DEVOIR SURVEILLE 6 (niveau EDHEC/EML/Ecricom)

Exo I. **Edhec.** On considère un entier naturel $n \geqslant 2$. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne suivant le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules ne portent pas les mêmes numéros, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires

1. a. Il y a $\binom{2n}{2}$ façons possible de tirer 2 boules parmi $2n$ au premier tirage.

   b. Parmi ces issues possibles, il y a n issues constituées de paires comportant le même numéro (on choisit le numéro de la paire puis on saisit les deux boules correspondantes)

2. a. T_1 désigne le rang du premier succès, consistant à tirer une paire, lors d'expériences aléatoires indépendantes, de même loi de bernouilli (puisqu'il y a remise tant que le premier succès n'est pas atteint). A fortiori, $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2n-1})$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1}$ (la probabilité de tirer une paire lors d'un tirage avec $2n$ boules).

   b. L'esperance de T_1 est donc $\frac{1}{\frac{1}{2n-1}} = 2n-1$. En moyenne, on peut esperer obtenir une paire aux allentours du 2n-1$^{\text{ième}}$ tirage

3. a.

```
function [a,b] = tirage(n) // cette fonction renvoit une paire de
nombres (a,b) parmi {1,.., n}
  a = floor(2*n*rand()) + 2 // on tire un numéro parmi les numéros
{2...2n+1
  b = 0 // ce choix fait en sorte que l'on entre dans la boucle while
  while b==a   // tant que le numéro pour b est le même que a (il
est impossible de tirer 2x la même boule)
    b = floor(2*n*rand()) + 2 // on retire la seconde boule
  end
  a = floor(a / 2) // le numéro des boules est obtenue en divisant
par 2
  b = floor(b / 2) // puis en prenant une partie entière,
  // via la transformation {2..2n+1}--> {1..n}
endfunction
```

   b. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable T_1

```
function [y] = T(n)
  y=1
  [a,b]= tirage(n)
  while a==b
```

```
    [a, b] = tirage(n)
    y = y + 1
  end
endfunction
```

4. On pose $X_1 = T_1$ et $X_i = T_i - T_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$.
   a. La variable X_i reprèsente le nombre de tirage nécessaire pour obtenir la i$^{\text{ième}}$ paire, après l'obtention de la précédente paire.
   b. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, X_i est le rang du premier succes lors d'une tirage (avec remise) d'une paire parmi $2n+2-2i$ boules (vu que les tirages précédents ont enlevés $i-1$ paires de boules). En particulier, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n+1-i}{\binom{2n+2-2i}{2}} = \frac{1}{2(n+1-i)-1} = \frac{1}{2n+1-2i}$. En particulier, on a $E(X_i) = \frac{1}{\frac{1}{2n+1-2i}} = 2n+1-2i$.
   c. A fortiori, la VAR $T_n = X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i$ admet une espérance en tant que somme de VAR admettant une espérance, qui est la somme arithmétique

$$E(T_n) = E(X_1) + \sum_{i=2}^{n} E(X_i) = 2n-1 + \sum_{i=2}^{n}(2n+1-2i) = \sum_{i=1}^{n}(2n+1-2i) = n\frac{2n-1+1}{2} = n^2$$

5.

   On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.
   a. Notant P_i l'événement obtenir une paire au tirage i, on a
   On a $(S_n = 0) = (T_1 >= n+1) = \overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n}$. A fortiori, comme les tirages se font avec remise chaque fois qu'une paire n'est pas obtenue (ce qui revient à les déclarer indépendant, de même loi, pour ce calcul précis), il vient

$$P(S_n = 0) = P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n}) = P(\overline{P_1}) \times \cdots \times P(\overline{P_n}) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n$$

   b. Nous obtenons alors que

$$P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)} = \mathrm{e}^{n\ \left(-\frac{1}{2n-1}+o\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+o(1)}$$

   En particulier, par passage à la limite, nous obtenons que

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

   c. De même, nous remarquons que $(S_n = n) = (T_1 = 1) \cap (T_2 = 2) \cdots \cap (T_n = n)$ de sorte qu'il résulte de la formule des probabilités composées que

$$\begin{aligned}
P(S_n = n) \quad &= P\big((T_1 = 1) \cap (T_2 = 2) \cdots \cap (T_n = n)\big) = P(T_1 = 1) \times P_{T_1=1}(T_2 = 1) \times \cdots \times P_{(T_1} \\
&= \tfrac{1}{2n-1} \times \tfrac{1}{2n-3} \times \cdots \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{1} \\
&= \tfrac{2n}{2n} \times \tfrac{1}{2n-1} \times \tfrac{2n-2}{2n-2} \times \tfrac{1}{2n-3} \times \cdots \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{2} \times \tfrac{1}{1} \\
&= \tfrac{2n \times 2(n-1) \times \cdots 2 \times 1}{(2n)!} \\
&= \tfrac{n! 2^n}{(2n)!} \qquad (n \geqslant 1)
\end{aligned}$$

Exo II. Ecricom.

