

# 1. Révisions, suites de référence

## 1.1 Révisions

simplifier  
fraction

**Exercice 1.1.1** Simplifier

F

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{15} + \frac{5}{6} \quad \frac{1}{6} + \frac{6}{8} + \frac{5}{9} \quad \frac{\frac{4}{25} - \frac{6}{35}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{15}} \quad \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{9}{4} + \frac{21}{6}\right) \quad \frac{\frac{26}{18} \times \frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}$$

simplifier  
puissance

**Exercice 1.1.2** Simplifier  $\frac{(-18)^7 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$

F

simplifier  
ln

**Exercice 1.1.3** Exprimer  $\ln(4\sqrt{2})$  en fonction de  $\ln(2)$ .

F

simplifier  
racine

**Exercice 1.1.4** Simplifier

FM

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$$

quantité conjuguée

résoudre  
polynôme

**Exercice 1.1.5** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

F

$$\begin{aligned} E_1 : 3x^4 + 5x^2 - 2 &= 0 & E_2 : (\ln x)^2 + 3 \ln(x) + 2 &= 0 \\ E_3 : e^x + e^{-x} &= 2 & E_4 : \ln(3x) + \ln(x-1) &= \ln(2) + 2 \ln(3) \\ E_5 : x = \sqrt{x+2} & & E_6 : \sqrt{x^2-9} &= 4-x \\ E_7 : 3^{2x} - 3^{x+1} + 2 &= 0 & & \end{aligned}$$

équivalences  
forme canonique  
changer l'inconnue

résoudre  
valeur absolue  
polynôme  
racine

**Exercice 1.1.6** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

FM

$$\begin{aligned} E_1 : |x^2 + x + 1| &= |x| & E_2 : |2x + 1| &= x - 4 \\ E_3 : \sqrt{|x^2 - 1|} &= x - 5 & & \end{aligned}$$

équivalences  
forme canonique  
cas

résoudre  
valeur absolue  
polynôme  
racine  
puissance

**Exercice 1.1.7** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes

FM

$$\begin{aligned} E_1 : x^3 + 5x &\leq 6x & E_2 : \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} &\leq 1 & E_3 : 3 \times 2^{3x-4} &\geq 7^8 \\ E_4 : |x^2 - 2| &\geq 2 & E_5 : |x+4| &\leq 5-3x & E_6 : |x-4| &\leq |2x+1| \\ E_7 : |x-3| + |x^2 - 3x + 2| &\leq 2 & E_8 : x - 4\sqrt{x-2} &\geq 0 & & \end{aligned}$$

équivalences  
forme canonique  
même dénominateur  
cas

résoudre  
polynôme  
racine  
valeur absolue

**Exercice 1.1.8** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes

FM

$$\begin{aligned} E_1 : 1 - x^2 &\geq 0 & E_2 : x^2 + 2 &\leq 5x - 4 & E_3 : \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} &< 3 \\ E_4 : x - 1 &\leq \sqrt{x+2} & E_5 : \frac{x^2+2}{x^2-2} &\geq 2 & E_6 : \frac{x-1}{x+1} &< \frac{2}{x-1} \\ E_7 : |2x+1| &\leq |x-3| \leq 2 & E_8 : |x+1| - |2x-1| &\leq 1 & & \end{aligned}$$

équivalences  
forme canonique  
cas

dérivabilité  
dérivée

**Exercice 1.1.9** Dérivez les fonctions suivantes, là où elles sont dérivables. :

F

dérivabilité (F)

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 1 & \quad \frac{1}{x} & \quad \frac{1}{x^3} & \quad \sqrt{x+2} & \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ x \ln(x) - x & \quad \sin(x) \cos(x) & \quad \cos(x)^2 - \sin(x)^2 & \quad \frac{x+1}{x+2} & \quad x \cos(x) e^x \\ \frac{x}{x^2+1} & \quad \tan(x) & \quad \frac{e^{2x}+1}{e^x} & \quad \frac{e^x}{e^{2x}+1} & \quad \ln \frac{x+1}{x-1} \\ \ln(\cos(x)) & \quad e^{3x} \sin(x^2) & \quad \frac{e^{x^2}}{2x} & \quad \ln(\ln(x)) & \quad \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{aligned}$$

définition  
dérivabilité  
dérivée

**Exercice 1.1.10** Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée des fonctions

FM

définition (F)  
dérivabilité (F)

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \ln(2-x) & g : x &\mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ h : x &\mapsto x \ln\left(\frac{x+2}{3x-1}\right) & i : x &\mapsto \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

majorer **Exercice 1.1.11** Pour  $x \geq 1$ , prouver que  $\ln(x) \leq \sqrt{x}$ .

F  
tableau de variation

majorer **Exercice 1.1.12** Pour  $x \leq 0$ , prouver que  $1 - x + \frac{x^2}{2} \leq e^{-x}$ .

F  
tableau de variation

## 1.2 Suites de référence

$u_n$   
sommer **Exercice 1.2.13** Soit  $u$  la suite arithmétique vérifiant  $u_0 = \frac{2}{3}$  et  $u_{11} = 0$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
2. Calculer  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$

F  
suite arithmétique

$u_n$   
sommer **Exercice 1.2.14** On considère la suite  $u$  définie par  $u_{n+1} = -\frac{u_n}{4}$  ( $n \geq 0$ ).

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $u_0$  et de  $n$
2. Calculer  $v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

F  
suite géométrique

attribut **Exercice 1.2.15** Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts,  $a$  étant non nul. On suppose que  $a, b, c$  sont en progression arithmétique et que  $3a, b, c$  sont en progression géométrique. Que dire de la raison de cette progression géométrique?

FM  
suite arithmétique  
suite géométrique  
système

$u_n$  **Exercice 1.2.16** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour les suites  $u$  définies par

1.  $u_0 = 2, u_1 = \sqrt{5}$  et  $u_{n+2} + u_{n+1} = u_n$  ( $n \geq 0$ )
2.  $u_0 = 1, u_1 = 1$  et  $8u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$  ( $n \geq 0$ )
3.  $u_0 = 1, u_1 = -1$  et  $9u_{n+2} + 6u_{n+1} + u_n = 0$  ( $n \geq 0$ )
4.  $u_0 = -1, u_1 = \sqrt{3}$  et  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$  ( $n \geq 0$ )
5.  $u_0 = 1, u_1 = 1$  et  $u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0$  ( $n \geq 0$ )

F  
récurrence linéaire  
forme canonique

relation  
 $u_n$  **Exercice 1.2.17** Deux suites  $u$  et  $v$  vérifient  $u_0 = -2, v_0 = 1$  et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

1. Démontrer que la suite  $u$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2
2. En déduire  $u_n$  puis  $v_n$  en fonction de  $n$

FM  
récurrence linéaire  
forme canonique

résoudre  
relation  
 $u_n$  **Exercice 1.2.18** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = 2u_n - n - 2$  pour  $n \geq 0$ .

1. Déterminer une suite arithmétique  $v$  vérifiant  $v_{n+1} = 2v_n - n - 2$  pour  $n \geq 0$
2. Déterminer une relation satisfaite par  $w = u - v$
3. En déduire  $w_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

M  
suite arithmétique  
suite géométrique

existence  
 $u_n$   
sommer **Exercice 1.2.19** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $6u_{n+1} = 2u_n + 6n + 3$  pour  $n \geq 0$ .

1. Montrer qu'il existe un réel  $b$ , indépendant de  $n$ , telle que  $v_n = 2u_n - bn + 3$  soit une suite géométrique.
2. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$
3. Calculer  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

M  
suite géométrique

uite géométrique  
 $u_n$  **Exercice 1.2.20** Soient  $u$  et  $v$  deux suites vérifiant  $u_0 = 2, v_0 = -1$  et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

on pose  $a_n = u_n + v_n$  et  $b_n = 2u_n - v_n$  pour  $n \geq 0$

1. Montrer que les suites  $a$  et  $b$  sont géométriques
2. Déterminer l'expression de  $a_n$  et de  $b_n$  en fonction de  $n$
3. En déduire l'expression de  $u_n$  et de  $v_n$  en fonction de  $n$

M

$u_n$   
limite **Exercice 1.2.21** Déterminer  $u_n$  ainsi que sa limite pour

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad (n \geq 0).$$

F  
récurrence linéaire

convergence

**Exercice 1.2.22** Soient  $(a,b) \in ]0, \infty[^2$  et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = a, u_1 = b$  et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n-1}} \quad (n \geq 0).$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et calculer sa limite.

**M**

ln  
récurrence linéaire

$u_n$   
sommer

**Exercice 1.2.23** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $2u_{n+1} = u_n + 3 \quad (n \geq 0)$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer  $v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

**M**

suite arithmétique-  
co-géométrique

$u_n$

**Exercice 1.2.24** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour  $u$  vérifiant  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 5 \quad (n \geq 0)$ .

### 1.3 DM

**F**

suite arithmétique-  
co-géométrique

**Exercice 1.3.25** Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

continuité  
dérivabilité

1. étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 (*taux d'accroissement...*).
2. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$ .

variations

- a. étudier les variations de  $\varphi$ .
- b. établir que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution  $\beta$ .  
On admettra que  $0,27 \leq \beta \leq 0,28$ .

tableau de variation

dérivée

- c. Pour  $x > 0$ , exprimer  $f'(x)$  à l'aide de  $\varphi(x)$ .
- d. En déduire les variations de  $f$ .
3. Déterminer la limite
  - a. de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  - b. de  $\ln(x) - f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
4. Construire soigneusement les courbes représentatives  $\mathcal{C}$  de  $f$  et  $\Gamma$  de  $x \mapsto \ln(x)$  dans un repère orthonormé.

factoriser le terme  
dominant  
même dénominateur  
croissance comparée

## 2. Logique

### 2.1 Logique

vrai ou faux

**Exercice 2.1.1** Quelle est la valeur logique des propositions suivantes ?

1. 2 est pair  $\implies$  4 est pair
2. 2 est pair  $\implies$  3 est pair
3. 2 est impair  $\implies$  3 est pair
4.  $4 > 1 \iff 4^2 > 1$
5. Le ciel est bleu  $\iff 2 + 2 = 4$ . Peut on en déduire que 3 est pair ? que  $16 > 1$  ?

FM

implication

vrai ou faux

**Exercice 2.1.2** Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses... ou autre chose :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*, x = 0$
2.  $\exists x \in \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{N}, x^2 > 0$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \implies x < 0$
4.  $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 < 0 \implies x < 0$ .

F

quantificateur  
implication

vrai ou faux

**Exercice 2.1.3** Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1.  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$
2.  $\forall y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$
3.  $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, xy = x$

FM

quantificateur

vrai ou faux

**Exercice 2.1.4** Déterminer la valeur logique des propositions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| a. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$               | g. $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} > x,$        |
| b. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq -5,$          | h. $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} = -x,$       |
| c. $\forall x \geq 0 : x^2 - 4 = \sqrt{(x^2 - 4)^2},$ | i. $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} = e^x,$   |
| d. $\forall x \in \mathbb{R} : x = \ln(e^x),$         | j. $\exists x \in \mathbb{R} : \ln x - \ln(2x) = 3,$ |
| e. $\forall x > 0 : x = e^{\ln x},$                   | k. $\exists x \geq 0 : 3x + 5 < 0,$                  |
| f. $\forall x \leq 0 : \sqrt{x^2} = -x,$              | l. $\exists x < 0 : \ln(\sqrt{x^2 - 1}) = 3.$        |

quantificateur

vrai ou faux  
négation  
contraposée

**Exercice 2.1.5** Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou non (justifier votre réponse), et écrire sa négation. Écrire la contraposée de (3) et (4).

1.  $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, x = ab$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x = ab$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq 4 \implies (x \geq 2 \text{ et } y \geq 2)$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 2x^2 + x = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2)$

FM

quantificateur  
implication  
*overlinemathcalP*  
or *mathcalQ*

transformer

**Exercice 2.1.6** Donner la négation des propositions suivantes

- |  |  |
|--|--|
| a. $x = 1 \text{ ou } x = -1$                                    | b. $0 \leq x < 1$                        |
| c. $(x = 0) \text{ ou } x(x^2 = 1 \text{ et } x \leq 0)$         | d. $x \geq 3 \implies x^2 > 5$           |
| e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$ | f. $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 3$ |

F

négation  
implication  
ou  
et  
quantificateur  
*overlinemathcalP*  
or *mathcalQ*

### 2.2 Raisonnements

prouver

**Exercice 2.2.7** Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $0 \leq x \leq \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$ . Montrer que  $x = 0$ .

F

absurde

prouver

**Exercice 2.2.8** Soit  $n \geq 1$ . On suppose que  $4n + 1$  crayons sont rangés dans  $n$  tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 crayons.

F

absurde

prouver

**Exercice 2.2.9** Soient  $x$  et  $y$  des nombres réels. Prouver que  
 $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies xy + 1 - x - y \neq 0$

F

implication  
MARRE

prouver

**Exercice 2.2.10** Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Démontrer l'implication suivante, en utilisant sa contraposée :  
« si  $n^2$  est impair, alors  $n$  est impair ».

F

contraposée  
MARRE

résoudre

**Exercice 2.2.11** Trouver l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  vérifiant

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)(z-3) = 0 \\ (x-2)(y-3)(z-1) = 0 \\ (x-3)(y-1)(z-2) = 0 \end{cases}$$

FM  
cas

prouver

**Exercice 2.2.12**

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  est pair  $\iff 3n + 1$  est impair.
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  est pair  $\iff n^3$  est pair.
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  est pair  $\implies 2n^2 + 1$  est impair.  
La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse
4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x \in ]-1; 2[ \implies \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in \left] \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 \right]$ .  
La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x \geq 0 \iff \sqrt{\ln(3x+1)+4} \geq 2$ .

