CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit la fonction f_n sur [0,1] en posant :

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

1. Dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé
   a. Nous remarquons que

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{nt^2}$ est continue sur [0,1] de sorte que l'application $G : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de la fonction g sur [0,1], s'annulant en 0. Et de plus G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1]
De même, la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-nt^2}$ est continue sur [0,1] de sorte que l'application $H : x \mapsto \int_1^x \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de la fonction h sur [0,1], s'annulant en 0. Et de plus H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1]
A fortiori, l'application $f_n : x \mapsto G(x) + H(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1] et on a

$$f_n'(x) = G'(x) + H'(x) = \mathrm{e}^{nx^2} + \mathrm{e}^{-nx^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

   b. Comme $f_n(1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une application continue, strictement positive, sur le segment [0,1], nous remarquons que $f_n(1) > 0$ (par positivité de l'intégrale et car l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{nt^2}$ n'est pas identiquement nulle sur [0,1]). De même $f_n(0) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t < 0$
   c. L'application f_n est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur [0,1] et satisfait $f_n(1) > 0$ et $f_n(0) < 0$. A fortiori, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un nombre $c_n \in]0,1[$ tel que $f_n(c_n) = 0$ c'est à dire tel que

$$\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$$

Comme la fonction f_n est de dérivée strictement positive sur [0,1], d'après la question 1, elle est strictement croissante et le nombre c_n est unique.
Dans le reste de l'exercice, on étudie la suite $(c_n)_{n \geqslant 1}$ ainsi construite

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^{(n+1)t^2}\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-(n+1)t^2}\mathrm{d}t - \left(\int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_0^x (\mathrm{e}^{(n+1)t^2} - \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t - \int_x^1 \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t^2} - \mathrm{e}^{-nt^2}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, nous avons $\mathrm{e}^{(n+1)t^2} - \mathrm{e}^{nt^2} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-(n+1)t^2} - \mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. A fortiori, il ésulte de la positivité de l'intégrale que

$$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{(n+1)t^2} - \mathrm{e}^{nt^2}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \int_x^1 \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t^2} - \mathrm{e}^{-nt^2}\right)\mathrm{d}t \leqslant 0$$

de sorte que $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$. En conclusion, nous avons $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b. Comme $f_n(c_n) = 0$ pour $n \geqslant 1$, nous remarquons que

$$f_n(c_n) = 0 = f_{n+1}(c_n + 1) \geqslant f_n(c_{n+1})$$

La fonction f_n étant strictement croissante sur [0,1] (car sa dérivée est positive), nous avons alors nécessairement $c_{n+1} \leqslant c_n$ pour $n \geqslant 1$. De sorte que la suite (c_n) est décroissante.

c. La suite c_n est décroissante et satisfait $0 \leqslant c_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 1$. Comme elle est minorée, elle converge et il résulte de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que sa limite L vérifie

$$0 \leqslant L \leqslant 1.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{nt^2} \mathrm{d}t$

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous déduisons du résultat de la question 1c

$$I_n(c_n) = \int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2} \mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2} \mathrm{d}t$$

Or $\mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Il résulte alors que la croissance de l'intégrale que

$$I_n(c_n) = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2} \mathrm{d}t \leqslant= \int_{c_n}^1 \mathrm{d}t = (1 - c_n) \leqslant 1$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $k : x \mapsto I_n(x) - x - n\frac{x^3}{3}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, en temps que somme de polynôme et de l'unique primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction continue $x \mapsto \mathrm{e}^{nx^2}$, s'annulant en 0. De plus, on a

$$k'(x) = I_n'(x) - 1 - nx^2 = \mathrm{e}^{nx^2} - 1 - nx^2 \qquad (x \geqslant 0)$$

Nous remarquons que k' est dérivable de dérivée

$$k''(x) = 2nx\mathrm{e}^{nx^2} - 2nx = 2nx\left(\mathrm{e}^{nx^2} - 1\right) \geqslant 0 \qquad (x \geqslant 0)$$

La fonction k' est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et satisfait $k'(0) = 0$. A fortiori, $k'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et comme nous remarquons que $k(0) = I_n(0) - 0 = 0$ nous obtenons que

$$I_n(x) - \left(x + n\frac{x^3}{3}\right) = k(x) \geqslant 0 \qquad (x \geqslant 0)$$

