vers $-\infty$, on remarque que

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

Or, il résulte du théorème de croissance comparée que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0$. A fortiori, la fonction f converge vers 0. La courbe de la fonction f présente une demie-asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$

4. L'application $x \mapsto 1-x$ est continue sur D^* en tant que polynôme, à valeurs dans $]0, +\infty[$. Or l'application $u \mapsto \ln(u)$ est continue sur $]0, +\infty[$. A fortiori, la composée $x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur D^* . Comme $x \mapsto -x$ est continue et ne s'annule pas sur D^* , la fonction f est continue sur D^* . En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Par ailleurs, lorsque $x \rightarrow 0$ en étant non nul, nous remarquons que

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{-x - \frac{\alpha(-x)x^2}{2}}{x} = 1 + \frac{\alpha(-x)x}{2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 1$, il vient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0, comme elle l'est également sur D^* , elle est continue sur D .

5. L'application $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur D^* en tant que polynôme, à valeurs dans $]0, +\infty[$. Or l'application $u \mapsto \ln(u)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. A fortiori, la composée $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur D^* . Comme $x \mapsto -x$ est dérivable et ne s'annule pas sur D^* , la fonction f est dérivable sur D^* . En tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Par ailleurs, lorsque $x \rightarrow 0$ en étant non nul, nous remarquons que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 + \frac{\alpha(-x)x}{2} - 1}{x} = \frac{\alpha(-x)}{2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 1$, il vient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$. De sorte que f est dérivable en 0, de dérivée $\frac{1}{2}$. En conclusion f est dérivable sur D .

6. Pour $x \in D^*$, on a

$$f'(x) = -\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)' = -\frac{-\frac{1}{1-x} \times x - 1 \times \ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right)$$

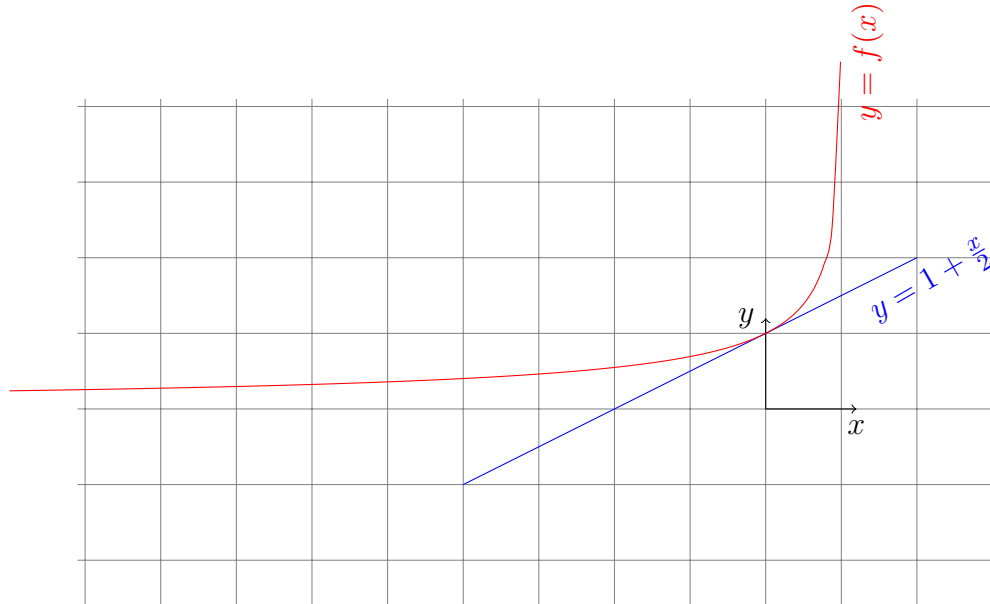
7. La fonction g est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et vérifie

$$g'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (-1) \times x}{(1-x)^2} - 1 \times \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

En particulier $g'(x)$ est strictement négative sur $] -\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, 1[$. de sorte que g décroît strictement sur $] -\infty, 0[$ et croît strictement sur $]0, 1[$.