FM  
équivalence  
implication  
MARRE

résoudre

**Exercice 2.2.13** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la proposition  $\mathcal{P}_n : 2^n > n^2$ .

1. Pour quelles valeurs de  $n$  l'implication  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$  est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de  $n$  la proposition  $\mathcal{P}_n$  est-elle vraie ?

F  
récurrence faible

### 3. Récurrences, sommes, produits, factorielles

- définition encadrer  $u_n$**  **Exercice 3.1** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$  pour  $n \geq 0$ .  
 1. Montrer que la suite  $u$  est bien définie et vérifie  $u_n > 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
 2. Montrer que  $u_n = 3^{2^{-n}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **M**  
récurrence faible
- définition encadrer** **Exercice 3.2** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$  pour  $n \geq 0$ . Montrer que la suite  $u$  est bien définie et vérifie  $0 \leq u_n \leq 1$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **FM**  
récurrence faible
- divisibilité** **Exercice 3.3** Montrer que  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7 pour  $n \in \mathbb{N}$ . **MD**  
récurrence faible
- somme** **Exercice 3.4** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que
- $$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$
- $u_n$**  **Exercice 3.5** Soit  $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant la relation  $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .  
 1. si  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$ , prouver que  $u_n = 2^n$  pour  $n \geq 0$ .  
 2. si  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$ , prouver que  $u_n = 3^n - 2^n$  pour  $n \geq 0$ . **F**  
récurrence à 2 pas  
ou  
récurrence linéaire
- $u_n$**  **Exercice 3.6** Soit  $u$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$  pour  $n \geq 0$ . Vérifier que  $u_n = 1 + 2^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **FM**  
récurrence à 2 pas  
ou  
récurrence linéaire
- définition encadrer  $u_n$**  **Exercice 3.7** Soit  $u$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 4$  et  $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^4}{(u_n)^3}$  pour  $n \geq 0$ .  
 1. Montrer que la suite  $u$  est bien définie et vérifie  $u_n > 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
 2. Montrer que  $u_n = (\sqrt{2})^{3^{n+1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **M**  
récurrence à 2 pas  
ou  
ln  
récurrence linéaire
- sommer** **Exercice 3.8** Pour  $n \geq 0$ , prouver que  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ . **F**  
récurrence faible  
ou  
somme télescopique
- sommer** **Exercice 3.9** Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $\sum_{k=0}^n k!k = (n+1)! - 1$ . **F**  
récurrence faible  
ou  
somme télescopique
- sommer** **Exercice 3.10** Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $u_n = \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ . **M**  
fraction  
récurrence faible  
ou  
somme télescopique
- sommer** **Exercice 3.11** Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^4 + 4} = (-1)^n \frac{n+1}{4(n+1)^2 + 1}$ . **M**  
somme télescopique  
récurrence faible  
fraction
- encadrer** **Exercice 3.12** Montrer que  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **FM**  
récurrence faible
- sommer** **Exercice 3.13** Montrer que  $\sum_{k=3}^n 4k(k-1)(k-2) = (n+1)n(n-1)(n-2)$  pour  $n \geq 0$ . **FM**  
récurrence faible
- encadrer** **Exercice 3.14** On considère une suite  $(u_n)$  vérifiant  $u_{n+1} \leq au_n$  pour un réel positif  $a$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $u_n \leq a^n u_0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **F**  
récurrence faible
- sommer** **Exercice 3.15** Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . **F**  
récurrence faible
- sommer** **Exercice 3.16** Ecrire les formules suivantes en utilisant le symbole  $\sum$ . **FM**

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 99, \quad S_2 = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n,$$

$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n+2}{3^{n+2}}, \quad S_4 = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2n+4},$$

$$S_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{2p\sqrt{2p}}$$

somme **Exercice 3.17** Calculer les sommes suivantes:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (5 \times 3^{-k} - 4 \times 2^{2k-1}) \quad A_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 k + nk^2 - 3k^3}{n^4} \quad I_n = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)3^k - 5^{k-1}}{3^k}$$

$$J_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{5}{6^{k-1}}$$

**M**  
séparer  
somme géométrique  
somme de Bernoulli

somme **Exercice 3.18** Simplifier les sommes suivantes, puis les calculer lorsque c'est possible.

$$S_1 = \sum_{k=1}^n (3k + 5), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{2n} 3^{i+n}, \quad S_3 = \sum_{n=0}^{50} \left( \frac{5}{n+3} - \frac{5}{n+4} \right),$$

$$S_4 = \sum_{0 \leq k \leq n} \left( 3(-1)^k + \frac{4}{k+1} \right), \quad S_5 = \sum_{3 \leq k \leq n+3} \left( (k-3)^2 + \frac{5}{k-2} - (k-3) \right).$$

**M**  
séparer  
somme géométrique  
somme télescopique  
somme de Bernoulli

somme **Exercice 3.19**

- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$  pour  $n \geq 1$ .
- En déduire la valeur de la somme  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{k(k+1)}$

**FM**  
système  
somme télescopique

somme **Exercice 3.20**

- Déterminer des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$  pour  $n \geq 3$ .
- En déduire la valeur de la somme  $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k^2-1)}$ .

**FM**  
système  
somme télescopique

somme **Exercice 3.21** Soit  $q \neq 1$

- Calculer  $(1-q) \sum_{k=0}^n q^k$  et en déduire  $\sum_{k=0}^n q^k$ .
- Application : calculer les sommes  $\sum_{k=1}^{2n} q^k$  et  $\sum_{k=0}^n q^{2k+1}$ .

**F**  
séparer  
développer  
somme télescopique

somme **Exercice 3.22** L'objectif de cet exercice est de calculer pour  $0 \leq p \leq 3$ , les sommes de Bernoulli

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p \quad (n \geq 0)$$

- Pour  $n \geq 0$ , que valent  $S_0(n)$  et  $S_1(n)$  ?
- En remarquant que  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ , calculer  $\sum_{k=0}^n (2k+1)$  et retrouver  $S_1(n)$
- En remarquant que  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ , calculer  $\sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1)$  et en déduire  $S_2(n)$
- Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  et  $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2$ .

**M**  
somme arithmétique  
développer  
 $a^n - b^n$   
séparer  
somme télescopique

somme **Exercice 3.23** Calculer  $\sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq i \\ i-j \leq p}} (i-j)^2$ .

**M**  
changement d'indice  
somme de Bernoulli

somme **Exercice 3.24** Pour  $n \geq 1$  et  $k \geq 1$ , montrer que  $\sum_{p=1}^n \frac{(p-1)!}{(p+k)!} = \frac{1}{k \times k!} - \frac{n!}{k(n+k)!}$ .

**M**  
réurrence faible  
(M)

somme multiplier **Exercice 3.25** Calculer les sommes et les produits suivants :

$$A = \sum_{k=1}^n \ln(k) \quad B = \prod_{k=1}^n e^k \quad C = \sum_{k=p}^{2p} k^2 \quad D = \prod_{k=1}^n k e^{-2k}$$

**M**  
In  
exp  
somme de Bernoulli  
Chasles

multiplier

**Exercice 3.26** Démontrer que  $\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

**M**

récurrence faible

encadrer  
multiplier

**Exercice 3.27** Montrer que  $\prod_{0 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$  pour  $n \geq 0$ .

**M**

récurrence faible  
racine  
équivalence

## 4. $\mathbb{R}$ et Suites

### 4.1 $\mathbb{R}$

**encadrer** **Exercice 4.1.1** Étudier l'existence d'un plus grand et d'un plus petit élément, d'une borne inférieure et d'une borne supérieure pour l'ensemble  $A := \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Les déterminer en cas d'existence.

**F**  
limite  
borne sup

### 4.2 Suites

**encadrer variations  $u_n$  sommer** **Exercice 4.2.2** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $2u_{n+1} = u_n + 3$

1. Montrer que  $u$  est minorée par 2 et majorée par 3.
2. Étudier la monotonie de  $u$ .
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer  $v_n = \sum_{k=0}^{n-3} u_k$

**FM**  
récurrence faible  
 $u_{n+1} - u_n$   
suite arithmético-géométrique  
somme géométrique

**variations** **Exercice 4.2.3** Étudier la monotonie des suites

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad w_n = \frac{\ln n}{n} \quad (n \geq 3)$$

**FM**  
 $u_{n+1}/u_n$   
 $u_{n+1} - u_n$   
 $u_n = f(n)$   
tableau de variation

**convergence** **Exercice 4.2.4** Déterminer la limite de  $u_n = \frac{\ln(n)^2 + \sqrt{n^2 + 1}}{\cos(n!) + n^2}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**F**  
factoriser le terme dominant  
croissance comparée  
**F** ération  
factoriser le terme dominant

**convergence** **Exercice 4.2.5** Déterminer la limite de  $u_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**FM**ance comparée  
opération  
récurrence faible  
 $u_{n+1}/u_n$   
monotone  
borné  
gendarmes

**définition encadrer variations convergence** **Exercice 4.2.6** Soit  $u$  la suite définie par la donnée de  $u_0 > 0$  et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n + 1} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer que  $u_n$  existe et que  $u_n > 0$  pour  $n \geq 0$ .
2. a. Étudier la monotonie de  $u$ .  
b. Montrer que  $u$  converge et déterminer sa limite éventuelle.
3. a. Établir que  $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$  pour  $n \geq 0$ .  
b. En déduire que  $u_n \leq \frac{u_0}{3^n}$  pour  $n \geq 0$ .  
c. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

**appartenir parité convergence** **Exercice 4.2.7**

1. Pour  $n \geq 0$ , prouver que  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$  est un entier pair.
2. En déduire que la suite de terme général  $u_n = \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$  converge vers 0.

**MD**  
 $(a+b)^n$   
séparer  
 $\sin(a+b)$

**encadrer** **Exercice 4.2.8** La suite définie par  $u_0 = a > 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$  ( $n \geq 0$ ) est-elle majorée ?

**FM**  
monotonie  
récurrence  
absurde  
**F**  
gendarmes

**convergence** **Exercice 4.2.9** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n$ .

**convergence** **Exercice 4.2.10** Étudier la convergence de la suite définie par  $u_n = \frac{\sqrt{1+4n^2}}{n+3}$  pour  $n \geq 0$ .

**F**  
factoriser le terme dominant  
**M**  
minorer absurde  
monotonie

**encadrer divergence** **Exercice 4.2.11** Soit  $u$  la suite définie par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

1. Montrer que  $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$  pour  $n \geq 1$ .
2. Prouver que  $u$  diverge.
3. En déduire que  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

**prouver** **Exercice 4.2.12** Montrer qu'une suite convergente d'entiers est constante à partir d'un rang  $N$ .

**M**  
raisonnement epsilon-  
nique

**Exercice 4.2.13** Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$  une suite convergeant vers  $\ell \in \mathbb{K}$ . Prouver que la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} u_k$  converge vers  $\ell$ .

MD

**Exercice 4.2.14** Démontrer que les suites  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  et  $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  sont adjacentes

FM

**Exercice 4.2.15** Soit  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $u$  une suite réelle. Traduire en français les propositions :

quantificateur

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon, & \quad (a) \\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon & \quad (b) \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon) & \quad (c) \end{aligned}$$

encadrer  
convergence

**Exercice 4.2.16**

- Pour  $x > 0$ , établir que  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ .
- Pour  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , établir la convergence et donner la limite de la suite définie par

$$u_n := \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{ka}{n^2}\right) \quad (n \geq 0).$$

D

tableau de variation  
ln  
somme arithmétique  
somme de Bernoulli  
inégalité  
gendarmes  
factoriser le terme dominant

convergence

**Exercice 4.2.17** Montrer la convergence de la suite  $u$  définie par  $u_n := \sum_{n \leq k \leq 2n} \frac{1}{k}$  pour  $n \geq 1$  et prouver que sa limite  $\ell$  vérifie  $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$ .

M

monotone  
borné  
 $\ell \leq \ell'$

convergence

**Exercice 4.2.18** Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx], \quad v_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n}{n^2 + k}, \quad w_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)!}$$

MD

partie entière  
partie fractionnaire  
inégalité  
gendarmes  
séparer  
majorer

encadrer  
convergence

**Exercice 4.2.19** Pour  $n \geq 0$ , on pose  $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{n}}}}$ .

- Montrer que  $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}u_n$  pour  $n \geq 0$ .
- La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?

MD

inégalité  
variations  
absurde

convergence

**Exercice 4.2.20** Soient  $u_0 > 0$  et  $v_0 > 0$ . Prouver que les suites  $u$  et  $v$  définie par

$$u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \quad (n \geq 0)$$

convergent vers la même limite.

D

$u_{n+1} - u_n$   
 $u_{n+1}/u_n$   
 $(a-b)^2$   
carré positif  
limite

variations  
encadrer  
convergence

**Exercice 4.2.21** Soit  $u$  la suite définie par

$$u_0 := -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} := \frac{1}{2} \left( u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}} \right) \quad (n \geq 0).$$

- Etudier la monotonie de  $u$ .
- Pour  $n \geq 1$ , établir que  $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{2^{-n}}$ .
- En déduire que la suite  $u$  converge.

M

$u_{n+1} - u_n$   
quantité conjuguée  
somme télescopique  
encadrer

convergence

**Exercice 4.2.22** Etudier la convergence de la suite  $u$  définie par

$$u_1 := 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} := \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}} \quad (n \geq 1).$$

M

$w_n =$   
suite géométrique

**convergence** **Exercice 4.2.23** Montrer qu'une suite bornée  $u$  vérifiant  $2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$  pour  $n \geq 1$  est convergente.

