

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 3

Exo I. A. Calculs élémentaires

1. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{A_1, \overline{A_1}\}$, il vient

$$P(G_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(G_1) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(G_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

2. Pour que les trois premières parties se fassent sur la machine A, il faut choisir la machine A puis gagner deux fois de suite.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap G_1 \cap G_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(G_1) \times P_{A_1 \cap G_1}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{200}$$

3. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{A_1 \cap G_1, A_1 \cap \overline{G_1}, \overline{A_1} \cap G_1, \overline{A_1} \cap \overline{G_1}\}$, il vient

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(A_1 \cap G_1 \cap G_2) + P(\overline{A_1} \cap G_1 \cap G_2) + P(A_1 \cap \overline{G_1} \cap G_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{G_1} \cap G_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(G_1) \times P_{A_1 \cap G_1}(G_2) + \dots + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{G_1}) \times P_{\overline{A_1} \cap \overline{G_1}}(G_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{13}{100} \end{aligned}$$

4. Il résulte de la définition des probabilités composées et des résultats précédents que

$$\begin{aligned} P_{G_2}(A_1) &= \frac{P(A_1 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(A_1 \cap G_1 \cap G_2) + P(A_1 \cap \overline{G_1} \cap G_2)}{P(A_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{9+14}{100} = \frac{23}{100} \end{aligned}$$

5. D'après les résultats précédents, nous avons

$$P(G_1) \times P(G_2) = \frac{1}{4} \times \frac{13}{100} = \frac{13}{400}$$

Et de plus, nous remarquons que

$$P(G_1 \cap G_2) = P(A_1 \cap G_1 \cap G_2) + P(\overline{A_1} \cap G_1 \cap G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{13}{200}$$

Comme $13 \neq \frac{51}{4}$ car $13 \times 4 = 52$, nous remarquons que

$$P(G_1) \times P(G_2) \neq P(G_1 \cap G_2)$$

A fortiori, les événements G_1 et G_2 ne sont pas indépendants.

B. Probabilité de gagner la $k^{\text{ème}}$ partie

1. Pour $k \geq 1$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{A_k, \overline{A_k}\}$, il vient

$$\begin{aligned} P(G_k) &= P(A_k) \times P_{A_k}(G_k) + P(\overline{A_k}) \times P_{\overline{A_k}}(G_k) \\ &= P(A_k) \times \frac{3}{10} + (1 - P(A_k)) \times \frac{2}{10} \\ &= P(A_k) \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \end{aligned}$$

2. Soit $k \geq 1$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{A_k, \overline{A_k}\}$, il vient

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(A_k) \times P_{A_k}(A_{k+1}) + P(\overline{A_k}) \times P_{\overline{A_k}}(A_{k+1}) \\ &= P(A_k) \times P_{A_k}(G_k) + P(\overline{A_k}) \times P_{\overline{A_k}}(\overline{G_k}) \\ &= P(A_k) \times \frac{3}{10} + (1 - P(\overline{A_k})) \times \frac{8}{10} \\ &= P(A_k) \times \frac{-5}{10} + \frac{8}{10} = -\frac{1}{2}P(A_k) + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

3. D'après la relation suivante, la suite $u_k = P(A_k)$ est arithmético-géométrique. On remarque que

$$c = -\frac{1}{2}c + \frac{4}{5} \iff \frac{3c}{2} = \frac{4}{5} \iff c = \frac{8}{15}$$

et que la suite $v_k = u_k - c$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. De sorte que

$$\begin{aligned} P(A_k) - \frac{8}{15} &= u_k - c = v_k \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} v_1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} (u_1 - c) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(P(A_1) - \frac{8}{15}\right) \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{8}{15} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{15}\right) \\ &= \frac{8}{15} - \frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

En reportant dans la relation obtenue en B1, il vient

$$P(G_k) = P(A_k) \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \quad (k \geq 1)$$

Avec sa stratégie, le joueur a un peu plus de chance de gagner que s'il jouait tout le temps sur B mais moins de chance de gagner que s'il jouait tout le temps sur A . Il a fait au mieux avec les connaissances qu'il avait.