1. En procédant à un développement limité à l'ordre 2 en 0 de l'exponentielle, il vient

$$\ln(2-\mathrm{e}^x)=\ln\left(2-(1+x+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)=\ln\left(1-x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)$$

En effectuant un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$, il vient alors (pour $u=-x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)$)

$$\begin{array}{ll}\ln(2-\mathrm{e}^x) & =u-\frac{u^2}{2}+o_0(u^2)\\ & =-x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)-\frac{(-x)^2}{2}+o_0(u^2)\\ & =-x-x^2+o_0(x^2)\end{array}$$

2. a. Pour $k\geqslant 2$, nous remarquons que $1<\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}<4^{\frac{1}{2}}=2$. En particulier, il suit $2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\in]0,1[$.

   b. En reportant dans le logarithme, qui est strictement croissant et satisfait $\ln(1)=0$, il vient $\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})<0$ pour $k\geqslant 2$.

   c. Il résulte des questions précédentes que le terme général $\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ est de signe négatif et satisfait

$$\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})=-\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}+o(\frac{1}{k^2})\sim-\frac{1}{k}$$

   En particulier, la série de terme général $\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ est de même nature que la série harmonique (de Riemann) $\sum\frac{1}{k}$, qui diverge (car $\alpha=1$). Elle est donc divergente

   d. La suite (V_n) est la suite des sommes partielles de la série divergente de terme strictement négatif précédente. A fortiori, la suite V_n diverge vers $-\infty$, en décroissant. Et donc $\lim_{n\to+\infty}V_n=-\infty$ Par conposition de limites, il vient alors

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{V_n}=0$$

3. a. Pour $n\geqslant 2$, montrer que

$$\begin{array}{ll}\ln(nu_n) & =\ln(n\mathrm{e}^{V_n})=\ln(n)+V_n\\ & =\ln(n)+\sum_{k=2}^n\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})\end{array}$$

   Or, il résulte du principe des sommes téléscopiques que

$$\begin{array}{ll}\sum_{k=2}^n\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) & =\sum_{k=2}^n\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ & =\sum_{k=2}^n\left(\ln(k-1)-\ln(k)\right)\\ & =\ln(1)-\ln(n)=-\ln(n)\end{array}$$

   En particulier, nous déduisons des deux identités précédentes que

$$\ln(nu_n)=\sum_{k=2}^n\left(\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

b. En procédant à un calcul de développement limité, il vient

$$\begin{aligned}\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})-\ln\left(1-\tfrac{1}{k}\right) &= -\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k^2}+o(\tfrac{1}{k^2})-\left(-\tfrac{1}{k}+\frac{\left(-\frac{1}{k}\right)^2}{2}+o(\tfrac{1}{k^2})\right)\\ &= -\tfrac{3}{2k^2}+o(\tfrac{1}{k^2})\end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\sim-\frac{3}{2k^2}$

c. Comme cet équivalent reste strictement négatif au voisinage de l'infini, nous remarquons que la série $\sum_{k=2}^{n}\left(\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$ a la même nature qu'une série de Riemann convergente. Comme elle converge vers un nombre réel, nous en déduisons que $\ln(nu_n)$ converge vers un nombre réel ℓ et par conséquent que la quantité nu_n converge vers $K=\mathrm{e}^{\ell}>0$ et en conclusion que

$$u_n\sim\frac{K}{n}$$

A fortiori, la série de terme général u_n est divergente (car elle a la même nature qu'une série de Riemann divergente)

4. Pour $n\geqslant 2$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_k$

a. Comme $u_n=\mathrm{e}^{V_n}$, comme la suite V_n est décroissante, par composition avec la fonction croissante exponentielle, nous remarquons que la suite u est décroissante.

b. • La suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante car

$$S_{2(n+1)}-S_{2n}=(-1)^{2n+1}u_{2n+1}+(-1)^{2n+2}u_{2n+2}=-u_{2n+1}+u_{2n+2}\leqslant 0$$

• La suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante car

$$S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}=(-1)^{2n+2}u_{2n+2}+(-1)^{2n+3}u_{2n+3}=u_{2n+2}-u_{2n+3}\geqslant 0$$

• De plus, on a $S_{2n+1}-S_{2n}=(-1)^{2n+1}u_{2n+1}=-u_{2n+1}$ Et cette suite tends vers 0 car $u_n\sim\frac{K}{n}$.