**D**  
 $u_n =$   
variations

**encadrer convergence** **Exercice 4.2.24** Soient  $u$  et  $v$  les suites de terme général

**MD**  
tableau de variation  
suites adjacentes  
ln

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1. Pour  $x > 0$ , établir que  $\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$
2. montrer que les suites  $u$  et  $v$  admettent la même limite  $\gamma$ , que l'on ne calculera pas

**suites adjacentes convergence** **Exercice 4.2.25** Soit  $u$  la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ . Montrer que les suites de termes général  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$  sont adjacentes. En déduire la nature de la suite  $u$ .

**FM**  
suites adjacentes

**suites adjacentes approximation** **Exercice 4.2.26** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ .

**M**  
Chasles  
fraction  
suites adjacentes  
inégalité

- a) Prouver que  $u_n$  et  $v_n$  sont adjacentes.
- b) Notant  $e$  leur limite commune, trouver une approximation rationnelle de  $e$  à  $10^{-3}$  près.

**suites adjacentes** **Exercice 4.2.27** Montrer que  $u_n = (1 + \frac{1}{1^2}) \cdots (1 + \frac{1}{n^2})$  et  $v_n = u_n(1 + \frac{1}{n})$  sont adjacentes.

**FM**  
 $u_{n+1}/u_n$   
fraction

**suites adjacentes** **Exercice 4.2.28** Prouver que  $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$  et  $T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$  sont adjacentes.

**M** toriser  
 $u_{n+1} - u_n$

**convergence** **Exercice 4.2.29** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$  pour  $n \geq 0$ . Montrer que la suite  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

**M**  
Chasles  
fraction  
monotonie  
borné  
 $\ell \leq \ell'$

**convergence** **Exercice 4.2.30** Étudier la convergence de  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} := \sin(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .

**M**  
suite récurrente  
 $u_{n+1} - u_n$

**encadrer variations convergence** **Exercice 4.2.31** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} := \sqrt{2 + u_n}$  pour  $n \geq 0$ .

**MD** ser  
suite récurrente  
monotone  
borné  
limite  
trigo  
suite géométrique  
réurrence faible

1. Prouver que  $u_n \in [0, 2]$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge vers  $\ell$  à déterminer.
3. En posant  $u_n = 2 \cos(x_n)$ , retrouver le résultat précédent.
4. trouver une constante  $a \in [0, 1[$  telle que  $|u_{n+1} - 2| \leq a |u_n - 2|$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et retrouver le résultat des questions 2 et 3.

**convergence** **Exercice 4.2.32** Étudier la convergence de  $u$  définie par  $u_0 := 1$  et  $u_{n+1} := 1 + \frac{2}{u_n}$  ( $n \geq 1$ ).

**M**  
suite récurrente

**encadrer variations convergence suite géométrique  $u_n$  somme** **Exercice 4.2.33** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{5u_n}{1 + 2u_n}$  pour  $n \geq 0$ .

**MD**  
suite récurrente  
homographie  
 $u_{n+1}/u_n$   
limite

1. Montrer que l'on a  $1 \leq u_n \leq 2$ .
2. Montrer que  $u$  est croissante et déterminer sa limite
3. Pour  $n \geq 0$ , on pose  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$ . Montrer que  $v$  est une suite géométrique et calculer sa raison
4. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
5. Pour  $n \geq 0$  calculer  $\frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \cdots + \frac{2}{u_n}$  en fonction de  $n$

**convergence** **Exercice 4.2.34** Étudier la suite donnée par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$  pour  $n \geq 0$ .

**D**  
suite récurrente  
homographie

**convergence** **Exercice 4.2.35** Étudier la suite donnée par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \frac{7u_n - 12}{3u_n - 5}$  pour  $n \geq 0$ .

**D**  
suite récurrente  
homographie

**Exercice 4.2.36** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les deux solutions de l'équation  $x = \frac{1}{3+x}$  avec  $\alpha > \beta$  et soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_n = \frac{1}{3 + u_{n-1}}$  pour  $n \geq 1$ .

**M**  
suite géométrique  
homographie

1. Montrer que la suite  $z$  de terme général  $z_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$  est géométrique.
2. En déduire que la suite  $u$  converge vers  $\alpha$ .

**Exercice 4.2.37** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{4 + u_n}$  pour  $n \geq 0$

**M**  
suite récurrente  
homographie  
récurrence faible

1. Montrer que la suite  $u$  est bien définie et que  $0 \leq u_n \leq 1$  pour  $n \geq 0$ .
2. Montrer que l'on définit une suite géométrique  $v$  en posant

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 + u_n} \quad (n \geq 0)$$

3. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$
4. Etudier la monotonie de la suite  $u$ 
  - a. Première méthode : étudier le signe de  $g(x) = f(x) - x$  sur  $\mathbb{R}^+$ . En déduire la monotonie de  $u$
  - b. Deuxième méthode : étudier la monotonie sur  $\mathbb{R}^+$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2x+3}{4+x}$ . Puis prouver par récurrence que  $\mathcal{P}_n : u_n \leq u_{n+1}$

**Exercice 4.2.38** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{u_n+2}$  pour  $n \geq 0$ .

**M**  
homographie  
suite géométrique

1. Montrer que l'intervalle  $[0,3]$  est stable par la fonction  $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$
2. Démontrer que  $u_n \in [0,3]$  pour  $n \geq 0$ .
3. Etudier le sens de variation de  $u_n$
4. Soit  $v$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$  pour  $n \geq 0$ .
  - a. Montrer que  $v$  est une suite géométrique et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - b. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

### 4.3 DMS

**Exercice 4.3.39** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . On définit les deux suites  $u$  et  $v$  en posant

**M**  
entier

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

1. a. Pour  $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ , montrer que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

- b. Montrer par récurrence, en utilisant le résultat précédent, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$$

- c. En déduire que les deux suites  $u$  et  $v$  sont convergentes. On note  $\ell = \lim u$  et  $\ell' = \lim v$ . Justifier avec soin que  $0 < \ell \leq \ell'$ .
2. a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2$$

puis que

$$\ell' - \ell = \frac{1}{2} (\sqrt{\ell'} - \sqrt{\ell})^2.$$

- b. Montrer que si  $\ell \neq \ell'$  alors  $\sqrt{\ell'} + \sqrt{\ell} = \frac{1}{2} (\sqrt{\ell'} - \sqrt{\ell})$
- c. En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que  $\ell = \ell'$ . On appelle la limite commune des suites  $u$  et  $v$  la moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ .
- d. Que valent les suites  $u$  et  $v$  quand  $a = 0$  et  $b > a$ ? Quelles sont leurs limites?

e. Que valent les suites  $u$  et  $v$  quand  $a = b$  ? Quelles sont leurs limites ?

**Exercice 4.3.40** On considère une fonction  $f$  possédant les trois propriétés :

( $P_1$ )  $f$  est définie et continue sur  $[-1,1]$ .

( $P_2$ )  $f$  est dérivable sur  $] - 1,1[$  et  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour  $-1 < x < 1$ .

( $P_3$ )  $f(0) = 0$ .

1. **Unicité de  $f$ .** Soit  $g$  une fonction vérifiant les trois propriétés précédentes.
  - a. Démontrer que  $f - g$  est constante.
  - b. En déduire que  $f = g$ .
2. **Etude de  $f$ .**
  - a. Démontrer que  $f(\sin t) = t$  pour  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
  - b. En déduire les valeurs de  $f(-1)$  et  $f(1)$ .
  - c. Dresser le tableau de variations de  $f$  et donner l'allure de son graphe. Que peut-on dire des tangentes au graphe en  $x = \pm 1$  ?
3. **Etude d'une suite.** On pose  $u_0 := \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} := \frac{2}{\pi} f(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .
  - a. Pour  $n \geq 0$ , montrer que le nombre  $u_n$  est bien défini et qu'il est dans  $[0,1]$ .
  - b. Dresser le tableau de variation de la fonction  $x \mapsto f(x) - \frac{\pi}{2}x$ . On fera apparaître le point  $x = 0$ .
  - c. En déduire que  $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$  pour  $0 \leq x \leq 1$ .
  - d. Prouver que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et positive.
  - e. On admet que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite  $\ell$ . Prouver que  $\ell = 0$ .

**Exercice 4.3.41** On considère la suite  $u$  définie

**M**

$$u_0 := 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n \quad (n \geq 0).$$

1. a. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- b. Démontrer que  $u$  est une suite croissante.
- c. Prouver que  $u$  ne peut pas converger vers une limite finie. Que peut-on en déduire pour le comportement à l'infini de  $u$  ?
2. Soit  $v$  la suite définie par

$$v_n := \frac{\ln u_n}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a. Démontrer que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- b. • Montrer que  $v$  est une suite croissante.  
 • Justifier que l'on a

$$v_{n+1} - v_n \leq \frac{\ln 2}{2^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- A l'aide de la somme télescopique  $\sum_{n=0}^{k-1} (v_{n+1} - v_n)$ , montrer que  $v$  est une suite majorée.  
 • En conclure que  $v$  converge vers une limite  $\ell > 0$ .

Dans la suite, on posera  $\alpha = e^\ell$ .

- Justifier que l'on a  $u_n \leq \alpha^{2^n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

c. • Pour  $p \geq n \geq 0$ , établir que l'on a

$$v_{p+1} - v_p \leq \frac{1}{2^{p+1}} \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

- A l'aide de la somme télescopique  $\sum_{p=n}^{k-1} (v_{p+1} - v_p)$ , en déduire que

$$v_k - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right) \quad (k \geq n).$$

- En fixant  $n$  et en faisant tendre  $k$  vers l'infini, prouver que

$$u_n \geq \alpha^{2^n} - 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

d. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \alpha^{-2^n}) = 1$ .

**Exercice 4.3.42** On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x + 2 - 2 \ln(e^x + 1)$$

et on note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. ÉTUDE DE LA FONCTION  $f$ .

- a. Justifier le fait que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Montrer que l'on a

$$f(x) = -x + 2 - 2 \ln(e^{-x} + 1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

En déduire que  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .

- c. Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tends vers  $+\infty$ .
- d. Démontrer que la droite  $D$  d'équation  $y = -x + 2$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  et étudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à l'asymptote  $D$ .
- e. Calculer  $f'(x)$ , étudier son signe et donner le tableau de variation de  $f$ .
- f. Déterminer la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = x$ .
- g. Montrer que l'on a

$$f''(x) = -2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- h. En déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{e-1}{e+1} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

2. CONVERGENCE DE LA SUITE  $u$ . On donne les valeurs approchées à  $10^{-2}$  près suivantes :

$$f(0) \simeq 0,61 \quad f(1) \simeq 0,37 \quad \text{et} \quad \ln(e-1) \simeq 0,54$$

- a. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$ .
- b. Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \left( \frac{e-1}{e+1} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- c. En déduire que  $u$  converge vers un réel à préciser.

## 5. Ensembles et applications

### 5.1 Ensembles

**traduire** **Exercice 5.1.1** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes et on note :

**F**

$$\begin{aligned} A &= \{\text{les deux cartes tirées sont rouges}\} \\ B &= \{\text{les deux cartes tirées sont un valet et un dix}\} \\ C &= \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages}\} \end{aligned}$$

1. Que représentent les ensembles  $D = \bar{A}$ ,  $E = A \cap B \cap \bar{C}$  et  $F = A \cap B \cap C$  ?
2. Ecrire à l'aide des ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  les ensembles

$$\begin{aligned} G &= \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouge}\} \\ H &= \{\text{on obtient au plus un personnage rouge}\} \end{aligned}$$

**ensemble** **Exercice 5.1.2** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $A_n = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**F**

1. Déterminer  $\bigcup_{n=1}^{10} A_n$  et  $\bigcap_{n=1}^{10} A_n$  puis  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$  et  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$
2. idem pour  $B_n = [n, n+1[$ , pour  $C_n = [\frac{1}{n}, +\infty[$ , pour  $D_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  et pour  $E_n = [-\frac{1}{n}, +\infty[$

**ensemble cardinal** **Exercice 5.1.3** Déterminer l'ensemble  $\mathcal{P}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$  ainsi que son cardinal

**F**

**inclusion équivalence** **Exercice 5.1.4** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

**FM**

**MARRE**

1. Montrer que  $A \cap B \subset A$  puis que  $A \cap B \subset B$ .
2. Montrer que  $(A \subset B) \iff (A \cap B = A)$
3. Montrer que  $(A \subset B) \iff (A \cup B = B)$  Montrer que  $(A \subset B) \iff (\bar{B} \subset \bar{A})$

**équivalence** **Exercice 5.1.5** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-ensembles de  $E$ .

**M**

**MARRE**

1. Montrer que  $(A \cup B = A \cap C) \iff (B \subset A \text{ et } A \subset C)$
2. Si  $A \cup B = A \cap C$ ,  $(B \cup C = B \cap A)$  et  $(C \cup A = C \cap B)$ , en déduire que  $A = B = C$ .
3. Montrer que  $(A \subset B) \iff (A \cup B = B)$  Montrer que  $(A \subset B) \iff (\bar{B} \subset \bar{A})$

**inclusion** **Exercice 5.1.6** Etant donnée une famille  $(A_n)_{n \geq 1}$  de parties d'un ensemble  $E$  et

**FM**

**MARRE**  
**ou**  
**Chasles**

$$B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k \quad \text{et} \quad C_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad (n \geq 1),$$

établir de deux manières différentes que  $B_{n+1} \subset B_n$  et que  $C_n \subset C_{n+1}$  pour  $n \geq 1$

### 5.2 Applications

**injection surjection** **Exercice 5.2.7** L'application définie par  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est elle injective ? surjective ?