$[0,1[$. Comme $g(0) = 0 + \ln(1) = 0$ nous en déduisons que $g(x)$ est strictement positif sur D^* et nul en 0

8. Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, nous remarquons que $f'(x)$ est strictement positive sur D^* et également en 0 car $f'(0) = \frac{1}{2}$. De sorte que la fonction f est strictement croissante sur D . Je ne dessine pas le TAB de VAR, comme d'hab, mais toutes les infos ont été données
9. Dessiner la courbe de f , en précisant les asymptotes et la tangente à l'origine



Exo III. Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes et donc $800 - 300 = 500$ sont des femmes. 352 sont membres d'un syndicat donc $800 - 352 = 448$ sont non syndiqués. et 188 sont des hommes syndiqués donc il y a $352 - 188 = 164$ femmes syndiquées et $500 - 164 = 336$ femmes non syndiquées ($\text{card } F \cap N = 336$). 424 sont mariés donc il y a $800 - 424 = 376$ célibataires. et 166 sont des hommes mariés donc $424 - 166 = 258$ femmes sont mariées alors que $500 - 258 = 242$ femmes sont célibataires. 208 sont syndiqués et mariés et 144 sont des hommes mariés syndiqués donc il y a $208 - 144 = 64$ femmes syndiquées et mariées d'où $258 - 64 = 194$ femmes mariées non syndiquées Et en conclusion $336 - 194 = 142$ femmes célibataires non syndiquées

Exo IV. 1. Pour fabriquer un anagramme de COCACOLA, on écrit un mot de 8 lettres choisies parmi OOAACCCL. On choisit la position des O dans le mot $\binom{8}{2}$ puis la position des A $\binom{6}{2}$ puis la position des C $\binom{4}{3}$ et pour le L, il n'y a plus le choix Au total, cela en fait

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{3}$$

2. On commence par écrire un O à la première place, puis on choisit la position du deuxième O dans le mot $\binom{7}{1}$ puis la position des A $\binom{6}{2}$ puis la position des C $\binom{4}{3}$ et pour le L, il n'y a plus le choix

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{3}$$

3. Les voyelles prennent 4 places consécutives, on commence par choisir la place de la voyelle la plus à gauche parmi 5 possibilités (c'est comme si les 4 voyelles ne formaient qu'un seul gros symbole) $\binom{5}{1}$ puis on choisit la position des O dans les 4 places consécutives $\binom{4}{2}$, on écrit les A (pas le choix) puis on choisit la place des C ($\binom{4}{3}$). Au total, cela en fait

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{3}$$

Exo V. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : u_n \text{ est défini et } u_n \geq 1$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = a \geq 1$, $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1 = b \geq 1$
- Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ pour un entier $n \geq 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+2}$. Comme u_n et u_{n+1} sont définis et dans $[1, +\infty[$ d'après $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ les racines sont définies et on a

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geq 1$$

A fortiori, $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Supposons que la suite (u_n) converge vers un nombre ℓ . Comme $u_n \geq 1$, il résulte de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que $\ell \geq 1$. Et en passant à la limite dans la relation $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$, nous déduisons de la continuité de la racine en ℓ que

$$\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell} = 2\sqrt{\ell}$$

En particulier $\ell^2 = 4\ell$ et donc $\ell = 4$ car $\ell \geq 1$. De sorte que (u_n) converge vers $\ell = 4$.

3. On pose $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ pour $n \geq 0$

- a. Si (v_n) converge vers 0, nous déduisons de la relation $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ que

$$u_n = (2(1 + v_n))^2 = 4(1 + v_n)^2$$

Et par produit des limites que u_n converge vers 4

- b. Pour $n \geq 0$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} \\ \iff v_{n+2} \times 2(2 + v_{n+2}) &= v_{n+1} + v_n \\ \iff \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right) \times 2(2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right)) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1\right) \\ \iff (\sqrt{u_{n+2}} - 2) \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} + 1\right) &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) - 2 \\ \iff \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+2}} - 2)(\sqrt{u_{n+2}} + 2) &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) - 2 \\ \iff \frac{1}{2}(u_{n+2} - 4) &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) - 2 \\ \iff n + 2 &= \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \\ \iff \text{Vrai} \end{aligned}$$