Exo II. A. ENCADREMENT DE L'ARC-TANGENTE

Soient g et h les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$$

1. Comme $u \mapsto \operatorname{Arctan}(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme les polynômes le sont également, les fonctions g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ en tant que différence de fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, nous remarquons que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0 \\ h'(x) &= g'(x) + x^2 = \frac{-x^2}{1+x^2} + x^2 = \frac{1-(1+x^2)+x^2(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0 \end{aligned}$$

En particulier,

- la fonction g décroît sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $g(0) = \text{Arctan}(0) - 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$
- la fonction h croît sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $h(0) = g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

2. Pour $x \geq 0$, nous remarquons que g est négative (ou nulle) de sorte que

$$\text{Arctan}(x) \leq x \quad (x \geq 0)$$

et que la fonction h est positive (ou nulle) de sorte que

$$\text{Arctan}(x) \geq x - \frac{x^3}{3} \quad (x \geq 0)$$

En conclusion, on a bien $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arctan}(x) \leq x$ pour $x \geq 0$.

B. ÉTUDE D'UNE FONCTION Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Comme l'application $u \mapsto \text{Arctan}(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle l'est également sur $]0, +\infty[$. Comme le polynôme $x \mapsto 3x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives, la composée $x \mapsto \text{Arctan}(3x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que quotient de fonction $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. A fortiori, f est continue que $]0, +\infty[$. Par ailleurs, en divisant par $x > 0$ le résultat de A2, nous obtenons que

$$3 - 9x^2 = \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3}}{x} \leq \frac{\text{Arctan}(3x)}{x} \leq \frac{3x}{x} = 3 \quad (x > 0)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - 9x^2) = 3$, il résulte alors du principe des gendarmes que

$$f(0^+) = 1 = f(0).$$

En particulier, la fonction f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}^+$.

2. Dans les calculs de la question précédente, nous avons établi que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Nous remarquons que

$$f'(x) = \frac{3 \times \frac{1}{1+(3x)^2} \times x - 1 \times \text{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{\frac{3x}{1+9x^2} - \text{Arctan}(x)}{x^2} \quad (x > 0)$$

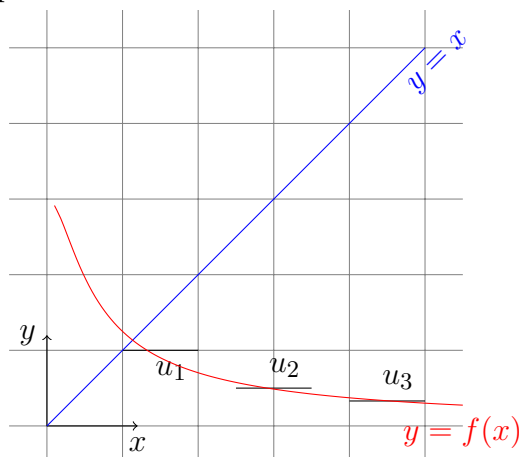
3. a. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et on a

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{3(1+9x^2) - 18x \times 3x}{(1+9x^2)^2} - 3 \times 1 + (3x)^2 \\ &= \frac{3(1+9x^2) - 18x \times 3x - 3(1+9x^2)}{(1+9x^2)^2} \\ &= \frac{-54x^2}{(1+9x^2)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

En particulier, la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $u(0) = 0$ car $\text{Arctan}(0) = 0$, on en déduit que u est négative sur $\mathbb{R}^+$.

- b. Comme $u(x) \leq 0$ et comme $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On rappelle que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,

que $f(0) = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$. En bonus, son (beau) graphe



4. a. La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme $f'(x) < 0$ pour $x > 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Il résulte alors du théorème de la bijection que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = f([0, +\infty[) =]0, 3]$.
- b. En particulier, $\varphi = f^{-1}$ est continue, strictement décroissante qui décroît de la valeur $+\infty$ en 0^+ à la valeur 3 en 3.

C. ÉTUDE D'UNE SUITE IMPLICITE

1. Pour $n \geq 1$, nous remarquons que $0 < \frac{1}{n} \leq 3$. A fortiori, il résulte de l'étude des variations de f et du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique nombre réel $x \in]0, +\infty[$ tel que $f(x) = \frac{1}{n}$ (par ailleurs, nous remarquons que $u_n = f^{-1}(\frac{1}{n})$).
2. cf le graphe précédent.
3. Comme la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, nous déduisons des relations $f(u_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = f(u_{n+1})$ que l'on a nécessairement

$$u_n < u_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

En particulier, la suite u est strictement croissante.