De sorte que $I_n(x) \geqslant x + n\frac{x^3}{3}$ pour $x \geqslant 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il résulte de la question précédente que

$$c_n + n\frac{(c_n)^3}{3} \leqslant I_n(c_n) \leqslant 1$$

En particulier, comme $c_n \in [0,1$, nous remarquons que

$$0 \leqslant \frac{(c_n)^3}{3} \leqslant \frac{1-c_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, il vient alors que

$$0 \leqslant \frac{L^3}{3} \leqslant 0$$

Et nous concluons alors que $L = 0$

Exo II. SCILAB

1.

```
x = 666 // l'ordinateur a choisi un nombre x qu'il est seul à connaitre
x = floor(1000* rand()) // ou choix au hasard
while input("devine ! x = ") <> x
end
disp("gagné !")

essai = 1 // ou en comptant le nombre de tentatives
while input("devine ! x = ") <> x
   essai = essai + 1
end
disp("gagné  en "+str(essai) + " essais")
```

2.

```
A = (1:100) ./ (2:101)
```

3. Ce script affiche tous les nombres premiers entre 1 et 100

```
for n = 1:100 // n varie de 1 à 100
  ok = %T // Vrai
  for j = 2:sqrt(n) // si n n'est pas premier, il admet un diviseur
entre 2 et racine de n
     if n == j * floor(n/j) then // si n est divisible par j
       ok = %F // n n'est pas premier
     end
  end
  if ok then // si n est un nombre premier, on l'affiche
    disp(n)
  end
end
```

Exo III. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $J(k,n) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^n \mathrm{d}x$.

1. a. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} J(k,0) &= \int_0^1 x^k \mathrm{d}x = [\frac{x^{k+1}}{k+1}]_0^1 = \frac{1}{k+1} \\ J(k,1) &= \int_0^1 x^k(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^k - x^{k+1}\right)\mathrm{d}x = [\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2}]_0^1 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{}{(k+1)} \end{aligned}$$

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, comme $x \to x^{k+1}$ et $x \mapsto -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il résulte d'une intégration par partie que

$$\begin{aligned} J(k+1,n) &= \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^n \mathrm{d}x = [x^{k+1}\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}x \\ &= 0 - 0 + \frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^k(1-x)^{n+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{k+1}{n+1}J(k,n+1) \end{aligned}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad J(k,n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

- P_0 est vraie d'après la question 1a car

$$J(k,0) = \frac{1}{k+1} = \frac{0!}{k+1}$$

- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1}. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question 1b, il vient

$$J(k,n+1) = \frac{n+1}{k+1}J_(k+1,n)$$

Il résulte alors de la proposition $\mathcal{P}_n$ que

$$J(k,n{+}1) = \frac{n+1}{k+1}\frac{n!}{(k+2)(k+3)\cdots(k+1+n+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)(k+2)\cdots(k+1+n+1)}$$

A fortiori $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}$.

a. Nous remarquons que

$$\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$$

A fortiori, il résulte du binôme de Newton et de la linéarité de l'intégrale que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

b. Il résulte alors de la question (2), du binôme de Newton et de la linéarité de l'intégrale que

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_0^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t = \int_0^1(1+t)^n(1-t)^n\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^n\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^n\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J_{k,n} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(k+1)(k+3)\cdots(k+n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{(k+1)(k+3)\cdots(k+n+1)} \\
&= (n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!(k+1)(k+3)\cdots(k+n+1)} \\
&= (n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k+n+1)!} \\
&= (n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(n-k)!(k+n+1)!} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(n-k)!(k+n+1)!} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n-k}
\end{aligned}$$

En procédant au changement d'indice $k' = n-k$, il vient alors que

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n-k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k'=0}^{n}\binom{2n+1}{k'}$$

Question hardcore...

c. Comme $\binom{2n+1}{n-k} = \binom{2n+1}{(2n+1)-(n-k)} = \binom{2n+1}{n+1+k}$, d'après la symétrie du triangle de Pascal, il vient que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+1+k}$$

d. Il résulte du binôme de Newton que

$$\begin{array}{ll} 2^{2n+1} & =(1+1)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \\ & =\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \end{array}$$

Il résulte alors du changement d'indice $k=k'+n+1$ et du résultat de la question précédente que

$$\begin{array}{ll} 2^{2n+1} & =\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k'=0}^{n}\binom{2n+1}{k'+n+1} \\ 2^{2n+1} & =\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k'=0}^{n}\binom{2n+1}{k'} \end{array}$$

$$=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$$

En particulier, en reportant dans le résultat de la question 3b, il vient que

$$\begin{array}{lll} S_n & =\displaystyle\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k'=0}^{n}\binom{2n+1}{k'}=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{2} & \\ & =\displaystyle\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{2} & =\displaystyle\frac{(n!)^2}{2n!}\frac{2^{2n}}{2n+1} \\ & =\displaystyle\frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} & \end{array}$$