**F**

**injection**  
**contre-exemple**

**injection surjection** **Exercice 5.2.8** On pose  $f : A \rightarrow B$  avec  $f(x) = x^2$ . Préciser dans les cas suivants les propriétés de  $f$  (injective, surjective, bijective, etc...) en justifiant brièvement :

**ou**  
**F** résoudre  $y = f(x)$   
**contre-exemple**  
**ou**  
résoudre  $y = f(x)$

1.  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R}$
2.  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $B = \mathbb{R}$
3.  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R}^+$
4.  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $B = \mathbb{R}^+$
5.  $A = \mathbb{R}^-$ ,  $B = \mathbb{R}^+$
6.  $A = \mathbb{R}^-$ ,  $B = \mathbb{R}^-$

**injection surjection** **Exercice 5.2.9** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  et soit  $g$  sa restriction au départ à  $[1, +\infty[$ . Montrer que  $f$  n'est pas injective puis que  $g$  est injective mais pas surjective.

**F**

**contre-exemple**  
**ou**  
résoudre  $y = f(x)$

**antécédent injection surjection composée** **Exercice 5.2.10** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**F**

**contre-exemple**  
**ou**  
résoudre  $y = f(x)$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y, x) \quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y)$$

- Déterminer  $f(0,0)$ ,  $f(1,2)$ ,  $g(1,-1,0)$  et  $g(1,1,1)$
- Si  $(0,0)$  admet des antécédents par  $g$ , les déterminer. Bonus : même question avec  $(1,2)$
- $g$  est-elle injective ? Montrer alors que  $g$  est surjective.
- Montrer que  $f$  est injective.
- Montrer que  $(1,1,2)$  n'a pas d'antécédent par  $f$ . Qu'en déduit-on ?
- Déterminer  $f \circ g$  puis  $g \circ f$ .

injection  
surjection

**Exercice 5.2.11** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x,y,z) \mapsto (x+y, x+z, 2x+y+z)$

- Calculer  $f(-1,1,1)$ .  $f$  est-elle injective ?
- Montrer que  $f$  n'est pas surjective. On pourra remarquer que  $2x+y+z = (x+y) + (x+z)$

**F**  
contre-exemple  
ou  
résoudre  $y = f(x)$

$f(x)$  **Exercice 5.2.12** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application injective telle que  $f(n) \leq n$  pour  $n \geq 0$ . Montrer que  $f(n) = n$  pour  $n \geq 0$ . On pourra commencer par montrer que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ , puis raisonner par récurrence.

**M**  
récurrence forte

injection  
surjection

**Exercice 5.2.13** Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. Montrer que

- Si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective
- Si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective
- Si  $g \circ f$  est injective et  $f$  est surjective, alors  $g$  est injective
- Si  $g \circ f$  est surjective et  $g$  injective, alors  $f$  est surjective

**M**  
MARRE  
injection  
surjection

bijection  
 $f^{-1}$

**Exercice 5.2.14**

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x-a}$

**FM**  
résoudre  $y = f(x)$

2. Montrer que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective et déterminer  $g^{-1}$   
 $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

composée

**Exercice 5.2.15** Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 $(x,y) \mapsto (2x-y, y-x)$        $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y)$

**FM**  
 $f^{-1}$

- Déterminer  $f \circ g$  puis  $g \circ f$ .
- Que peut-on en déduire ?

bijection  
 $f^{-1}$

**Exercice 5.2.16** Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives et déterminer leur bijection réciproque :

**FM**  
module  
résoudre  $y = f(x)$   
résoudre  $y = f(x)$

$f_1 : [0, +\infty[ \rightarrow ]\frac{1}{2}, 1]$        $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$        $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$        $(x,y) \mapsto (2x+y, x-y)$        $(x,y) \mapsto (x-y, x+3y)$

impaire

**Exercice 5.2.17** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une bijection impaire. Montrer que  $f^{-1}$  est impaire.

**M**  
 $x = f^{-1}(y)$

élément  
bijection

**Exercice 5.2.18** On pose  $E = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$  et  $F = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

**M**  
 $x = f^{-1}(y)$

- Représenter  $E$  et  $F$  dans le plan complexe
- Pour  $z \in E$ , montrer que  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  appartient à  $F$ .
- Montrer que  $f$  définit une bijection de  $E$  dans  $F$  et déterminer  $f^{-1}$

définition  
variations  
bijection  
 $f(x)$   
sommer  
convergence  
limite

**Exercice 5.2.19** Pour  $t > 0$ , on pose  $f(t) = t + \frac{1}{t}$

**M**  
définition (F)  
tableau de variation  
résoudre  $y = f(x)$   
récurrence faible  
 $u_{n+1} - u_n$   
somme télescopique

- Préciser l'ensemble de définition de  $f$  puis dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  vers  $[2, +\infty[$ . On notera  $g$  sa bijection réciproque.

3. Déterminer l'expression de  $g$ .

Soit  $u$  la suite définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{f(nu_n)}{n}$  pour  $n \geq 1$ .

4. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $u_n$  existe et vérifie  $u_n \geq 1$ .

5. Ecrire un programme scilab, qui demande  $n$  à l'utilisateur et affiche la valeur de  $u_n$ .

6. Montrer que la suite  $u$  est croissante. On admettra qu'elle converge vers un réel  $\ell$ .

7. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$ . Mq la suite  $v$  converge et déterminer sa limite (en fonction de  $\ell$ ).

## 6. Limite et continuité (locale)

### 6.1 Suites

convergence

**Exercice 6.1.1** Etudier la convergence des suites  $(u_n)$  :

1.  $u_n = \frac{-e^n + 2n}{\ln(n^2) + 2 \times 3^n + n^3}$
2.  $u_n = \frac{2n^2 + \ln n}{n + \sqrt{n}}$
3.  $u_n = \frac{n^5 - \sin n}{n^2}$
4.  $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \ln n$
5.  $u_n = \frac{3^{1/n}}{n^3 + 1}$
6.  $u_n = \left(\frac{4}{e}\right)^n - \ln n$
7.  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
8.  $u_n = \frac{2 \cos(n) + (-1)^n \ln n}{n^2}$

F

opérations  
factoriser le terme  
dominant  
croissance comparée  
quantité conjuguée

convergence

**Exercice 6.1.2** Etudier la convergence des suites  $(u_n)$  :

1.  $u_n = \frac{e^n - n}{3e^n + 2}$
2.  $u_n = \left(\frac{n^2 - 4}{2n^2 + 1}\right)^{2/3}$
3.  $u_n = \frac{n^5 + \cos(1/n)}{n^2}$
4.  $u_n = \left(\frac{\cos(n^2 + 1)}{3}\right)^{2n}$
5.  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{3k+1}{n}$
6.  $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)$
7.  $u_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n}$

F

opérations  
factoriser le terme  
dominant  
croissance comparée  
quantité conjuguée

encadrer  
convergence

**Exercice 6.1.3** Soit  $u$  la suite définie par  $u_n = n + \ln(n) \cos(n)$  pour  $n \geq 1$ .

1. Montrer que  $n - \ln(n) \leq u_n \leq n + \ln(n)$  pour  $n \geq 1$
2. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$
3. Que peut on dire du comportement asymptotique de la suite  $u$  ?

F

trigo  
gendarmes

encadrer  
convergence

**Exercice 6.1.4**

1. Pour  $0 \leq k \leq n-2$ , montrer que  $0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ .
2. En déduire un encadrement de  $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$  pour  $n \geq 2$ .
3. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1$

FM

majorer  
somme  
gendarmes

variations  
encadrer  
convergence

**Exercice 6.1.5** Soit  $u$  la suite définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Etudier la monotonie de  $(u_n)$
2. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$
3. En déduire que  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  vérifiant  $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$ .

M

$u_{n+1} - u_n$   
encadrer  
sommer  
 $\ell \leq \ell'$

variations  
résoudre  
inclusion  
définition  
encadrer  
monotone  
convergence  
limite

**Exercice 6.1.6** On pose  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$  pour  $0 \leq x \leq 1$  et on note  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .

1. a. Etudier les variations de  $f$   
b. Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq x$  et préciser les cas d'égalités.  
c. Montrer que l'intervalle  $[0,1]$  est stable par  $f$  (i.e.  $0 \leq f(x) \leq 1$  pour  $0 \leq x \leq 1$ ).
2. a. Montrer que  $u_n$  est bien défini et vérifie  $0 \leq u_n \leq 1$  pour  $n \geq 0$   
b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone  
c. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite

M

suite récurrente  
récurrence faible  
monotone  
borné  
 $\ell = f(\ell)$

variations  
définition  
résoudre  
divergence

**Exercice 6.1.7** On pose  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  et on note  $u$  la suite vérifiant  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .

1. a. Etudier les variations de  $f$  sur son ensemble de définition  
b. Résoudre l'inéquation  $f(x) = x$ .
2. a. Etudier le sens de variations de  $u$ .  
b. Montrer que la suite diverge  
c. Justifier qu'elle diverge vers  $+\infty$ .

M

tableau de variation  
équation polynômiale  
suite récurrente  
monotone  
absurde  
 $\ell = f(\ell)$

variations  
limite  
convergence

**Exercice 6.1.8** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$  pour  $n \geq 0$ .

1. a. Etudier les variations de  $f : x \mapsto \frac{5x}{3x+5}$  sur  $\mathbb{R}^+$ . En déduire que  $u_n \geq 0$  pour  $n \geq 0$ .
- b. Etudier le sens de variation de  $(u_n)$
2. a. Etudier le sens de variation de  $u$ .
- b. Si  $u$  converge, déterminer sa limite  $\ell$
- c. Montrer que la suite  $u$  converge vers cette valeur.

**M**  
tableau de variation  
homographie  
suite récurrente  
 $\ell = f(\ell)$

suites adjacentes

**Exercice 6.1.9** Montrer que l'on définit deux suites adjacentes en posant  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n =$

$$u_n + \frac{1}{n!} \text{ pour } n \geq 0$$

## 6.2 Fonctions

**M**  
fraction

convergence

**Exercice 6.2.10** Etudier les limites suivantes aux points considérés

**M**  
quantité conjuguée  
factoriser le terme dominant  
valeur absolue  
puissance  
croissance comparée  
 $DL^1$

- |    |                                     |                 |    |                                    |              |    |                                     |                 |
|----|-------------------------------------|-----------------|----|------------------------------------|--------------|----|-------------------------------------|-----------------|
| a. | $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ | en 0            | b. | $\frac{\sqrt{1+x} - 1 - x}{x}$     | en 0         | c. | $x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$           | en $\pm \infty$ |
| d. | $x x  - x^2 + x$                    | en $\pm \infty$ | e. | $\frac{x^2 + 2 x }{x}$             | en $-\infty$ | f. | $(1+x)^{1/x}$                       | en $0^+$        |
| g. | $(1+x)^{\ln x}$                     | en $0^+$        | h. | $\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}}$    | en $+\infty$ | i. | $\frac{\ln(1+x)(1+\frac{x}{2})}{x}$ | en 0            |
| j. | $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$              | en $0^+$        | k. | $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$             | en $+\infty$ | l. | $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$          | en 0            |
| m. | $\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$          | en $+\infty$    | n. | $xe^{1/x} - x$                     | en $0^+$     | o. | $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ | en $+\infty$    |
| p. | $4x^2 + \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | en 0            | q. | $x^4 e^{-\sqrt{x}}$                | en $+\infty$ | r. | $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$       | en $+\infty$    |
| s. | $x^3 - 5x^2 - e^x$                  | en $-\infty$    | t. | $\frac{e^x - e^3}{x - 3}$          | en 3         | u. | $\frac{\ln x}{x^2 - 1}$             | en 1            |
| v. | $\frac{x^n - 1}{x - 1}$             | en 1            | w. | $x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ | en $+\infty$ |    |                                     |                 |

comparer  
équivalent

**Exercice 6.2.11** On pose  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = e^x$ ,  $f_3(x) = e^{-x}$ ,  $f_4(x) = 5^x$ ,  $f_5(x) = \ln x$ ,  $f_6(x) = x^{10}$ ,  $f_7(x) = (\ln x)^{20}$ ,  $f_8(x) = \frac{1}{x}$ .

**FM**  
croissance comparée  
factoriser le terme dominant

1. Etablir une échelle de compararaison de ces fonctions au voisinage de  $+\infty$  (avec des  $o$ )
2. Etablir une échelle de compararaison de ces fonctions au voisinage de  $0^+$  (avec des  $o$ )
3. Déterminer un équivalent en  $+\infty$ , parmi les  $f_i$ , des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = x^2 - (\ln x)^{20} \quad g_2(x) = \sqrt{x} + 2 + e^{-x} + \ln x + x^2 \quad g_3(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^3 - 1}}{x^3 + \ln x}$$

$$g_4(x) = x + 2 \sin(x) \quad g_5(x) = \frac{x^2 + 3}{e^{-x} (\ln x)^{20} + 1}$$

limite

**Exercice 6.2.12** Etudier les limites des fonctions suivantes aux points considérés

**FM**  
partie entière  
trigo  
limite

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| a. | $x^3 \lfloor x \rfloor$ en 0               | b. | $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ en 0 et $+\infty$        |
| c. | $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \sin x$ en 0 | d. | $\sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{\cos x}$ en $+\infty$ |
|    |  | e. | $x(2 + \sin x)$ en $+\infty$                           |

convergence  
encadrer  
limite  
continuité

**Exercice 6.2.13** On pose  $\frac{f(x) - x \lfloor 1 \rfloor}{x}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$

**FM**  
partie entière  
gendarmes

1. Simplifier  $f(x)$  pour  $x > 1$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Et en  $-\infty$  ?
2. a. Encadrer  $f(x)$  pour  $x > 0$ . En déduire que  $f$  admet une limite en  $0^+$ .
- b. La fonction se prolonge t'elle par continuité en 0 ?