4. Comme $u_n = f^{-1}(\frac{1}{n})$ et comme $f^{-1}(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tends vers 0, il résulte de la composition des limites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exo III. La fonction $f(x) = \frac{2x - \ln(e^x + 1)}{x+1}$ présente potentiellement des branches infinies en $-\infty$, -1^- , -1^+ et $+\infty$. Or, la fonction $g(x) = 2x - \ln(e^x + 1)$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ satisfait $g(-1) = -2 - \ln(e^{-1} + 1) < 0$ et

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - \ln(e^x + 1) && \leq 2x \\ &= 2x - \ln(e^x(1 + e^{-x})) = x - \ln(1 + e^{-x}) && \leq x \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A fortiori, nous remarquons que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

En conclusion, f présente :

- une demie-asymptote horizontale (f reste au dessus) d'équation $Y = 2$ en $x = -\infty$ car

$$f(x) \leq \frac{2x}{x} = 2 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

- une demie-asymptote verticale (vers le haut) d'équation $X = -1$ en $x = -1^-$
- une demie-asymptote verticale (vers le bas) d'équation $X = -1$ en $x = -1^+$
- une demie-asymptote horizontale (f reste en dessous) d'équation $Y = 1$ en $x = -\infty$ car

$$f(x) \geq \frac{x}{x} = 1 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

Exo IV. A. 1. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F &\iff 2x + 3y - 5z = 0 \\ &\iff x = \frac{-3}{2}y + \frac{5}{2}z \\ &\iff (x,y,z) = (\frac{-3}{2}y + \frac{5}{2}z, y, z) \\ &\iff (x,y,z) = y(\frac{-3}{2}, 1, 0) + z(\frac{5}{2}, 0, 1) \\ &\iff (x,y,z) \in \text{Vect}((\frac{-3}{2}, 1, 0), (\frac{5}{2}, 0, 1)) \end{aligned}$$

En particulier, nous remarquons que $F = \text{Vect}((\frac{-3}{2}, 1, 0), (\frac{5}{2}, 0, 1))$ de sorte que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

2. D'après les calculs de la questions précédente, une famille génératrice de F est $((\frac{-3}{2}, 1, 0), (\frac{5}{2}, 0, 1))$. Comme les deux vecteurs de cette famille ne sont pas colinéaires, c'est une famille libre et donc une base de F .
3. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in G &\iff \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ 4x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y - 4z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = (\frac{z}{2}, \frac{4}{3}z, z) \\ &\iff (x,y,z) = z(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 1) \iff (x,y,z) \in \text{Vect}((\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 1)) \end{aligned}$$

En particulier, nous remarquons que $G = \text{Vect}((\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 1))$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, engendré par $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 1)$, qui est une base de G , en tant que famille libre constitué d'un unique vecteur non nul.

4. On pose $H = \text{Vect}((1,1,2,1), (1,0,1,1), (0,1,2,3))$
 - a. Procédons à une élimination

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in H &\iff x \in \text{Vect}((1,1,2,1), (1,0,1,1), (0,1,2,3)) \\
&\iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z,t) = a(1,1,2,1) + b(1,0,1,1) + c(0,1,2,3) \\
&\iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = a + b \\ y = a + c \\ z = 2a + b + 2c \\ t = a + b + 3c \end{cases} \\
&\iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = a + b \\ y = a + c \\ z - 2y = b \\ t - 3y = -2a + b \end{cases} \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a + b \\ z - 2y = b \\ t - 3y = -2a + b \end{cases} \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + 2y - z = a \\ z - 2y = b \\ t - y - z = -2a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 2y - z = a \\ t - y - z = -2a \end{cases} \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 3y - 3z + t = 0 \end{cases} \\
&\iff 2x + 3y - 3z + t = 0
\end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $H = \{(x,y,z,t) : 2x + 3y - 3z + t = 0\}$

b. Pour $(x,y,z,t) = (-1,1,1,-1)$, nous remarquons que

$$2x + 3y - 3z + t = -2 + 3 - 3 - 1 = -3 \neq 0$$

En particulier, le vecteur $(-1,1,1,-1)$ n'appartient pas à H . Par contre, pour $(x,y,z,t) = (2,-2,1,5)$, on a

$$2x + 3y - 3z + t = 4 - 6 - 3 + 5 = 0$$

De sorte que $(2,-2,1,5) \in H$.