Exo IV. D'après Ecricome. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on pose

$$f(x,y,z)=(-2x-y+2z,-15x-6y+11z,-14x-6y+11z)$$

1. - $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (le même au départ et à l'arrivée)
   - f est une application. En effet, pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $-2x-y+2z$, $-15x-6y+11z$ et $-14x-6y+11z$ sont des nombres réels de sorte que $f(x,y,z)$ existe et appartient à $\mathbb{R}^3$.
   - Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Nous remarquons que

$$\begin{array}{ll} & f\big((\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big) \\ = & f\big(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z'\big) \\ = & (-2(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z'),-15(\lambda x+\mu x')-6(\lambda y+\mu y')+11(\lambda z+\mu z'), \\ & \qquad -14(\lambda x+\mu x')-6(\lambda y+\mu y')+11(\lambda z+\mu z')) \\ = & \lambda(-2x-y+2z,-15x-6y+11z,-14x-6y+11z), \\ & \qquad +\mu(-2x'-y'+2z',-15x'-6y'+11z',-14x'-6y'+11z') \\ = & \lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z') \end{array}$$

   En conclusion, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

2. La matrice de f dans la base canonique est

$$\mathcal{M}at_{BC}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

car $f(1{,}0{,}0) = (-2, -15, -14)$ et $f(0{,}1{,}0) = (-1, -6, -6)$ et $f(0{,}0{,}1) = (2{,}11{,}11)$

3. Soit $X = (x{,}y{,}z) \in \mathbb{R}^3$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
(x{,}y{,}z) \in V \quad &\iff f(X) = X \iff f(x{,}y{,}z) = (x{,}y{,}z) \\
&\iff (-2x - y + 2z, -15x - 6y + 11z, -14x - 6y + 11z) = (x{,}y{,}z) \\
&\iff (-3x - y + 2z, -15x - 7y + 11z, -14x - 6y + 10z) = (0{,}0{,}0) \\
&\iff \begin{cases} -3x & \boxed{\text{-y}} & +2z & = 0 \\ -15x & -7y & +11z & = 0 \\ -14x & -6y & +10z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x & \boxed{\text{-y}} & +2z & = 0 \\ 6x & & -3z & = 0 \\ 4x & & -2z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x & \boxed{\text{-y}} & +2z & = 0 \\ 2x & & \boxed{\text{-z}} & = 0 \\ 2x & & -z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x & \boxed{\text{-y}} & & = 0 \\ 2x & & \boxed{\text{-z}} & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases} \\
&\iff (x{,}y{,}z) = (x{,}x{,}2x) \\
&\iff (x{,}y{,}z) \in \text{Vect}\big((1{,}1{,}2)\big)
\end{aligned}$$

En particulier, $V = \text{Vect}\big((1{,}1{,}2)\big)$ est un Espace vectoriel, engendré par le vecteur $\vec{u} = (1{,}1{,}2)$ qui forme une base de V puisqu'une famille formée d'un vecteur non nul est libre.

4. Soit $\vec{v} = (x{,}y{,}0) \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u} &\iff f(x,y,0) = (x,y,0) + (1,1,2)\\
&\iff (-2x - y, -15x - 6y, -14x - 6y) = (x,y,0) + (1,1,2)\\
&\iff (-3x - y, -15x - 7y, -14x - 6y) = (1,1,2)\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} -3 & \boxed{\text{-1}} & = 1\\ -15 & -7 & = 1\\ -14 & -6 & = 2 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} -3 & \boxed{\text{-1}} & = 1\\ 6 & 0 & = -6\\ 4 & 0 & = -4 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} -3 & \boxed{\text{-1}} & = 1\\ \boxed{1} & 0 & = -1\\ 1 & 0 & = -1 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} 0 & \boxed{\text{-1}} & = -2\\ \boxed{1} & 0 & = -1 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} y = 2\\ x = -1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Du coup $\vec{v} = (-1,2,0)$.

