DEVOIR SURVEILLE 3

Exo I. Un joueur décide de jouer sur deux machines à sous A et B, réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine A est $\frac{3}{10}$
- la probabilité de gagner sur la machine B est $\frac{2}{10}$

Une fois la machine choisie, l'issue d'une partie est indépendante de ce qui s'est passé avant. Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard avec équiprobabilité
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

Pour $k \geqslant 1$, on définit les événements $G_k =$« le joueur gagne la k$^{\text{ième}}$ partie » et $A_k =$« La k$^{\text{ème}}$ partie se déroule sur la machine A »

A. **Calculs élémentaires**

1. Déterminer la probabilité de gagner la première partie.
2. Déterminer la probabilité que les trois premières parties se fassent sur la machine A.
3. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine A ?
5. Les évènements G_1 et G_2 sont-ils indépendants ?

B. **Probabilité de gagner la $k^{\text{ème}}$ partie**

1. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$ uniquement
2. Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{1}{2}P(A_k) + \frac{4}{5}$
3. En déduire une expression de $P(A_k)$ puis de $P(G_k)$ en fonction de k

Exo II. A. **ENCADREMENT DE L'ARC-TANGENTE**

Soient g et h les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x \qquad \text{et} \qquad h(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$$

1. Étudier les variations des fonctions g et h sur $[0, +\infty[$.
2. Pour $x \geqslant 0$, en déduire que $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$.

B. **ÉTUDE D'UNE FONCTION** Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Arctan}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$. *(commencer par* $]0, +\infty[$*)*
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et préciser $f'(x)$ pour $x > 0$.
3.

a. Etudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction $u : x \mapsto \frac{3x}{1+9x^2} - \mathrm{Arctan}(3x)$ et en déduire son signe.
b. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ en précisant la limite éventuelle en $+\infty$.

4. a. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b. Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque $\varphi = f^{-1}$.

C. **ÉTUDE D'UNE SUITE IMPLICITE**

1. Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, qui sera notée u_n.
2. Sur un graphique, tracer l'allure de la courbe de f et construire graphiquement u_1, u_2 et u_3
3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$ et en déduire la monotonie de la suite (u_n)
4. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exo III. Etudier les branches infinies de la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-\ln(\mathrm{e}^x+1)}{x+1}$. Mega bonus pour la position par rapport aux asymptotes, s'il y en a...

Exo IV. A. 1. Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y-5z=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. Déterminer une base de F
3. Montrer que $G = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y-5z=0$ et $4x+3y-6z=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base
4. On pose $H = \mathrm{Vect}\big((1,1,2,1),(1,0,1,1),(0,1,2,3)\big)$
   a. Déterminer une équation cartésienne de H
   b. Le vecteur $(-1,1,1,-1)$ est-il élément de H ? et le vecteur $(2,-2,1,5)$?
5. La famille formée de $\mathbb{R}^3$ par $u=(1,1,0)$, $v=(4,1,4)$ et $w=(2,-1,4)$ est-elle libre ?
6. Montrer que $G \subset F$ pour $G = \mathrm{Vect}\left((-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\right)$ et $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,5)\right)$
7. Montrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{n+2} = u_n \quad (n \in \mathbb{N})\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base.

Exo V. SCILAB

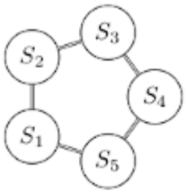
A. Ecrire une fonction « partieEntiere » qui renvoie la partie entière d'un nombre réel positif x

B. Ecrire un script calculant $\sum_{n=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k)}{nk}\right)$

C. Ecrire un script calculant u_{666} pour la suite définie par $u_0=1$, $u_1=1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + \sqrt{u_n}$ pour $n \geqslant 0$

D. Ecrire une fonction « signe » qui prend un nombre réel x et qui renvoie -1 si $x<0$, 0 si $x=0$ et 1 si $x>0$

Exercice 4. Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous.



Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes : .

— à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;

— les déplacements des deux personnes se font simultanément ;

— tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

— A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement »

— B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement »

— C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n.

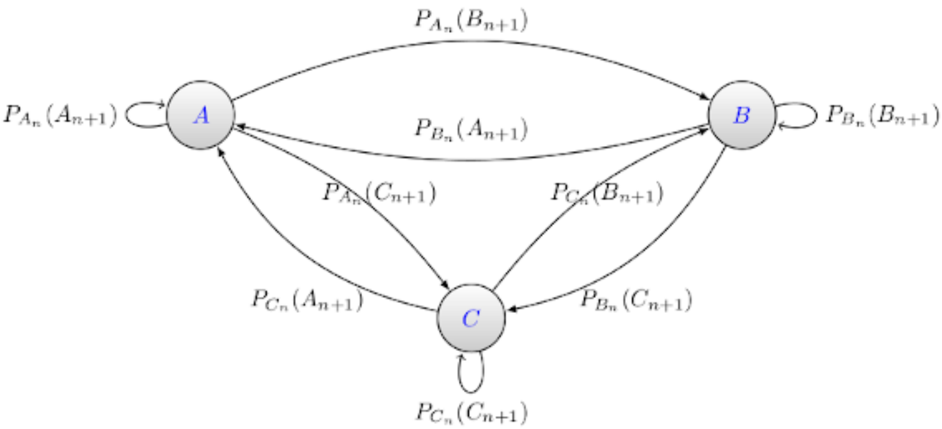
(1) Justifier pourquoi A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.

(2) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

(3) **(a)** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

(b) Justifier l'égalité : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$

(c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant sur la copie et en complétant le schéma ci-dessous (indiquer les valeurs des probabilités conditionnelles figurant sur le scéma)



(4) Etablir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$

(5) **(a)** En utilisant les relations en (4), exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.

(6) **(a)** Exprimer a_n en fonction de n, α et β. (on pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$).

(b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exo VI.