DEVOIR SURVEILLE 6 (niveau EDHEC/EML/Ecricom)

Exo I. **Edhec.** On considère un entier naturel $n \geqslant 2$. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne suivant le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules ne portent pas les mêmes numéros, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires

1. a. Déterminer le nombre d'issues possibles au premier tirage.
   b. Parmi ces issues possibles, combien correspondent à deux boules portant le même numéro ?
2. a. Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
   b. Donner sans calcul l'espérance de T_1 .
3. a. Expliquer pourquoi la fonction Scilab suivante, qui prend comme paramètre l'entier n simule le tirage simultané de deux boules dans cette urne.

```
function [a,b] = tirage(n)
  a = floor(2*n*rand()) + 2
  b = 0
  while b==a
    b = floor(2*n*rand()) + 2
  end
  a = floor(a / 2)
  b = floor(b / 2)
endfunction
```

   b. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable T_1

```
function [y] = T(n)
  y=1
  [a,b]= tirage(n)
  while ________
    [a, b] = tirage(n)
    ___________
  end
endfunction
```

4. On pose $X_1 = T_1$ et $X_i = T_i - T_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$.
   a. Que représente la variable X_i ?
   b. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance
   c. En déduire que T_n admet une espérance et que l'on a $E(T_n) = n^2$.

5. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.
   a. Calculer $P(S_n = 0)$
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$
   c. Montrer que $P(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

Exo II. Ecricom.

1. Montrer que l'on a $\ln(2 - \mathrm{e}^x) = -x - x^2 + o_0(x^2)$
2. a. Pour $k \geqslant 2$, montrer que l'on a $2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \in]0,1[$.
   b. En déduire le signe de $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ pour $k \geqslant 2$.
   c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$?
   d. Pour $n \geqslant 2$, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) \qquad \text{et} \qquad u_n = \mathrm{e}^{V_n}$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$
3. a. Pour $n \geqslant 2$, montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right)$$

   b. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$ de $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$
   c. En déduire que $u_n \sim \frac{K}{n}$ pour un nombre $K > 0$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
4. Pour $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$
   a. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
   b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes
   c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exo III. EML. Soit $n \geqslant 2$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficientssont nuls sauf celui de la $i^{\text{ième}}$ ligne, qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(V_1, \cdots, V_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $E_{i,j} = V_i\,{}^{\mathrm{t}}V_j$, qui est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1 (c'est un vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi_A(M) = AM - MA$$

1. **Quelques généralités**
   a. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   b. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?
2. **Etude d'un cas particulier** Dans cette partie seulement, on suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
   a. Diagonaliser la matrice A
   b. Ecrire la matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis calculer son rang
   c. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable (en la diagonalisant ?)
3. **Etude du cas ou A est diagonalisable**.
   On suppose dans cette partie que A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont nous noterons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ coefficients sur la diagonale principale (qui sont valeurs propres) telles que

$$A = PDP^{-1}$$

   Vous êtes susceptible d'utiliser les propriétés de la transposée, allez réviser dans votre poly de cours et votre ajout de diagonalisation (je vous donne le droit de les consulter en cours de ds)
   a. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et ${}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres (diagonalisable avec la même matrice diagonale D)
   b. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que R (respectivement Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^{\mathrm{t}}A$). Montrer que $X{}^{\mathrm{t}}Y$ est un vecteur propre de Φ_A
   c. Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

      On note $\mathcal{F}$ la famille $(X_i{}^{\mathrm{t}}Y_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
      Montrer que pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $V_i{}^{\mathrm{t}}V_j$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   d. Etablir que Φ_A est diagonalisable
   e. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Exo IV. Mephistolus. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est la matrice d'une projection p
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$
3. Déterminer les caractéristiques de la projection p (direction, support).
4. Diagonaliser la matrice P
5. En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$

Exo V. **Edhec.** On désigne par α et p deux réels de]0,1[. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches. Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α (alpha) de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$. Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur
- G le gain du joueur à la fin du jeu

1. a. Donner la loi de X . (On pourra noter D_k l'événement=« Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ième}}$ manche »)
   b. On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de T puis en déduire que l'on a $E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$
   c. En déduire également la valeur de $V(X)$
2. a. Pour $n \geqslant 0$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$
   b. En utilisant que $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{n-r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$ pour $0 \leqslant x < 1$, en déduire la loi de Y
3. Calculer l'espérance de Y. On admettra que $V(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$ (c'était demandé)
4. a. Exprimer G en fonction de X et Y
   b. En déduire l'espérance de G
5. Compléter le script suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y

```
alpha = input('entre la valeur de alpha : ')
p = input('entrer la valeur de p : ')
X = ----
Y = ----
disp(X)
disp(Y)
```