En particulier, nous avons bien $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$. En prenant la valeur absolue, nous déduisons de la relation $u_n \geq 1$, qui induit que $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \geq \frac{1}{2}\sqrt{1} - 1 = -\frac{1}{2}$, et des inégalités triangulaires que

$$\begin{aligned} |v_{n+2}| &= \left| \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} \right| \\ &= \frac{|v_{n+1} + v_n|}{2|2 + v_{n+2}|} \\ &\leq \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{2(2 - \frac{1}{2})} \\ &\leq \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{3} \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : |v_n| \leq x_n$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $x_0 = |v_0| \leq |v_0|$ et $\mathcal{P}_1$ est vraie car $x_1 = |v_1| \leq |v_1|$.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ pour un entier $n \geq 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+2}$. D'après $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ et le résultat de la question précédente, il vient

$$|v_{n+2}| \leq \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{3} \leq \frac{x_{n+1} + x_n}{3} = x_{n+2}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

d. La suite (x_n) satisfait une récurrence linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{X}{3} - \frac{1}{3} &= \left(X - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{3} \\ &= \left(X - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6^2} - \frac{12}{36} \\ &= \left(X - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{6^2} \\ &= \left(\frac{X - \frac{1}{6} - \sqrt{13}}{6}\right) \left(\frac{X - \frac{1}{6} + \sqrt{13}}{6}\right) \end{aligned}$$

Comme les racines de ce polynôme sont $s = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $z = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$, il existe un unique couple de nombres réels (λ, μ) tel que

$$x_n = \lambda s^n + \mu z^n \quad (n \geq 0)$$

Comme $3 \leq \sqrt{13} \leq 4$, nous remarquons que s et z appartiennent à $] -1, 1[$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s^n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} z^n$. A fortiori, nous concluons que (x_n) tend vers 0. D'après les résultats des questions 3a et 2, nous en déduisons alors que la suite (u_n) converge et que sa limite est 4.

Exo VI. A chaque suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, on associe la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k \quad (n \geq 1).$$

1. Deux premiers exemples

- a. En remplaçant dans la formule, nous obtenons une somme arithmétique, de sorte que

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ka = \frac{1}{n(n+1)} \times n \times \frac{a+na}{2} = \frac{1}{n(n+1)} \times n \times a \frac{1+n}{2} = \frac{a}{2} \quad (n \geq 1)$$

- b. En remplaçant dans la formule, nous obtenons une somme arithmétique, de sorte que

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k} = \frac{1}{n(n+1)} \times n \times \frac{1+1}{2} = \frac{1}{n(n+1)} \times n = \frac{1}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

2. **Un troisième exemple.** On suppose que $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$.

- a. Pour $n \geq 1$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \quad \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = n$$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $\sum_{k=1}^2 k(-1)^k = 1(-1) + 2(-1)^2 = 2 - 1 = 1$
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geq 1$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Nous déduisons de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2(n+1)} k(-1)^k &= \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k + (2n+1)(-1)^{2n+1} + (2n+2)(-1)^{2n+2} \\ &= n - (2n+1) + (n+2) = n+1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, montrer

que $\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = n$.

- b. Pour $n \geq 1$, nous déduisons du résultat précédent que

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = \frac{1}{2n(2n+1)} \times n = \frac{1}{2(2n+1)} \\ v_{2n+1} &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sum_{k=1}^{2n+1} k(-1)^k \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \left(\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k + (2n+1)(-1)^{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} (n - (2n+1)) \\ &= -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} (n+1) = \frac{-1}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

- c. En particulier, les suites $(v_{2n})_{n \geq 1}$ et $(v_{2n+1})_{n \geq 0}$ convergent toutes les deux vers 0
- d. Comme les suites $(v_{2n})_{n \geq 1}$ et $(v_{2n+1})_{n \geq 0}$ convergent vers la même limite nulle, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente également vers cette même limite, c'est-à-dire vers 0.