5. Soit $\vec{w} = (x,y,1) \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
f(\vec{w}) = \vec{w} + \vec{v} &\iff f(x,y,1) = (x,y,1) + (-1,2,0)\\
&\iff (-2x - y + 2, -15x - 6y + 11, -14x - 6y + 11) = (x,y,1) + (-1,2,0)\\
&\iff (-3x - y + 2, -15x - 7y + 11, -14x - 6y + 10) = (-1,2,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} -3 & \boxed{\text{-1}} & = -3\\ -15 & -7 & = -9\\ -14 & -6 & = -10 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} -3 & \boxed{\text{-1}} & = -3\\ 6 & 0 & = 12\\ 4 & 0 & = 8 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} -3 & \boxed{\text{-1}} & = -3\\ \boxed{1} & 0 & = 2 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} 0 & \boxed{\text{-1}} & = 3\\ \boxed{1} & 0 & = 2 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} y = -3\\ x = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Afortiori, $\vec{w} = (2,-3,1)$. En fait on aurait pu résoudre les 4 systèmes précédents en utilisant les matrices et cela aurait certainement été plus cool.

6. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est de rang 3. Or

$$\operatorname{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3$$

Comme le rang de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est égal au nombre de vecteurs de cette famille, c'est une famille libre. Comme ce rang est égal à 3 (la dimension de $\mathbb{R}^3$), cest une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

7. Calculons le rang de f. On a

$$\operatorname{rg}(f) = \quad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & \boxed{-1} & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & \boxed{-1} & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} = 3$$

Comme $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\mathfrak{I}(f) \subset \mathbb{R}^3$, nous remarquons que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. En particulier, une base de l'image de f est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Et l'application f est surjective.
Par ailleurs, il résulte du théorème du rang que $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + 3$. En particulier, le noyau de f est de dimension 0, autrement dit $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. Le noyau n'a pas de base (c'est un abus de l'énoncé, désolé pour cela). L'application f est injective.

8. réponse au paragraphe précédent

9. Comme $\vec{u} = (1{,}1{,}2)$, $\vec{v} = (-1{,}2{,}0)$ et $\vec{w} = (2,-3{,}1)$, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. On va dire que je vais calculer P^{-1} au brouillon et vérifier sur ma copie (parachutage-vérification)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{-1} & 0 & 7 & 3 & -5 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

De sorte que j'intuite au brouillon l'inverse de P puis je me lance dans la démonstration sur ma copie

La matrice P est inversible d'inverse $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & 5 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ car

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 2+7-8 & 1+3-4 & -1-5+6 \\ 2-14+12 & 1-6+6 & -1+10-9 \\ 4-4 & 2-2 & -2+3 \end{pmatrix} = I_3$$

Hop, démonstration bouclée en 2 lignes, avec calculs vérifiés

b. L'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$ est la matrice

$$\begin{aligned}
T &= P^{-1} \times (PTP^{-1}) \times P = P^{-1}AP \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & 5 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4-15+14-2-6+6 & 4-11+11 & \\ 14+45-70 & 7+18-30 & -14-33+55 \\ 8+30-42 & 4+12-18 & -8-22+33 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -11 & -5 & 8 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5-11-8 & 5-4 & -10+6+4 \\ -11-5+16 & 11-10 & -22+15+8 \\ -4-2+6 & 4-4 & -8+6+3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hop, une matrice T-riangulaire, nous venons de trigonaliser A.
Pour info, la trigonalisation est hors-programme en ECS

Exo V. **Edhec.** Un mobile se déplace sur un axe d'origine O. Au départ, il est à l'origine (d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante : S'il est à l'abscisse k à l'instant n, il sera l'instant suivant à l'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou à l'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n et on pose $u_n = P(X_n = 0)$

PARTIE 1 : étude de la variable X_n

1. Comme le mobile est à l'origine à l'instant 0. A l'instant 1, le mobile peut retourner à l'origine ou faire un déplacement vers la droite, de sorte que $X_1(\Omega) = \{0,1\}$. Par ailleurs, l'énoncé induit que

$$P(X_1 = 1) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

En particulier, nous obtenons que $X_1 \hookrightarrow B(\frac{1}{2})$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$$

- La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie car $X_0 = 0$ d'après l'énoncé
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 0$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$ Comme $\mathcal{P}_n$ induit que $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et comme un mobile positionné à l'abscisse k fait un pas vers la droite avec une probabilité strictement positive ou retourne en 0 avec une probabilité strictement positive, nous obtenons alors que $X_{n+1}(\Omega) = (1 + [\![0,n]\!]) \cup \{0\} = [\![0,n+1]\!]$. En particulier $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

3. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, il résulte de la relation de Chasles et de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(X_{n-1} = \ell)_{0 \leqslant \ell \leqslant n-1}$ que

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} P(X_{n-1} = \ell) \times P_{X_{n-1}=\ell}(X_n = k) \\ &= P(X_{n-1} = k-1) \times \underbrace{P_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k)}_{=\frac{k}{k+1}} \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant n-1 \\ \ell \neq k-1}} P(X_{n-1} = \ell) \times \underbrace{P_{X_{n-1}=\ell}(X_n = k)}_{=0} \\ &= \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1) \end{aligned}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

- La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie car

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{0+1} P(X_0 = 0) = \frac{1}{0+1} u_{0-k} \qquad (k \in [\![0,0]\!])$$

- Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ pour un entier $n \geqslant 1$ et prouvons $\mathcal{P}_n$.
  Pour $k = 0$, nous avons

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{0+1} P(X_n = 0) = \frac{1}{0+1} u_{n-0}$$

  Lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$, nous déduisons du résultat de la question précédente que

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$$

  Comme la proposition $\mathcal{P}_{n-1}$ appliquée pour $k-1$ induit que

$$P(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{k-1+1} u_{n-1-(k-1)} = \frac{1}{k} u_{n-k}$$

  Nous obtenons alors que

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k} u_{n-k} = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

  En particulier, la proposition $\mathcal{P}_n$ est satisfaite

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

c. Comme $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, nous remarquons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$. A l'aide du résultat de la question précédente, nous obtenons alors que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

En procédant au changement d'indice $j = n - k$, il vient alorqs

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} u_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n-j+1} u_j \qquad (n \in \mathbb{N})$$

d. En appliquant la formule obtenue à la question précédente pour $n = 0$ puis pour $n = 1$, nous obtenons que

$$\begin{array}{ll} 1 & = \sum_{j=0}^{0} \frac{1}{0-j+1} u_j = \frac{1}{1} u_0 = u_0 \\ 1 & = \sum_{j=0}^{1} \frac{1}{1-j+1} u_j = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{1} u_1 = 1\ F2 + u_1 \end{array}$$

De sorte que $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$. De même, en employant la même formule pour $n = 2$ et $n = 3$, il vient

$$\begin{array}{ll} 1 & = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k+1} u_{2-k} = \frac{1}{1} u_2 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{3} u_0 \\ 1 & = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k+1} u_{3-k} = \frac{1}{1} u_3 + \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{4} u_0 \end{array}$$

De sorte que

$$
\begin{aligned}
u_2 &= 1-\left(\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{3}u_0\right)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}\\
u_3 & 1-\left(\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{4}u_0\right)=1-\frac{5}{24}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{9}{24}
\end{aligned}
$$

4. a. Soit $n \geqslant 1$. En remarquant que la relation obtenue à la question 3a) peut s'écrire sous la forme

$$(k+1)P(X_n=k)=kP(X_{n-1}=k-1),$$

nous obtenons déduisons des identités $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, $X_{n-1}(\Omega)=[\![0,n-1]\!]$, de la relation de Chasles et du changement d'indice $\ell=k-1$ que

$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_n=k)\\
E(X_n) &= 0+\sum_{k=1}^{n} kP(X_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)-1\big)P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(k+1)P(X_n=k)-\sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_{n-1}=k-1)-\sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (1+(k-1))P(X_{n-1}=k-1)-\sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} (1+\ell)P(X_{n-1}=\ell)-\sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell P(X_{n-1}=\ell)+\sum_{\ell=0}^{n-1} P(X_{n-1}=\ell)-\sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)\\
&= E(X_{n-1})+1-(1-P(X_n=0)\\
&= E(X_{n-1})+P(X_n=0)=E(X_{n-1})+u_n
\end{aligned}
$$

b. Il résulte du principe des sommes telescopiques et de la relation précédente que

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}\big(E(X_k)-E(X_{k-1}\big)+E(X_0)=\sum_{k=1}^{n}u_k+0=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

c. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il a été établi au 3c (pour $n'=n-1\geqslant 0$) que

$$1=\sum_{j=0}^{n'}\frac{1}{n'-j+1}u_j=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n-1-j+1}u_j=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j}{n-j}$$