En particulier, les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes

c. Comme ces deux suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ et comme ce sont les suites des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite $(S_n)_{n\leqslant 2}$. Nous en déduisons que la suite des sommes partielles S converge et à fortiori que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Exo III. **EML.** Soit $n\geqslant 2$. Pour $1\leqslant i\leqslant n$, on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficientssont nuls sauf celui de la $i^{\text{ième}}$ ligne, qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(V_1,\cdots,V_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Pour $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$, on note $E_{i,j}=V_i{}^{\mathrm{t}}V_j$, qui est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1 (c'est un vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi_A(M) = AM - MA$$

1. **Quelques généralités**

a. • $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (le même au départ et à l'arrivée)

• Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices A, M, AM, MA et $AM - MA$ sont toutes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que Φ_A est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour $(M,M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda M + \mu M') &= A(\lambda M + \mu M') - (\lambda M + \mu M')A \\
&= \lambda AM + \mu AM' - \lambda MA - \mu M'A \\
&= \lambda(AM - MA) + \mu(AM' - M'A) \\
&= \lambda\Phi_A(M) + \mu\Phi_A(M')
\end{aligned}$$

A fortiori, Φ est linéaire

En conclusion, Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b. Comme $\Phi_A(I_n) = A \times I_n - I_n \times A = A - A = 0$, nous remarquons que $I_n \in \mathrm{Ker}(\Phi_A)$. Comme $\mathrm{Ker}(\Phi_A) \neq \{0\}$, l'endomorphisme Φ_A n'est pas injectif. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il ne peut donc pas être surjectif (mêmes dimensions au départ et à l'arrivée).

2. **Etude d'un cas particulier** Dans cette partie seulement, on suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a. • $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 car

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = 1.X_1$$

• $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 3 car

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0+6 \end{pmatrix} = 3.X_2$$

A fortiori, la matrice A est diagonalisable et vérifie $A = PDP^{-1}$ pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0_N R & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
AE_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{1,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
AE_{1,2} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{1,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
AE_{2,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
AE_{2,2} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
\Phi_A(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= -E_{1,2} \\
\Phi_A(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= -2E_{1,2} \\
\Phi_A(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &= E_{1,1} + 2E_{2,1} - E_{2,2} \\
\Phi_A(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= E_{1,2}
\end{aligned}$$

En particulier

$$\mathcal{M} = Mat_{BC}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2

c.

- $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre 0 car

$$MX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = 0.X_1$$

- $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre 0 car

$$MX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2+2.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = 0.X_2$$

- $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre -2 car

$$MX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2X_3$$

- $X_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre -2 car

$$MX_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2-2+2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 2X_4$$

A fortiori, la matrice A est diagonalisable

3. **Etude du cas ou A est diagonalisable**.
On suppose dans cette partie que A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont nous noterons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ coefficients sur la diagonale principale (qui sont valeurs propres) telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Vous êtes susceptible d'utiliser les propriétés de la transposée, allez réviser dans votre poly de cours et votre ajout de diagonalisation (je vous donne le droit de les consulter en cours de ds)

a. Supposons que A soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. En transposant, on obtient alors que

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}A &= {}^{\mathrm{t}}\left(PDP^{-1}\right) = {}^{\mathrm{t}}(P^{-1})\,{}^{\mathrm{t}}PD \\ {}^{\mathrm{t}}A &= ({}^{\mathrm{t}}P)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}D\,{}^{\mathrm{t}}P \\ {}^{\mathrm{t}}A &= ({}^{\mathrm{t}}P)^{-1}D\,{}^{\mathrm{t}}P \end{aligned}$$

En particulier, la transposée de A est diagonalisable, pour la même matrice diagonale que A. De sorte que leurs valeurs propres sont les mêmes (et de même multiplicité).

b. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs propres de A et ${}^{\mathrm{t}}A$ pour les valeurs propres λ et μ. Alors, on a

$$\begin{aligned} \Phi_A(X^{\mathrm{t}}Y) &= AX^{\mathrm{t}}Y - X^{\mathrm{t}}YA \\ &= (AX)^{\mathrm{t}}Y - X^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AY) \\ &= \lambda X^{\mathrm{t}}Y - X^{\mathrm{t}}(\mu Y) \\ &= \lambda X^{\mathrm{t}}Y - \mu X^{\mathrm{t}}Y \\ &= (\lambda - \mu)X^{\mathrm{t}}Y \end{aligned}$$

Comme $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, nous remarquons de plus que $X^{\mathrm{t}}Y \neq 0$ et que $X^{\mathrm{t}}Y$ est un vecteur propre de Φ_A pour la valeur propre $\lambda - \mu$

c. Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F}$ la famille $(X_i{}^{\mathrm{t}}Y_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique n-uplet $(a_1, \cdots, a_n)$ tel que