équivalent

**Exercice 6.2.14** Déterminer un équivalent en  $+\infty$  d'une fonction  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

**FM**  
gendarmes

$$x^2 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x^2 + x \quad (x \geq 1).$$

définition  
continuité

### Exercice 6.2.15

1. Peut-on prolonger par continuité en  $x_0 = 0$  la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. même question pour  $x_0 = 0$  et  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}$

3. même question pour  $x_0 = 0$  et  $f(x) = \frac{|x|}{\cos x}$

4. même question pour  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $f(x) = \frac{2x - \pi}{2x - \pi}$

on commencera par préciser l'ensemble de définition de ces fonctions

FM

continuité (F)  
limite

définition  
continu

### Exercice 6.2.16

1. On pose  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a. Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

b. Montrer que  $f$  est continue en 1.

2. Mêmes questions pour  $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

FM

définition (F)  
 $a^b$   
croissance comparée

limite  
branche infinie  
définition

### Exercice 6.2.17

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$   
Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\frac{1}{2}$$

on admettra que  $\ln(1+u) - u \sim_0 -\frac{u^2}{2}$

Qu'en déduit-on sur l'allure de la courbe au voisinage de  $+\infty$  ?

2. Soit  $f$  la fonction définie pour  $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$

Déterminer son ensemble de définition puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\frac{1}{2}$$

Qu'en déduit-on sur l'allure de la courbe au voisinage de  $+\infty$  ?

M

DL

définition  
branche infinie  
asymptote

**Exercice 6.2.18** Déterminer le domaine de définition des fonctions  $f$  suivantes puis leur comportement asymptotique aux bornes de leur domaine de définition. En déduire l'allure de  $C_f$  au voisinage des infinis.

1.  $f(x) = \ln(1+e^x+e^{2x})$ . Commencer par une étude en  $\pm\infty$ , puis montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ .

2.  $f(x) = (x + \ln x)e^{1/x}$ . Pour l'étude en  $+\infty$ , déterminer la limite de  $f(x)$ ,  $f(x)/x$  puis  $f(x) - x$  en  $+\infty$ . Interprétation graphique ?

3.  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ . Pour l'étude en  $+\infty$ , montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ . Qu'en est-il en  $-\infty$  ?

M

terme dominant  
DL<sup>1</sup>  
limite

définition  
signe  
limite  
eau de variation  
 $f(x) = 0$

**Exercice 6.2.19** On pose  $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2}$

1. Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$

2. Préciser le signe de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ , ainsi que les limites aux bornes de  $\mathcal{D}$ .

3. Justifier la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  et déterminer la fonction  $u$  vérifiant

M

définition (F)

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x)^3} \quad (x \in \mathcal{D})$$

4. Dresser le tableau de variations complet de  $u$ .
5. Montrer que la fonction  $u$  s'annule en un unique point sur  $\mathcal{D}$ , que l'on notera  $\alpha$ .
6. Dresser le tableau de variations complet de  $f$  (en fonction de  $\alpha$ ).

## 7. Dénombrement

### 7.1 Dénombrer

- cardinal** **Exercice 7.1.1** On considère l'ensemble  $E = \{1,2,3,4\}$ . Ecrire méthodiquement :
1. les combinaisons de 3 éléments de  $E$
  2. les arrangements de 3 éléments de  $E$
  3. les triplets d'éléments de  $E$  (ne pas en écrire plus de 21)
- cardinal** **Exercice 7.1.2** Une anagramme est un mot formé des mêmes lettres mais dans un ordre différent. Donner le nombre d'anagrammes des mots : LAPIN, ELEVE, BONBON, ABRACADABRANT.
- cardinal** **Exercice 7.1.3** On fait 5 tirages successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.
1. Nombre de tirages possibles ?
  2. Dénombrer alors l'ensemble des tirages contenant
    - a. au moins une fois la boule 9
    - b. (exactement) deux fois la boule 2
    - c. trois fois la boule 3 et une fois la boule 1
  3. Nombre de tirages tels que
    - a. le second tirage ait donné la boule 1
    - b. la seconde boule 1 tirée l'ait été au troisième tirage ?
- cardinal** **Exercice 7.1.4** Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément et on suppose toutes les chaussures différenciables.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
  2. Combien de tirages amènent deux chaussures vertes ? deux chaussures de même couleur ?
  3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ? au moins un pied gauche ?
  4. Combien reconstituent une paire de chaussures avec un gauche et un droit de même couleur ?
- Exercice 7.1.5** On tire 3 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes classique (13 hauteurs et 4 couleurs).
1. Nombre de tirages possibles ?
  2. évaluer alors le nombre de tirages contenant
    - a. trois cartes (exactement) de même hauteur
    - b. deux cartes (exactement) de même couleur
    - c. deux ou trois cartes de même couleur
    - d. au moins un coeur ou un roi
- Exercice 7.1.6**
1. Pour  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ , montrer que  $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$ .
  2. En déduire  $\sum_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (i+j)$ .
- cardinal** **Exercice 7.1.7**
1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?
  2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l'anglais et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?
- cardinal** **Exercice 7.1.8** On répartit 8 boules numérotées dans quatre sacs numérotés.
1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
  2. Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?
- cardinal** **Exercice 7.1.9** On forme des nombres de 6 chiffres choisis parmi  $1, \dots, 9$

**F**  
combinaison  
arrangement  
 $n$ -liste

**F**  
dénombrer : arbre  
combinaison

**FM**  
dénombrer : arbre  
complémentaire

**F**  
dénombrer : arbre

**F**

**F**  
formule du crible

**MD**  
 $n$ -liste  
dénombrer : surjection

**F**  
 $n$ -liste  
arrangement  
combinaison

1. Combien y en a t'il ?
2. Combien y en a t'il dont tous les chiffres sont pairs ?
3. Combien y en a t'il dont tous les chiffres sont différents ?
4. Combien y en a t'il dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

**cardinal** **Exercice 7.1.10** Soit  $n \geq 1$ . On forme des couples  $(x,y)$  de  $\llbracket 0,n \rrbracket^2$ .

**F**  
*n*-liste

1. Combien y en a t-il ?
2. Combien y en a t-il vérifiant  $x + y = n$  ?
3. Combien y en a t-il vérifiant  $x \neq y$  ?
4. Combien y en a t-il vérifiant  $x \leq y$  ?
5. Combien y en a t-il vérifiant  $x < n$  ?
6. Combien y en a t-il vérifiant  $x + y = k$  pour  $k \in \llbracket 0,2n \rrbracket$  ?

**cardinal** **Exercice 7.1.11** Dans une urne on place  $n$  boules blanche et une seule noire. On tire simultanément  $k$  boules. Déterminer successivement le nombre de tirages

**F**

1. le nombre de tirages sans boules noires ?
  2. le nombre de tirages avec au moins une boule noire ?
- Qu'obtenez-vous ?

**cardinal** **Exercice 7.1.12** Déterminer le nombre de  $p$ -listes  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $\llbracket 1,n \rrbracket$  vérifiant

**F**  
combinaison

$$x_1 < x_2 < \dots < x_p$$

**cardinal** **Exercice 7.1.13** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

**D**

1. Déterminer le nombre de couples  $(A,B)$  de parties de  $E$  vérifiant  $B \subset A$ . *Indication : Discuter suivant le nombre d'éléments de  $A$*
2. En déduire le nombre de couples  $(A,B)$  de parties de  $E$  vérifiant  $A \cap B = \emptyset$
3. En déduire le nombre de triplets  $(A,B,C)$  de parties disjointes 2 à 2 de  $E$  vérifiant  $A \cup B \cup C = E$
4. Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

**cardinal** **Exercice 7.1.14** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Calculer en fonction de  $n$ ,  $a = \text{Card}(A)$ ,  $b = \text{Card}(B)$  et  $c = \text{Card}(A \cup B)$  le cardinal des ensembles

**F**  
formule de Poincaré complémentaire

$$A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cup B,$$

**cardinal** **Exercice 7.1.15** On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J

**M**  
permutation  
*n*-liste  
combinaison

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons où B, A et C apparaissent dans cet ordre ?

**cardinal** **Exercice 7.1.16** Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

**F**

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

**cardinal** **Exercice 7.1.17** Dans un zoo, 8 fruits sont distribués à 13 singes. Combien a-t-il de distributions possibles ?

**MD**  
*n*-liste  
arrangement  
combinaison  
point barre

1. si les fruits sont différents (pomme, banane, kiwi,...) et
  - a. s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
  - b. S'il n'y a pas de limite au nombre de fruits que peut avoir un singe
2. mêmes questions si les fruits sont tous identiques (8 bananes)

- cardinal** **Exercice 7.1.18** **F**  
dénombrer : arbre  
combinaison
1. Combien le mot livre possède-t-il d'anagrammes ? et le mot feuille ? et le mot Mississippi ?
  2. Quel est le coefficient de  $a^3b^4c^2d$  dans le développement de  $(a + b + c + d)^{10}$  ?
- cardinal** **Exercice 7.1.19** **D**  
dénombrer : arbre
- On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ?
- cardinal** **Exercice 7.1.20** **F**  
dénombrer : arbre
- Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne.
1. Nombre de tirages possibles ?
  2. Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?
  3. Nombre de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
  4. Nombre de tirages contenant les trois couleurs ?
  5. Contenant exactement deux couleurs ?
- cardinal** **Exercice 7.1.21** **FM**
- On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres. De combien de façons peut-on procéder si
1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
  2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
  3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
  4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
- cardinal** **Exercice 7.1.22** **M**  
 $n$ -liste  
combinaison  
dénombrer : arbre
- On dispose de 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules vertes, toutes distinguables. On répartit ces boules dans  $n \geq 1$  urnes.
1. Nombre de répartitions possibles ?
  2. Nombre de répartitions telles que les boules soient dans deux urnes seulement ?
  3. Nombre de répartitions telles que la première urne ne contiennent que des boules d'une seule couleur ?
- cardinal** **Exercice 7.1.23** **F**  
dénombrer : arbre  
combinaison
- On forme des mots de 5 lettres en utilisant exactement une fois chaque lettre A, B, C, D et E.
1. Combien de mots peut-on former ?
  2. Combien de mots peut-on former, qui commencent par A.
  3. Combien de mots peut-on former, qui commencent par A et finissent par B ?
  4. Combien de mots peut-on former, où le A apparaît avant le B ?
- cardinal** **Exercice 7.1.24** **FM**  
dénombrer : arbre
- Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20€ dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1€ et 2€. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).
- cardinal** **Exercice 7.1.25** **F**  
permutation  
dénombrer : surjection
- Lors d'un dîner, 4 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?
- cardinal** **Exercice 7.1.26** **F**  
combinaison
- Dans le quadrillage  $\mathbb{N}^2$ ,  $A$  et  $B$  sont les points de coordonnées respectives  $(0,0)$  et  $(p,q)$ . On appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut ?
1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur  $n$  ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
  2. Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de  $A$  à  $B$  ?
- cardinal** **Exercice 7.1.27** **F**
- Dans le plan, on considère  $n$  points  $M_1, M_2, \dots, M_n$  tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à  $n$  cotés que l'on peut construire avec ces points ?

- cardinal** **Exercice 7.1.28** Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes. **F**
1. Combien de jurys différents peut-on former ?
  2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
  3. Monsieur  $X$  refuse de siéger avec Madame  $Y$ . Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

- cardinal** **Exercice 7.1.29** Combien y a-t-il de mots de  $n$  lettres formés des lettres  $a$  et  $b$  tels que **F**
1. Il n'y ait jamais deux  $a$  ou deux  $b$  consécutifs.
  2. Il y ait exactement un double  $a$  (pas de triple et pas d'autre double).
  3. Il y ait exactement deux double  $a$  (pas de triple et pas d'autre double).

- cardinal** **Exercice 7.1.30** Soit  $p \geq 1$ . Combien y a-t-il de solutions entières  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  à l'équation **F**  
 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$  ?

## 7.2 sommes

- sommer** **Exercice 7.2.31** Calculer  $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)(k+3)$  **M**  
 somme de Bernoulli

- sommer** **Exercice 7.2.32** Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$  **FM**  
 $(a+b)^n$

- sommer** **Exercice 7.2.33** Calculer  $\sum_{k=0}^n \lfloor n/2 \rfloor 2^k \binom{n}{2k}$  **MD**  
 $(a+b)^n$

- sommer** **Exercice 7.2.34** Pour  $n \geq 2$ , montrer que  $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}^2 = n(n-1) \binom{2n-2}{n-2}$  **MD**  
 $(a+b)^n$

- sommer** **Exercice 7.2.35** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers vérifiant  $0 \leq p \leq n$ . Montrer que **M**  
 récurrence faible (M)
- $$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

- sommer** **Exercice 7.2.36** Montrer les formules suivantes : **M**  
 $(a+b)^n$
1.  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$  pour  $0 \leq k \leq p \leq n$ .
  2.  $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$  pour  $0 \leq p \leq n$ .
  3.  $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 0$  pour  $0 \leq p \leq n$ .