5. Nous remarquons que $v - 2u = (4,1,4) - 2(1,1,0) = (2,-1,4) = w$. A fortiori, la famille (u,v,w) est liée.
6. Comme $(4,1,2,4) = (-1,-2,3,-1) - (-5,-3,1,5)$, nous remarquons que $(4,1,2,4) \in F$ Vect $((1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,5))$. De même, comme $(-1,-1,1,-1) = \frac{1}{2}((-1,-2,3,-1) - (1,0,1,1))$, nous remarquons que $(-1,-1,1,-1) \in F$. En particulier $G = \text{Vect}((-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)) \subset F$.
7. Comme le polynôme caractéristique $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ admet deux racines distinctes 1 et -1 , nous remarquons que

$$\begin{aligned}
u \in F &\iff u \text{ satisfait la récurrence linéaire } u_{n+2} - u_n = 0 \quad (n \geq 0) \\
&\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u_n = \lambda \times 1^n + \mu(-1)^n = \lambda + \mu(-1)^n \quad (n \geq 0) \\
&\iff u \in \text{Vect}((1)_{n \geq 0}, ((-1)^n)_{n \geq 0})
\end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $F = \text{Vect}((1)_{n \geq 0}, ((-1)^n)_{n \geq 0})$ est un espace vectoriel, dont une famille génératrice est composée de $v = (1)_{n \geq 0}$

et $w = ((-1)^n)_{n \geq 0}$, qui est libre en tant que famille de deux vecteurs non colinéaires. En particulier, c'est une base de F .

Exo V. SCILAB (le but était de faire obtenir des points aux étudiants avec le peu de notions abordées en cours (tests, boucles for, fonctions, calcul de somme via boucle for, calcul de terme d'une suite via boucle for). Comme c'est le deuxième devoir, les questions demandent un petit peu plus de réflexion qu'au devoir précédent (où c'était une application directe des notions vues). La dernière question était la plus facile. Tant pis pour ceux qui ne prennent pas le temps de tout lire ou qui se découragent trop vite (et toc !)

1. C'est abuser et complètement inefficace d'écrire la partie entière comme cela, mais ça marche :

```
function [n]=partieEntiere(x)
    for k=0:x
        n = k
    end
endfunction
```

- 2.

```
s = 0
for n = 1:10
    for k=1:n
        s = s + sin(k)/(n*k)
    end
end
disp(s)
```

- 3.

```
u = 1 //u(0)
v = 1 // u(1)
for n = 2:666
    w = v + sqrt(u) // u(n) = u(n-1) + sqrt(u(n-2))
    u= v // u(n-1)    nouveau u = ancien v
    v = w // u(n)    nouveau v = ancien w
end
disp(w)
```

- 4.

```
function [s]=signe(x)
    if x > 0 then
        s = 1
    elif x< 0 then
        s = -1
    else
        s = 0
    end
```

endfunction

- A. 1. Pour $n \geq 1$, après leur $n^{\text{ième}}$ déplacement, les deux personnes se trouvent:
- soit ensemble sur le même site (A_n)
 - soit sur des sites adjacents (B_n) et à 4 routes de distance de l'autre coté
 - soit à deux routes de distances (C_n) et à 3 routes de distance de l'autre coté.

A fortiori (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

2. Au début de l'expérience, P_1 est en S_1 et P_2 est en S_2 , de sorte que B_0 est réalisé. A fortiori, on a $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
3. a. Lorsque les deux personnes sont à deux routes de distance (C_n), la seule manière de se retrouver ensemble à l'étape suivante est qu'ils se déplacent tous les deux vers le site intermédiaire qui les sépare S_i , c'est la même probabilité que de se retrouver lorsque la personne 1 est sur le site 1 et lorsque la personne 2 est sur le site 3.