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Comme $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique n-uplet $(b_1, \cdots, b_n)$ tel que

$$V_j = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell Y_\ell$$

A fortiori, nous obtenons que

$$V_i{}^{\mathrm{t}}V_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) \times {}^{\mathrm{t}}\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell Y_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell (X_k{}^{\mathrm{t}}Y_\ell)$$

En particulier, $V_i{}^{\mathrm{t}}V_j$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. A fortiori, la famille $(V_i{}^{\mathrm{t}}V_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$ de n^2 vecteurs linéarement indépendants (c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, qui est donc de dimension n^2 et engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, la famille $\mathcal{F}$, de n^2 vecteurs, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

d. D'après les questions précédentes, la matrice de Φ_A admet une base (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres : la famille $\mathcal{F}$. A fortiori, Φ_A est diagonalisable

e. On a justement montré que les vecteurs propres de Φ_A sont les matrices $X_i{}^{\mathrm{t}}Y_j$ où les $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de A (de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$) et où les $(Y_1, \cdots, Y_n)$ foement une base de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}A$, de valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_n$. Et les valeurs propres associées à ces vecteurs sont alors les différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Exo IV. **Mephistolus.** On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Nous remarquons que

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-1 & 1 & -1+2 \\ 1 & 1-1 & 1-2 \\ 1-2 & -1+2 & -1-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A fortiori, P est la matrice d'une projection p

2. Nous remarquons que

$$P \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad P \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 110 \qquad P \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 01-1$$

En particulier, on a $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$

3. p est une projection sur son image (support), parallélement à son noyau (direction)
4. On a trouvé un vecteur propre pour $\lambda = 0$ et deux vecteurs propres pour la valeur propre 1, de sorte que $P = QDQ^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. D'après la relation précédente, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} P^k = \sum_{k=0}^{n} (QDQ^{-1})^k = Q(\sum_{k=0}^{n} D^k)Q^{-1}$$

Or on a $D^k = D$ Et du coup, la somme n'a pas de limite...désolé... énoncé mal conçu

Exo V. **Edhec.** On désigne par α et p deux réels de]0,1[. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches. Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α (alpha) de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1 - \alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1 - p$. Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

-
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur
- G le gain du joueur à la fin du jeu

1. a. X est le le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié, c'est le rang de la premiere disqualification moins 1. autrement dit $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre α. Et on a

$$P(X = k) = \alpha(1-\alpha)^k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

   b. $T = X + 1$ est une loi géométrique que paramètre α. On a donc $E(T) = \frac{1}{\alpha}$ et $E(X) = E(T) - 1 = \frac{1\ -\alpha}{\alpha}$

   c. De même $V(X) = V(T) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$

2. a. Pour $n \geqslant 0$, $X = n$, Y designe le nombre de succès (gain) au cours de n expèriences aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernouilli de paramèrtre p, de sorte que Y sachant $X = n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n{,}p)$ et on a

$$P_{X=n}(Y = k) = \binom{n}{k}^k (1-p)^{n-k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

b. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(X=n)_{n\geqslant 0}$, il vient

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)P_{X=n}(Y=k)\\
&= \sum_{n=0}^{n-1} P(X=n)\times 0 + \sum_{n=k}^{\infty} P(X=n)P_{X=n}(Y=k)\\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^n\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \alpha p^k(1-\alpha)^k\sum_{n=k}^{\infty}(1-\alpha)^{n-k}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\\
&= \alpha p^k(1-\alpha)^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\left((1-\alpha)(1-p)\right)^{n-k}\\
&= \alpha p^k(1-\alpha)^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{n-k}\left((1-\alpha)(1-p)\right)^{n-k}\\
&= \alpha p^k(1-\alpha)^k\frac{1}{(1-((1-\alpha)(1-p)))^{k+1}}\\
&= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-p)}\left(\frac{p(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-p)}\right)^k \qquad (k\geqslant 0)
\end{aligned}$$

3. Comme $Y-1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-p)}$, l'espérance de Y est

$$\frac{1-(1-\alpha)(1-p)}{\alpha}-1$$

On admettra que $V(Y)=\frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$ (c'était demandé)

4. a. On a $G=Y-(X-Y)=2Y-X$
   b. On a donc $E(G)=2E(Y)$
5. Compléter le script suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y

```
alpha = input('entre la valeur de alpha : ')
p = input('entrer la valeur de p : ')
// pour cettesolution, en une ligne, on va supposer que le nombre de
parties est limité à 1000

X = min(find(rand(1, 1000) < alpha)-1 // c'est abuser mais sinon, il
faut une boucle while ou l'instruction "grand"
Y = sum(rand(1, X)<p)
disp(X)
disp(Y)
```