## 8. Probabilités sur un univers fini

### 8.1 Probabilité uniforme

- probabilité** **Exercice 8.1.1** On lance un dé équilibré quatre fois de suite. F  
univers  
loi uniforme
1. Préciser l'univers associé à cette expérience.
  2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?
  3. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois le même numéro ?
- probabilité** **Exercice 8.1.2** On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires, toutes différenciables. Calculer de deux façons différentes la probabilité d'obtenir trois boules blanches F  
loi uniforme
- probabilité** **Exercice 8.1.3** Une urne contient 9 boules distinctes : 2 vertes, 3 blanches et 4 rouges. On tire au hasard 4 boules de l'urne M  
loi uniforme
1. Les tirages se font successivement et sans remise .
    - a. Préciser l'univers associé à cette expérience, ainsi que son cardinal.
    - b. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune verte ?
    - c. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules d'une même couleur ?
  2. Mêmes questions lorsque le tirage est simultané.
  3. Mêmes questions lorsque les tirages sont successifs et avec remise
- probabilité** **Exercice 8.1.4** On tire 6 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. F
1. Préciser l'univers associé à cette expérience, ainsi que son cardinal.
  2. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ? exactement 2 as ? 3 piques ? 2 as ou 3 piques ?
- probabilité** **Exercice 8.1.5** On dispose d'une urne contenant  $n \geq 2$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. F
1. On pose  $A_1 = \ll \text{le } 1^{\text{er}} \text{ tirage donne la boule numérotée } 1 \gg$ . Calculer  $P(A_1)$ .
  2. Plus généralement, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $A_k = \ll \text{le } k^{\text{ième}} \text{ tirage donne la boule numérotée } k \gg$ . Calculer  $P(A_k)$  pour  $1 \leq k \leq n$ .
- probabilité** **Exercice 8.1.6** A l'époque des probabilités encore balbutiantes, le chevalier de Méré avait fait 2 paris dans une correspondance avec Pascal. M  
loi uniforme
1. Pari 1. Si l'on jette 4 fois un dé à 6 faces, il est plus probable d'obtenir au moins un 6 que de ne pas en obtenir.
  2. Pari 2. Si l'on jette 24 fois deux dés à 6 faces, il est plus probable d'obtenir au moins un double 6 que de ne pas en obtenir.
- Etudier dans chacun des cas si Méré avait tort ou raison.
- VAR** **Exercice 8.1.7** Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On tire  $n$  boules avec remise. Soit  $X$  le plus petit numéro obtenu et soit  $Y$  le plus grand numéro obtenu au cours de ces  $n$  tirages. F
1. a. Calculer  $P(Y \leq k)$  pour  $1 \leq k \leq N$ . En déduire la loi de  $Y$   
b. Calculer  $P(X \geq k)$  pour  $1 \leq k \leq N$ . En déduire la loi de  $X$
  2. Calculer la loi de  $Y$ , mais en effectuant un tirage simultané de  $n$  boules.
- probabilité** **Exercice 8.1.8** *Le paradoxe du Duc de Toscane.* Au début du 17e siècle, un jeu de dés en vogue à la Cour consistait à lancer 3 dés et à voir les chiffres qui en résultaient. Or le Duc de Toscane observa que la somme des dés valant 10 avait tendance à sortir plus souvent que la somme des dés valant 9, alors qu'il y a autant de possibilités d'écrire la somme 9 que la somme 10 :

$$\begin{array}{cccccccc} 9 & = 1 + 2 + 6 & = 1 + 3 + 5 & = 4 + 4 + 2 & = 2 + 2 + 5 & = 2 + 3 + 4 & = 3 + 3 + 3 \\ 10 & = 1 + 3 + 6 & = 1 + 4 + 5 & = 2 + 2 + 6 & = 2 + 3 + 5 & = 2 + 4 + 4 & = 3 + 3 + 4 \end{array}$$

Pouvez-vous résoudre ce paradoxe ? (N.B. Galilée l'avait levé en 1620)

### 8.2 événements

événement

**Exercice 8.2.9** On considère une expérience aléatoire et  $\Omega$  l'univers associé. Soit  $A, B, C$  trois événements. Ecrire à l'aide des opérations ensemblistes les événements suivants : parmi  $A, B, C$

1. l'un au moins des événements est réalisé
2.  $A$  et  $B$  se réalisent mais pas  $C$
3. un seul des événements est réalisé
4. au moins l'un des événements n'est pas réalisé.

F

opération ensembliste

univers traduire probabilité

**Exercice 8.2.10** On lance deux fois un dé.

1. Préciser l'univers associé à cette expérience ainsi que son cardinal.
2. Traduire en français l'événement  $A = (1; 1), (2; 2), \dots, (6; 6)$
3. Déterminer dans  $\Omega$  l'événement  $B =$  « la somme des deux numéros est inférieure ou égale à 4 ».
4. Calculer la probabilité de  $A, B, A \cap B$  et  $A \cup B$ .

F

opération ensembliste

événement

**Exercice 8.2.11** On lance  $n \geq 2$  fois une pièce et on introduit l'événement  $P_i =$  « le  $i^{\text{ième}}$  lancer a donné pile » pour  $1 \leq i \leq n$ . Exprimer en fonction des  $P_i$ , les événements suivants :

1.  $A =$  « n'obtenir que des piles »
2.  $B =$  « obtenir exactement un pile »
3.  $C =$  « obtenir au moins un pile »
4.  $D =$  « obtenir au plus un pile »
5.  $E =$  « obtenir le 1<sup>er</sup> pile au 3<sup>ième</sup> lancer »

*On pourra commencer par prendre  $n = 4$*

### 8.3 probabilités

F

opération ensembliste

probabilité

**Exercice 8.3.12** On lance  $n \geq 2$  fois de suite un dé équilibré dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2, 3 et 3. On note  $p_n$  la probabilité que les trois chiffres  $\{1, 2, 3\}$  apparaissent chacun au moins une fois au cours de ces  $n$  lancers. Pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on pose  $A_i =$  « le numéro  $i$  n'apparaît pas durant ces  $n$  lancers ».

1. Calculer  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ , puis montrer que  $p_n = 1 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$  et interpréter ce résultat.

F

probabilité

**Exercice 8.3.13** On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules noires et 3 rouges. Pour  $k \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ , on introduit les événements  $E_k =$  « la première boule noire est obtenue au  $k^{\text{ième}}$  tirage », et  $R_k =$  « le  $k^{\text{ième}}$  tirage donne une rouge ».

1. Décrire les événements  $E_1, \dots, E_4$  à l'aide des événements  $R_k$
2. En déduire les probabilités des événements  $E_1, \dots, E_4$ . Que valent  $P(E_k)$  pour  $k \geq 5$  ?

F

probabilité

**Exercice 8.3.14** On tire une à une, et sans remise, toutes les boules d'une urne, qui contient  $n$  boules rouges et  $n$  boules vertes. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage, on ait un changement de couleur ?

F

conditionnement

probabilité

**Exercice 8.3.15** Soit  $n \geq 1$ . Un sac contient initialement  $j$  bonbons jaunes et  $r$  bonbons roses. On effectue  $n$  tirages successifs d'un bonbon de ce sac selon le protocole suivant :

- si on tire un bonbon rose, on le remet dans le sac avant le prochain tirage
  - si on tire un bonbon jaune, on a le droit de le manger
1. Quelle est la probabilité de manger au moins un bonbon jaune ?
  2. Quelle est la probabilité de manger exactement un bonbon jaune ?
  3. Sachant qu'on a mangé un seul bonbon jaune, quelle est la probabilité qu'on ait tiré un bonbon jaune en dernier ?

F

probabilité

**Exercice 8.3.16**

- Une urne  $U_1$  contient 2 boules rouges, 3 boules bleues et 5 boules vertes.
- Une urne  $U_2$  contient 4 boules rouges et 5 boules bleues
- Une urne  $U_3$  contient 3 boules bleues et 6 boules vertes

On tire au hasard une boule de  $U_1$  que l'on place dans  $U_2$  ; puis on tire au hasard une boule de  $U_2$  que l'on place dans  $U_3$  pour enfin tirer au hasard une boule de  $U_3$  que l'on met dans  $U_1$ . Quelle est la probabilité que la composition de l'urne  $U_1$  n'ait pas changé à l'issue de ces manipulations ?

F

probabilité **Exercice 8.3.17** On lance  $n \geq 1$  fois de suite un dé équilibré et on note  $p_n$  la probabilité que la somme des nombres obtenus soit paire. Déterminer par récurrence  $p_n$  pour  $n \geq 1$ . F

probabilité **Exercice 8.3.18** Une puce évolue sur trois cases  $A$ ,  $B$  et  $C$  de façon aléatoire selon la règle suivante :

- à l'instant 0, la puce se trouve sur la case  $A$
- lorsque la puce se trouve sur une certaine case à un instant donné, elle se déplace à l'instant suivant, sur l'une quelconque des autres cases de façon équiprobable

On note  $A_n$  (resp.  $B_n$  et  $C_n$ ) les événements : « à l'instant  $n$ , la puce est sur la case  $A$  (resp.  $B$  et  $C$ ) » et on pose  $a_n = P(A_n)$ ,  $b_n = P(B_n)$  et  $c_n = P(C_n)$ .

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $b_n$  et  $c_n$ .
2. Justifier alors que  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$  pour  $n \geq 0$ .
3. En déduire l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$  et sa limite en  $+\infty$ . Surpris ?

probabilité **Exercice 8.3.19** On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne au temps  $n \geq 0$ , il a la probabilité  $a \in ]0,1[$  d'être en panne au temps  $n + 1$ .
- si l'appareil est en panne au temps  $n \geq 0$ , il a la probabilité  $b \in ]0,1[$  d'être en panne au temps  $n + 1$ .

On note  $p_n$  la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant  $n$ .

1. Pour  $n \geq 0$ , établir une relation entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$
2. Pour  $n \geq 0$ , en déduire  $p_n$  en fonction de  $n$  et de  $p_0$ . La suite  $(p_n)$  converge-t-elle ?

probabilité **Exercice 8.3.20** Une boule est tirée au hasard dans une urne contenant  $r$  boules rouges et  $n$  boules noires. On note sa couleur puis on la remet dans l'urne avec  $d \geq 1$  boules supplémentaires de la même couleur. On répète plusieurs fois le procédé et l'on note  $R_k =$  « la  $k^{\text{ième}}$  boule tirée est rouge » pour  $k \geq 1$ . F

1. Calculer  $P(R_1)$  puis montrer que  $P(R_2) = P(R_1)$
2. Si la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été rouge ?
3. *plus dur.* Pour  $k \geq 2$ , quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été rouge sachant que les  $k - 1$  boules suivantes sont rouges ?

probabilité **Exercice 8.3.21** On considère  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $1 \leq k \leq n$ , l'urne  $k$  contient  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche si l'on choisit une urne au hasard puis une boule de cette urne ? F

probabilité **Exercice 8.3.22** On dispose de deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité  $p_1 \in ]0,1[$  et la pièce 2 donne pile avec une probabilité  $p_2 \in ]0,1[$ . Au premier lancer, on choisit une pièce au hasard et on la lance. Puis on effectue une suite de lancers comme suit :

- si un lancer donne pile, on garde la même pièce pour le lancer suivant
- s'il donne face, on change de pièce pour le lancer suivant.

Pour  $n \geq 1$ , on note  $U_n =$  « le  $n^{\text{ième}}$  lancer s'effectue avec la pièce 1 » et on pose  $u_n = P(U_n)$ .

1. a. Pour  $n \geq 1$ , calculer la probabilité de ne jamais lancer la pièce 2 au cours des  $n$  premiers tirages  
b. Calculer la probabilité de jeter pour la première fois la pièce 2 au  $n^{\text{ième}}$  lancer. *séparer*  $n = 1$  et  $n \geq 2$
2. a. Trouver une relation de récurrence entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .  
b. En déduire  $u_n$  pour  $n \geq 1$ .
3. Quelle est la probabilité  $r_n$  d'obtenir pile au  $n^{\text{ième}}$  lancer ? Calculer la limite de la suite  $(r_n)$

probabilité **Exercice 8.3.23** On lance une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $p_n$  la probabilité de ne pas avoir obtenu deux piles successifs au cours des  $n$  premiers lancers et on pose  $P_k =$  « le  $k^{\text{ième}}$  lancer donne pile »

1. Calculer  $p_1, p_2, p_3$
2. Montrer que  $\{P_1 \cap P_2, P_1 \cap \overline{P_2}, \overline{P_1}\}$  est un système complet d'événements

3. A l'aide de la formule des probabilités totales, trouver une relation entre  $p_n$  et  $p_{n-2}$  pour  $n \geq 3$
4. Déterminer alors  $p_n$  en fonction de  $n$ . Quelle est la limite de  $(p_n)$  ?

probabilité **Exercice 8.3.24** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements  $A$  et  $B$  suivants sont-ils indépendants ? F

1.  $A =$ « tirer un roi » et  $B =$ « tirer un rouge ».
2.  $A =$ « tirer une dame » et  $B =$ « tirer une figure ».
- 3.

probabilité **Exercice 8.3.25** On lance  $n \geq 1$  fois une pièce équilibrée. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus un pile. F

probabilité **Exercice 8.3.26** Une étude statistique a montré que sur 100 naissances, 49 bébés sont des filles et 51 sont des garçons. On suppose que les événements « accoucher d'un garçon » et « accoucher d'une fille » sont indépendants. Lucie a eu 4 bébés. F

1. a. Calculer la probabilité que Lucie ait eu autant de garçons que de filles.  
b. Sachant que le premier bébé de Lucie est une fille, quelle est la probabilité qu'elle ait eu un seul garçon ?
2. L'événement « le premier bébé est une fille » est-il indépendant de l'événement « Lucie a exactement 2 garçons » ?
3. Sachant que Sophie a eu 2 garçons et 2 filles et que son premier bébé est une fille, calculer la probabilité que son deuxième bébé soit une fille.

probabilité **Exercice 8.3.27** Une urne A contient 3 boules blanches et 5 boules rouges et une urne B contient 7 boules blanches et 4 boules rouges. Un joueur lance un dé et choisit l'urne A s'il obtient 1, 2, 3 ou 4 et l'urne B sinon. Puis il tire, avec remise, 3 fois une boule dans l'urne choisie. F

1. Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges ?
2. Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'urne A ?