En particulier, en appliquant cette formule pour $n=n'+1$, nous observons que

$$1=\sum_{j=0}^{n'+1-1}\frac{u_j}{n'+1-j}=\sum_{j=0}^{n'}\frac{u_j}{n'+1-j}=\frac{u_{n'}}{1}+\sum_{j=0}^{n'-1}\frac{u_j}{n'+1-j}$$

nous déduisons alors de ces deux résultats que

$$\begin{aligned}
u_n &= 1-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j}{n-j+1}\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j}{n-j}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j}{n-j+1}\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{u_j}{n-j}-\frac{u_j}{n-j+1}\right)\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \qquad (n\geqslant 1)
\end{aligned}$$

d. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$$

- La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0=1\geqslant 1+0+1$
- Supposons $\mathcal{P}_0,\cdots,\mathcal{P}_{n-1}$ pour un entier $n\geqslant 1$ et prouvons $\mathcal{P}_n$. Nous remarquons que

$$u_j\geqslant\frac{1}{j+1}\geqslant\frac{1}{n} \qquad 0\leqslant j\leqslant n-1$$

De sorte que, le principe des sommes telescopiques induit que

$$\begin{aligned}
u_n &=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}\\
&\geqslant\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{n}}{(n-j)(n-j+1)}\\
&\geqslant\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(n-j)(n-j+1)}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-j}-\frac{1}{n-j+1}\right)\\
&\geqslant\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

En pârticulier, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie *Une question pour les forts étudiants d'ECS*...*

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n\in\mathbb{N}$

En reportant dans la formule du 4b, il vient

$$E(X_n)=\sum_{k=0}^{n-1}u_k\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}$$

Au second semestre, nous aurons des résultats permettant de montrer simplement que la suite de droite tend vers $+\infty$. En utilisant l'inégalité

$$\frac{1}{\ell} \geqslant \ln(1 + \frac{1}{\ell} = \ln \frac{\ell+1}{\ell} = \ln(\ell+1) - \ln(\ell) \qquad (\ell \geqslant 1)$$

que l'on peut déduire du 1e de la partie 2, on déduit du principe des sommes telescopiques que

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} (\ln(\ell+1) - \ln(\ell)) = \ln(n+1) - \ln(2) \qquad (n \geqslant 1)$$

De sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$

PARTIE 2 : Etude du premier retour à l'origine

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ)

1. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a $(T = k) = (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = k-1) \cap (X_k = 0)$ car le mobile doit aller vers la droite jusqu'au dermier moment, où il revient pour la première fois à l'origine.

   b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, Il résulte alors de la formule des probabilités composées et du principe des produits telescopiques que

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 2) \cdots P_{X_{k-2}=k-2}(X_{k-1} = k-1) \times P_{X_{k-1}=k-1}(X_k = 0) \\ &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{3} \cdots \tfrac{k-1}{k} \times \tfrac{1}{k+1} = \tfrac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

   c. On remarque que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

   pour $a = 1$ et $b = -1$

   d. Nous déduisons du principe des sommes telescopiques *(j'ai insisté lourdement sur le fait que c'était important)* que

$$\begin{aligned} P(T \geqslant N) &= 1 - P(T \in [\![1,n-1]\!]) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(T = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   En particulier, nous remarquons que $\lim\limits_{N\to+\infty} P(T \geqslant N) = 0$, ce qui signifie que le mobile est quasi certain de retourner à l'origine au moins une fois

e. On établit l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ via un tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ puis on utilise $x = \frac{1}{k}$ pour montrer que

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \qquad (k \geqslant 1)$$

2. On remarque alors que

$$S_n \quad = \sum_{k=0}^{n} kP(T=k) \qquad = \sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{k(k+1)} \qquad = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \qquad \geqslant \sum_{k=0}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k+1)) = \ln($$

Il résulte du principe des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. En langage du second semestre, nous venons d'établir que la VAR T n'admet pas d'esperance.

PARTIE 3 : Scilab

1. Compléter les deux blancs pour que le script suivant calcule et affiche $u_1, \cdots, u_{100}$ ainsi que l'espérance de X_{100} qui sera stockée dans e.

```
u = zeros(1, 101) // une matrice ligne pour stocker u(0)...u(100)
u(1,1) = 1  // u(0)
e = 0
for k=1:100
  s = 0
  for j = 0:k-1
     s = s +  u(1, j+1)/(k-j+1)
  end
  u(1, k + 1) = 1 - s  // u(k)  On utilise la formule du 4c
  disp(u(1, k + 1))
  e = e + u(1, k+1)  // l'esperance de Xn  est la somme des uk pour
1<=k<=n, d'apres le (4b)
end
disp(e)
```