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{S_1}(S_2) \times P(S_3)(S_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- b. Lorsque les personnes sont ensembles à l'étape n , ils le restent à l'étape $n + 1$ (ils ne se quittent plus), de sorte que

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$

- c. En utilisant que la somme des probabilités doit faire 1 et les relations précédentes, on obtient que

$$\begin{array}{lll} P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 & P_{A_n}(B_{n+1}) = 0 & P_{A_n}(C_{n+1}) = 0 \\ P_{B_n}(A_{n+1}) = 0 & P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4} & P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4} \\ P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} & P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4} & P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Nous remarquons que lorsque les deux personnes sont sur des sites adjacents, il leur est impossible de se retrouver à l'étape suivante ($P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$) ils peuvent rester sur des sites adjacents s'ils se déplacent tous les deux dans la même direction (vers la gauche ou vers la droite), où s'ils échangent leur place :

$$P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{S_1}(S_2) \times P(S_2)(S_1) + P_{S_1}(S_2) \times P(S_2)(S_3) + P_{S_1}(S_5) \times P(S_2)(S_1) = \frac{3}{4}$$

Lorsque les deux personnes sont à deux chemins de distance, ils peuvent se retrouver s'ils se dirigent l'un vers l'autre par le chemin le plus court, rester à la même distance s'ils vont dans la même direction ou se retrouver sur des sites adjacents s'ils se dirigent l'un vers l'autre par le chemin le plus long

4. Il résulte alors de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) que

$$\begin{aligned}
P(A_n + 1) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= a_n \times 1 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\
P(B_n + 1) &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times \frac{3}{4} + c_n \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\
P(C_n + 1) &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n
\end{aligned}$$

5. a. En substituant $n + 1$ à n , dans la seconde relation, nous obtenons que

$$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

En remplaçant c_{n+1} à l'aide de la troisième relation, il vient alors

$$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \right) \quad (n \geq 0)$$

Et en remarquant que la seconde relation induit que $b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n = \frac{1}{4}c_n$, nous obtenons qlors que

$$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}b_n + 2 \left(b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n \right) \right) \quad (n \geq 0)$$

De sorte que

$$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n \quad (n \geq 0)$$

b. Comme la suite (b_n) satisfait une récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique

$$X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{5}{16} = (X - \frac{5}{8})^2 - \frac{5^2}{8^2} + \frac{5}{16} = (X - \frac{5}{8})^2 - \frac{5}{8^2} = (X - \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8})(X - \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8})$$

En particulier, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$b_n = \lambda \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n + \mu \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n \quad (n \geq 0)$$

Comme $b_0 = 1$ et comme $b_1 = \frac{3}{4}b_0 + c_0 = \frac{3}{4}$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda \alpha + \mu \beta &= \frac{3}{4} \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \mu(\beta - \alpha) &= \frac{3}{4} - \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \mu \frac{\sqrt{5}}{4} &= \frac{3}{4} - \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \mu &= \frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{5 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \\ \mu &= \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient que

$$b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \alpha^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \beta^n \quad (n \geq 0).$$

c. En reportant la formule précédente dans la 2^{ème} relation de (4), il vient

$$\begin{aligned} c_n &= 4b_{n+1} - 3b_n \\ &= 4 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \alpha^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \beta^{n+1} \right) - 3 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \alpha^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \beta^n \right) \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) (4\alpha - 3) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} - 3 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= -\sqrt{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \\ &= -\sqrt{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \times 5} \right) = -\sqrt{5} \frac{4}{4 \times 5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

et de même que

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) (4\beta - 3) = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

nous obtenons que

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\alpha^n - \beta^n) \quad (n \geq 0)$$

6. a. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, on a $a_n + b_n + c_n = 1$ de sorte que

$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \alpha^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \beta^n \right) - \frac{\sqrt{5}}{5} (\beta^n - \alpha^n) \quad (n \geq 0)$$

- b. comme $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$, nous remarquons que $\lim b_n = \frac{1}{2}$ et que $\lim c_n = 0$, de sorte que $\lim a_n = \frac{1}{2}$.