## 9. Systèmes linéaires

système linéaire **Exercice 9.1** Résoudre les systèmes suivants :

F

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 7x + 3y - 5z = 2 \end{cases} \\
 d) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases} \\
 g) \begin{cases} 3x - 6y - 6z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + 4y + 6z = 0 \\ 6x - 12y - 12z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

système linéaire **Exercice 9.2** Résoudre les systèmes suivants

F

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{cases} -3x + y + z + t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x + 3y - t = 0 \\ 2x - y + 2z + 2t = 0 \\ 5y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

système linéaire

**Exercice 9.3** Résoudre le système

MD

$$\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 2t = 0 \\ 5x + y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

compatibilité  
système linéaire

**Exercice 9.4** A quelles conditions portant sur les paramètres  $a, b, c$  et  $d$ , les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Le cas échéant, finir la résolution des systèmes.

F

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \\ -3x + y + 3z = c \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x - 3y - 2z = a \\ -4x + 4y + 3z = b \\ 2x - 2y - z = c \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x - 3y + 3z = a \\ x + 2y - z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \\
 d) \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ 4x + 2y - z = c \\ x - 7z = d \end{cases}
 \end{array}$$

compatibilité  
système linéaire

**Exercice 9.5** Discuter et résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  les systèmes

F

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

## 10. Espaces vectoriels (introduction)

espace vectoriel

**Exercice 10.1** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

**F**  
sous-espace  
contre-exemple

$$F_1 = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\} \quad F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} \quad F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$$

$$F_4 = \{(x, -x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} \quad F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$$

espace vectoriel

**Exercice 10.2** On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites réelles. Les ensembles suivants sont ils des espaces vectoriels ?

**M**  
sous-espace

$$A = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad (n \geq 0)\} \quad B = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_0 = u_3 = 0\}$$

$$C = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est géométrique}\} \quad D = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est bornée}\}$$

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ converge vers } 0\} \quad F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est convergente}\}$$

espace vectoriel

**Exercice 10.3** On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Les ensembles suivants sont ils des espaces vectoriels ?

**F**  
sous-espace

$$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ paire}\} \quad B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(2) = f(5) = 0\}$$

$$C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ continue}\} \quad D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ croissante}\}$$

endance linéaire  
Vect

**Exercice 10.4** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $i = (1, -1, 2)$  et  $j = (1, 1, -1)$

**F**  
élimination

1. Montrer que les vecteurs  $u = (3, 1, 0)$ ,  $v = (-1, -3, 4)$  et  $w = (1, -5, 8)$  sont des combinaisons linéaires de  $i$  et  $j$
2. Qu'en est-il des vecteurs  $U = (4, 1, 0)$ ,  $V = (10, -4, 11)$  et  $W = (10, -2, 9)$  ?
3. Plus généralement, déterminer  $\text{Vect}(i, j)$ . *En déterminer une équation cartésienne ?*

dans un Vect

**Exercice 10.5** dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs  $u = (-4, 4, 3)$ ,  $v = (-3, 2, 1)$ ,  $s = (-1, 2, 2)$  et  $t = (-1, 6, 7)$

**F**  
double inclusion  
ou  
dimension

1. Montrer que  $u \in \text{Vect}(s, t)$  et  $v \in \text{Vect}(s, t)$ . En déduire que  $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(s, t)$
2. Montrer que  $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$

dans un Vect

**Exercice 10.6** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $x = (1, 2, 1)$ ,  $y = (1, 0, 1)$  et  $z = (k, 2, 3)$ . Déterminer  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $z \in \text{Vect}(x, y)$ .

**F**

endance linéaire

**Exercice 10.7** Dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , le vecteur  $u = (4^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est il combinaison linéaire des vecteurs  $v = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $w = (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $S = X^3$  ? Plus généralement, décrire  $\text{Vect}(Q, R, S)$ .

**F**  
base

endance linéaire

**Exercice 10.8** Soit  $u = (1, 1, -1)$ ,  $v = (2, 1, 3)$  et  $w = (0, -1, 5)$ . La famille  $(u, v, w)$  est-elle liée dans  $\mathbb{R}^3$  ? Auquel cas, trouver une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

**F**  
rang

endance linéaire

**Exercice 10.9** Déterminer l'ensemble des réels  $k$  tels que la famille  $((1, k, 2), (-1, 8, k), (1, 2, 1))$  soit une liée dans  $\mathbb{R}^3$ .

**F**  
rang

endance linéaire

**Exercice 10.10** Les familles suivantes sont-elles libres dans l'espace vectoriel indiqué ?

**FM**

1.  $\mathcal{F}_1 = ((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}})$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2.  $\mathcal{F}_2 = (x \mapsto x, x \mapsto |x|)$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
3.  $\mathcal{F}_3 = (x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(x)^3)$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

base  
coordonnées

**Exercice 10.11**

**F**  
rang  
ou  
système linéaire

1. Montrer de deux manières différentes que la famille  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  avec  $u = (1, 1, 0)$ ,  $v = (1, 2, 1)$ , et  $w = (2, 3, 2)$ . Déterminer alors les coordonnées du vecteur  $x = (0, 1, -2)$  dans cette base. Quelle est la méthode la plus rapide ?
2. Même question avec  $U = (0, 1, 1)$ ,  $V = (2, 0, -1)$ ,  $W = (2, 1, 1)$ , et  $X = (1, -2, -1)$ .

espace vectoriel  
base

**Exercice 10.12** Montrer que l'ensemble des solutions du système  $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$  forme un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer une base.

F  
système linéaire  
Vect

espace vectoriel  
base

**Exercice 10.13** Montrer que l'ensemble des solutions des systèmes suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base

F  
système linéaire  
Vect

$$a) \{ 2x + y - z = 0 \} \quad b) \begin{cases} 2x & -3z & +t & = 0 \\ x & +y & +z & -t & = 0 \\ & -2y & -5z & +3t & = 0 \\ 3x & +y & -2z & = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x & +2y & -z & = 0 \\ -2x & -3y & +3z & = 0 \\ x & +y & -2z & = 0 \end{cases}$$

Choisir l'option la plus rapide.

base  
Vect

**Exercice 10.14**

- Déterminer une base de Vect  $((1,2,-1), (3,-1,2), (4,1,1), (2,-3,3))$
- Déterminer une base de Vect  $((3,1), (1,1), (-2,-2), (2,0))$

F  
rang

base

**Exercice 10.15**

- Déterminer une base de  $\mathbb{R}$ , en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Déterminer une base de  $\mathbb{C}$ , en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

F

base

**Exercice 10.16**

- Déterminer une base de  $\mathbb{R}$ , en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Déterminer une base de  $\mathbb{C}$ , en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

F

base

**Exercice 10.17** Déterminer une base de Vect  $((n^2)_{n \in \mathbb{N}}, (2n+1)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ .

F  
libre

libre

**Exercice 10.18**

- Montrer que  $(1, X-1, (X-1)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et décomposer  $P = 3X^2 + 2X + 1$  dans cette base
- Montrer que la famille  $(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos(x)\sin(x))$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- Montrer que la famille  $((n3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est libre dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

F  
libre : définition

base  
dimension  
dans un Vect

**Exercice 10.19**

- Les vecteurs  $u = (1,2,3)$  et  $v = (3,2,1)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?
- Quelle est la dimension de  $F = \text{Vect}(u,v)$  ?
- Le vecteur  $w = (1,4,7)$  appartient-il à  $F$  ? Si oui, quele est sa décomposition dans la base  $(u,v)$  de  $F$ .
- Même question avec le vecteur  $t = (-1,6,9)$

F  
rang

**Exercice 10.20**

- A partir de la famille  $\mathcal{A} = ((1,1,1), (1,2,3))$  construire une base de  $\mathbb{R}^3$
- idem pour  $\mathcal{B} = ((1,1,1), (-1,2,0))$
- idem pour  $\mathcal{C} = ((1,0,1), (-1,3,1), (1,2,3), (0,0,1))$

F

## 11. Etude globale des fonctions

dérivabilité  
dérivée

**Exercice 11.1** Dériver les fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition et de dérivation

F  
dérivabilité (F)

$$f : x \mapsto (1 + \ln x)^2 e^{\frac{1}{x} + 2x} \qquad g : x \mapsto \cos(\sqrt{1-x^2})$$

$$h : x \mapsto e^x \ln(\sin x) \qquad i : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{x^2+5}}$$

**Exercice 11.2** Déterminer la monotonie des fonctions suivantes (on proposera plusieurs méthodes) :

FM

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \qquad h(x) = \ln(x^2 + 1) \sqrt{x}$$

parité

**Exercice 11.3**

F

1. Montrer que la fonction  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$  est paire.
2. Montrer que la fonction  $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$  est impaire.
3. Montrer que la fonction  $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ .

périodique  
signe  
encadrer

**Exercice 11.4**

M

1. Montrer que la fonction  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  est 1-périodique puis la représenter graphiquement.
2. Soit  $f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ 
  - a. Montrer que  $f$  est positive et bornée (trouver le meilleur majorant)
  - b. Montrer que  $f$  est périodique puis préciser  $f(\mathbb{R})$ .
3. Que dire de la fonction  $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$  ?
4. Montrer que la fonction  $h : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$  est majorée sur  $]0, +\infty[$ . Est ce encore vrai sur  $\mathbb{R}^*$  ?

étude de  $f(x)$

**Exercice 11.5** Etudier les fonctions suivantes :

FM

$$f : x \mapsto \sqrt{2 - \ln x} \qquad g : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}} \qquad h : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x})$$

$$i : x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x}} \qquad j : x \mapsto \frac{x}{x - \ln x}$$

étude de  $f(x)$   
variation

**Exercice 11.6** Etudier la fonction  $f : x \mapsto 1 - (x+1)e^{-2x}$ .  
En déduire les variations de  $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-e^{-2x}}$ .

F  
tableau de variation

étude de  $f(x)$   
parité  
eau de variation

**Exercice 11.7** Etude complète de  $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ . Parité, tableau de variation, limites, asymptotes et position relative, allure de la courbe.

FM

constante

**Exercice 11.8** Montrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , croissante et périodique, est nécessairement constante sur  $\mathbb{R}$ .

FM

### 11.1 continuité

définition  
continuité

**Exercice 11.1.9** Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la continuité des fonctions suivantes

F  
définition (F)  
continuité (F)

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0, +\infty[ \setminus \{1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ x & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

continuité

**Exercice 11.1.10** Déterminer l'ensemble de définition, la continuité et les éventuels prolongements par continuité pour

F  
définition (F)  
continuité (F)

$$a) f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x-2}} \quad b) g(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad c) h(x) = x^x$$

continuité

**Exercice 11.1.11** Etudier les fonctions suivantes au point précisé

F  
limite

$$a) f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{étude en } 1 \quad b) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{étude en } 0$$

continuité

**Exercice 11.1.12** Soit  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, telle que  $f(0) = f(1)$

F  
valeur intermédiaire

1. Montrer qu'il existe  $x \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ .
2. Plus généralement, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  prouver l'existence de  $x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$  tel que  $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ .  
On pourra poser  $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$  et montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) = 0$

borné

**Exercice 11.1.13** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$

F  
continuité  
limite  
raisonnement epsilon-  
nique

existence  
situer

**Exercice 11.1.14** Montrer qu'il existe un unique réel  $x$  strictement positif tel que  $\ln x = e^{-x}$ . Vérifier alors que  $1 \leq x \leq 3$ .

F  
tableau de variation  
valeur intermédiaire

bijection  
eau de variation

**Exercice 11.1.15** Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de  $I$  sur un intervalle à préciser. Donner alors le tableau de variations de la réciproque puis déterminer la.