3. **Un quatrième exemple.** On suppose que $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ pour $n \geq 1$.
- a. Comme la fonction exponentielle est croissante, pour $0 \leq x \leq 1$, nous remarquons que

$$0 = e^0 - 1 \leq e^x - 1.$$

Comme la fonction $f(x) = e^x - 1 - ex$ est dérivable, de dérivée $f'(x) = e^x - e \leq 0$ sur $[0,1]$, cette fonction est décroissante sur $[0,1]$ et vérifie $f(0) = 0$ de sorte qu'elle est négative sur $[0,1]$. En particulier, on a $f(x) \leq 0$ et donc $e^x - 1 \leq ex$

- b. Pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$, nous appliquons l'inégalité précédente à $x = \frac{1}{k} \in [0,1]$ pour obtenir que

$$0 \leq e^{\frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{e}{k}$$

En multipliant par $k \geq 1$, il vient alors que

$$0 \leq ke^{\frac{1}{k}} - k \leq e$$

A fortiori, comme $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ d'après les sommes arithmétiques, nous observons que

$$\begin{aligned} v_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ke^{\frac{1}{k}} - \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ke^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \left(ke^{\frac{1}{k}} - k \right) \end{aligned}$$

En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente, il vient

$$0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n 0 \leq v_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n e = \frac{1}{n(n+1)} ne = \frac{e}{n+1}$$

- c. Comme les termes de gauche et de droite dans l'inégalité précédente tendent vers 0, il résulte alors du principe des gendarmes que la suite $(v_n - \frac{1}{2})_{n \geq 0}$ tend vers 0. A fortiori, la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.
4. **Une solution plus générale.** On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante à valeurs positives.
- a. Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge.
- b. Pour $n \geq 1$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
(n+2)v_{n+1} &= (n+2) \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} ku_k \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} ku_k \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^n ku_k + (n+1)u_{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n ku_k + u_{n+1} \\
&= n \times \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_k + u_{n+1} \\
&= nv_n + u_{n+1} \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

c. Pour $n \geq 1$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
(n+2)v_{n+1} &= nv_n + u_{n+1} && \iff nv_{n+1} + 2v_{n+1} = nv_n + u_{n+1} \\
\iff nv_{n+1} - nv_n &= u_{n+1} - 2v_{n+1} \\
\iff v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2v_{n+1})
\end{aligned}$$

A fortiori, nous déduisons du résultat précédent que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

d. Pour $n \geq 1$, nous minorons u_k par u_n pour $1 \leq k \leq n$ pour déduire de la définition de v_n que

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_k \\
&\geq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_n \\
&\geq u_n \times \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \\
&\geq u_n \times \frac{1}{n(n+1)} \times n \frac{n+1}{2} \\
&\geq \frac{u_n}{2} \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

e. Il résulte des résultats précédents que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2v_{n+1}) \leq \frac{1}{n} \left(u_{n+1} - 2 \frac{u_{n+1}}{2} \right) = 0$$

En particulier, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0 d'après sa définition et le fait que la suite (u_n) est à valeurs positives, la suite (v_n) converge

f. Pour $n \geq 1$, il résulte de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} k u_k \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^n k u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \right) \\
&= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \right)
\end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) est décroissante, nous pouvons alors majorer u_k par u_{n+1} pour $n+1 \leq k \leq 2n$ de sorte que montrer que

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \right) \\
&\leq \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} k u_{n+1} \right) \\
&\leq \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} k \right) \\
&\leq \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + u_{n+1} n \frac{n+1+2n}{2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + u_{n+1} n \frac{3n+1}{2} \right) \\
&\leq \frac{(n+1)v_n}{2(2n+1)} + u_{n+1} \frac{3n+1}{4(2n+1)}
\end{aligned}$$

- g. En faisant tendre n vers $+\infty$, il résulte alors de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que

$$\ell' \leq \frac{\ell'}{4} + \ell \frac{3}{8}$$

De sorte que l'on obtient que $\ell' \leq \frac{\ell}{2}$ Et en procédant de même dans l'inégalité $v_n \geq \frac{u_n}{2}$, on obtient que $\ell' \geq \frac{\ell}{2}$ de sorte que $\ell' = \frac{\ell}{2}$.

Exo VII. Scilab.

1.

```

n = input("ton entier n : ")
if n < 2016 then
    disp("US Presidents")
elif n < 2020 then
    disp("Lies and tweets")
elif n == 2020 then
    disp("kick in the nuts")
else
    disp("Lock him up !")
end

```

2.

```
n = input("ton entier n : ")
s = 0
for k = 1:n
    s = s + k^4
end
disp(s)
```

3.

```
function [u] = suite(n)
    u = 1 // u(0)
    for k = 1:n
        u = (k-1)*u + 3    //  $u(n)=(n-1)*u(n-1)+3$ 
    end
endfunction
```