F

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} \quad \text{avec } I = [-\frac{1}{2}, +\infty[ \quad g(x) = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} \quad \text{avec } I = [1, +\infty[ \\ h(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{avec } I = \mathbb{R}$$

eau de variation  
bijection

**Exercice 11.1.16** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x \ln x$

F

1. Dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
2. a. Montrer qu'il existe une fonction  $g$  définie sur  $I = [-e^{-1}, +\infty[$  vérifiant  $x = g(x) \ln(g(x))$  pour  $x \in I$ .  
b. Justifier que la fonction  $g$  est unique.
3. Dresser le tableau de variations complet de  $g$ , puis tracer sur un même graphique, les courbes de  $f$  et de  $g$ .

existence  
unicité  
monotonie  
convergence

**Exercice 11.1.17** Soit  $\alpha > 0$  et soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^{\alpha+1} + x^\alpha$  pour  $x > 0$

F  
tableau de variation  
suite implicite

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que l'équation  $x^{\alpha+1} + x^\alpha = n$  admet une unique solution  $x_n$  dans  $]0, +\infty[$
2. Etudier la monotonie de la suite  $(x_n)$  ainsi que sa convergence

existence  
unicité  
encadrer  
convergence  
signe  
monotonie

**Exercice 11.1.18** Pour  $n \geq 2$ , on pose  $f_n(x) = x^n + 1 - nx$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

F  
suite implicite  
gendarmes

1. Pour  $n \geq 2$ , montrer que l'équation  $x^n + 1 = nx$  possède une unique solution dans l'intervalle  $[0,1]$ . On note  $x_n$  cette solution. Que vaut  $x_2$  ?
2. Pour  $n \geq 2$  montrer que  $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$ . En déduire que la suite  $(x_n)$  converge.
3. Déterminer la limite de la suite  $(nx_n)$ . En déduire un équivalent de  $x_n$ . Pour  $n \geq 2$ , étudier le signe de  $f_{n-1} - f_n$  sur  $[0,1]$  et en déduire que  $f_n(x_{n+1}) \geq 0$ . Déterminer alors la monotonie de la suite  $(x_n)$

eau de variation  
existence  
unicité  
encadrer  
monotonie  
convergence

**Exercice 11.1.19 Edhec E 97.** Pour  $n \geq 3$ , on pose  $f_n(x) = x - n \ln x$  pour  $x \geq 0$ .

F  
suite implicite

1. Etudier  $f_n$  et dresser son tableau de variation
2. En déduire l'existence de deux solutions  $u_n$  et  $v_n$  de l'équation  $f_n(x) = 0$ , avec  $0 < u_n < n < v_n$ .
3. Montrer que  $1 < u_n < e$ .
4. Montrer que  $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$  pour  $n \geq 3$ . En déduire que  $(u_n)$  est décroissante et converge
5. Pour  $n \geq 3$  montrer que  $0 \leq \ln u_n \leq \frac{e}{n}$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

## 12. Dérivation

définition  
continuité  
dérivabilité

**Exercice 12.1** Etudier la continuité et la dérivabilité sur leur ensemble de définition de

$$a(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x+1}} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad d(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

F  
définition (F)  
continuité (F)  
dérivabilité (F)

dérivée

**Exercice 12.2** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$

1. Lorsque  $f$  est paire, montrer que  $f'$  est impaire
2. Lorsque  $f$  est impaire, montrer que  $f'$  est paire

F  
dérivabilité

définition  
continuité  
dérivabilité

**Exercice 12.3** On pose  $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$

F  
définition (F)  
continuité (F)  
dérivabilité (F)  
tableau de signe

$\mathcal{C}^1$

**Exercice 12.4**  $\mathcal{TC}^1$  (F) Montrer que la fonction définie par  $f(x) = x|x|$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

F

définition  
continuité  
dérivabilité  
dérivée

**Exercice 12.5** On pose  $f(x) = |\ln(x)|$

1. Montrer que  $f$  est continue sur son ensemble de définition
2. Etudier la dérivabilité de  $f$ , puis calculer sa dérivée là où elle est dérivable.

F  
analyse de calcul  
taux d'accroissement

définition  
continuité  
dérivabilité  
dérivée

**Exercice 12.6** Déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont définies  $\sqrt{\quad}$  puis dérivables et calculer leur dérivée.

$$f(x) = (1 + x^2)^x \quad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \quad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} \quad k(x) = (x^2 - x^3)^{1/3}$$

F  
 $a^b$   
ln  
racine  
tableau de signe

impair  
continu  
dérivable  
dérivée  
eau de variation

**Exercice 12.7** On pose  $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{-3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est une fonction impaire sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que  $f'(x) = e^{\frac{-3}{|x|}} \left(1 + \frac{3}{|x|}\right)$  ( $x \neq 0$ )
4. Montrer que  $f$  est dérivable en 0
5. Dresser le tableau de variations complet de la  $f$

F

$f^{-1}$   
eau de variation  
dérivabilité  
dérivée  
 $f(x)$

**Exercice 12.8** Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = e^{1 + \frac{2}{x}}$

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de  $g = f^{-1}$
2. Justifier la dérivabilité de  $g$  sur son ensemble de définition, et calculer  $g'(e^3)$  et  $g'(e^5)$
3. déterminer  $g$  et retrouver les résultat des questions précédentes.

F  
résoudre  $y = f(x)$

$f^{-1}$   
eau de variation  
dérivée

**Exercice 12.9** Pour  $0 < x < 1$ , on pose  $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - x$

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de  $g = f^{-1}$
2. Déterminer  $f'(\ln(2) - \frac{1}{3})$  et  $g'(-\frac{1}{2})$

F

$f^{-1}$   
dérivable  
dérivée

**Exercice 12.10** Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = x + \ln x$

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur un intervalle à préciser
2. Montrer que  $g = f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que

F  
 $(f^{-1})'$

$$g'(y) = \frac{g(y)}{g(y) + 1} \quad (y \in \mathbb{R})$$

majoration  
bijection  
 $f^{-1}$   
eau de variation  
dérivabilité  
dérivée

**Exercice 12.11**

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $|\sin(x)| \leq |x|$
2. Prouver que  $f : x \mapsto \sin(x)$  définit une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur un intervalle à déterminer.
3. Dresser le tableau de variation de  $g = f^{-1}$ . Déterminer alors l'ensemble de dérivabilité de  $g$  puis dessiner sur un même graphique l'allure de la courbe de  $f$  et de  $g$ . *Utiliser 1) pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à la droite  $y = x$*
4. Calculer la dérivée de  $g$ 
  - a. Pour  $-1 < x < 1$ , montrer que  $\cos(g(x))^2 = 1 - x^2$
  - b. Pour  $-1 < x < 1$  montrer que  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

F  
 $(f^{-1})'$

existence

**Exercice 12.12** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  telle que  $f'(c) = f(c)$ .

F  
Rolle

continu  
dérivable  
existence

**Exercice 12.13** Soit  $f$  une fonction continue et dérivable sur  $[0, +\infty[$  telle que  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . On pose  $F(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x} - 1) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

F  
Rolle

1. Montrer que  $F$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$
2. Montrer que  $F'$  s'annule sur  $]0, 1[$
3. En déduire qu'il existe  $c \in ]0, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

encadrer

**Exercice 12.14** A l'aide de l'inégalité des accroissements finis

1. Pour  $0 \leq x \leq 1$ , montrer que  $x \leq e^x - 1 \leq xe$
2. Pour  $x \geq 0$ , montrer que  $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x) \leq x$ . Qu'en est il si  $-1 < x < 0$  ?

F  
 $\leq$  : accroissements finis

dérivabilité

**Exercice 12.15**

1. Pour  $k \geq 2$ , appliquer l'inégalité des accroissements finis sur  $[k-1, k]$  à  $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$
2. En déduire que l'on définit une suite convergente en posant  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (n \geq 1)$

F

dérivabilité

**Exercice 12.16** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

F

1. Pour  $k \geq 1$ , montrer que  $\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$
2. a. Pour  $n \geq 1$ , en déduire que  $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq u_n$   
b. Montrer alors que la suite  $u$  converge. La limite de cette suite est appelée constante d'Euler et est notée  $\gamma$ .
3. Variante. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ . Montrer que les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes et retrouver la conclusion du 2b

dérivabilité

**Exercice 12.17** On veut déterminer une valeur approchée de l'unique solution négative de l'équation (E) :  $e^x = 3 + 2x$ .

F

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}^-$  puis justifier que  $-2 \leq \alpha \leq -1$ .
2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(x) = \frac{e^x - 3}{2}$ 
  - a. Résoudre l'équation  $g(x) = x$  sur  $\mathbb{R}^-$  (point fixe)
  - b. Pour  $x \leq 0$ , justifier que  $g(x) \leq 0$  et  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
3. On introduit la suite  $u$  définie par  $u_0 = -1$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .
  - a. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $u_n \leq 0$ .
  - b. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$  puis que  $|u_n - \alpha| \leq 2^{-n}$
  - c. En déduire que  $u$  converge vers  $\alpha$
  - d. Ecrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-9}$  près

**Exercice 12.18** Soit l'équation (E) :  $x^3 - 3x + 1 = 0$



1. Montrer que l'équation (E) admet exactement trois solutions réelles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  telles que  $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$ .
2. Approximation de  $\beta$ 
  - a. Justifier que  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$  puis vérifier que  $\beta$  est aussi solution de l'équation  $\frac{x^3+1}{3} = x$ .
  - b. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(x) = \frac{x^3+1}{3}$ .  
Pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , montrer que  $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$  et  $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .
  - c. Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .  
Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ .
  - d. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , justifier que  $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$  puis que  $|u_n - \beta| \leq 4 \cdot \frac{1}{2^n}$ .
  - e. En déduire que la suite  $u$  converge vers  $\beta$ .
  - f. Ecrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de  $\beta$  à  $10^{-5}$  près.

## 13. Matrices

**matrice** **Exercice 13.1** Déterminez  $BA, CB, AB, BC - 2A, BD, CB - D, D^t B$  et  $(D - I_2)C$  pour

**F**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**matrice** **Exercice 13.2** Si possible, déterminez  $BAC, C(B - 2A), A^2 - CB$  et  $(A - I_3)^3$  pour

**F**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**matrice** **Exercice 13.3** Calculez les matrices

**F**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times (1 \ 2 \ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \ 2 \ 3) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**matrice inversible** **Exercice 13.4** Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  vérifie  $A^2 - 2A - 3I_4 = 0$ . En

**F**

$P(A) = 0$

déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$

**matrice inversible** **Exercice 13.5** On considère la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

**F**

**réurrence forte**  
 $P(A) = 0$

1. Calculer  $J^2, J^3, J^4$ . Pour  $k \geq 4$ , que peut on en déduire pour  $J^k$  ?
2. Développer et simplifier l'expression  $(I_4 + J)(I_4 - J + J^2 - J^3)$
3. En déduire que la matrice  $(I_4 + J)$  est inversible et expliciter son inverse

**matrice inversible** **Exercice 13.6** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**F**

$AB = I_n$   
**réurrence forte**

1. Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$
2. Calculer la matrice  $D = P^{-1}AP$
3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $D^n = P^{-1}A^nP$  et en déduire  $A^n$

**matrice inversible** **Exercice 13.7** Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**F**

$P(A) = 0$

1. a. Vérifier que  $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$ . Exprimer  $M^2$  en fonction de  $M$  et  $I_3$ .  
b. En déduire que  $M$  est inversible et calculer son inverse.
2. Soient  $u$  et  $v$  les suites définies par  $u_0 = 0, v_0 = 1$  et  $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$   
Montrer par récurrence que  $M^n = u_n M + v_n I_3$  pour  $n \geq 0$
3. Montrer qu'on définit une suite constante en posant  $s_n = u_n + v_n$  pour  $n \geq 0$ . En déduire que  $u$  est une suite arithmético-géométrique. Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$
4. Exprimer  $v_n$  puis  $M^n$  en fonction de  $n$

**matrice inversible**  
**réurrence**  
**suite constante**  
**suite arithmético-géométrique**  
 $u_n$

$AB = BA$  **Exercice 13.8** Déterminer toutes les matrices  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

F

$(a_{ij})$

F système linéaire

linéaire **Exercice 13.9** Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad G = (1 \quad -1 \quad 2)$$

linéaire **Exercice 13.10** Montrer que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices lignes non-nulles  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  telles que  $M = {}^tUV$ .

F

matrice **Exercice 13.11** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

F

1. Calculer  $A + B$ ,  $2A - B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  ${}^t(AB)$  et  ${}^tB{}^tA$  (vérifier l'égalité)
2. Calculer  $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$
3. Résoudre l'équation  $A - 3X = 2B$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

matrice **Exercice 13.12** Lorsque c'est possible, calculer les produits  $AB$  et  $BA$  pour

F

1.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2.  $A = (-1 \quad 0 \quad 2)$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = {}^tA$

matrice **Exercice 13.13** Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Développer et simplifier

F

$$S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B) \quad \text{et} \quad T = (A+B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$$

matrice **Exercice 13.14** Déterminer toutes les matrices triangulaires supérieures  $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $T^2 = I_2$

F

matrice **Exercice 13.15**

F

1. Déterminer toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$  pour

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $D$  la matrice diagonale d'ordre  $n$ , de coefficients diagonaux :  $1, 2, \dots, n$ . Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $D$

$A^n$  **Exercice 13.16** Soit  $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $J^n$ .

F

**Exercice 13.17**

F

1. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices non nulles vérifiant  $AB = 0$ . Montrer que ni  $A$ , ni  $B$  ne sont inversibles.

absurde

2. Soit  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $C^2 + C = 0$  et en déduire que  $C$  n'est pas inversible.

matrice  
inversible  
 $A^{-1}$

**Exercice 13.18** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $A^3 - A^2 - A + I = 0$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$
2. Que vaut  $(A^2)^{-1}$ ? On attend 2+ méthodes

F  
 $P(A) = 0$

$A^n$

**Exercice 13.19** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que  $(A - I_4)^2 = 0$
2. Montrer que  $A$  est inversible et expliciter la matrice  $A^{-1}$
3. En remarquant que  $A = (A - I_4) + I_4$ , calculer  $A^n$  pour  $n \geq 2$ .  
La formule est-elle encore vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ ? pour  $n = -1$ ?

F

$A^n$

**Exercice 13.20** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = A - 2I_3$

Montrer que  $B^2 = 3B$ . Par récurrence, en déduire que  $A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
Comment aurait on pu faire autrement?

F  
binôme de Newton

matrice

**Exercice 13.21**

1. Pour  $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  vérifiant  $X^2 = 0$ , montrer que  $(I_p + X)^n = I_p + nX$  pour  $n \geq 1$ .
2. Pour  $XY \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  vérifiant  $Y^2 = Y$ , montrer que  $(I_p + Y)^n = I_p + (2^n - 1)Y$  pour  $n \geq 1$ .
3. Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^n$  et  $B^n$  pour  $n \geq 1$ .

F

existence  
 $A^n$   
 $u_n$

**Exercice 13.22** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'il existe un unique  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$
2. Reconnaître la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

F  
récurrence forte

matrice  
inversible  
 $A^{-1}$   
récurrence  
 $A^n$   
 $u_n$

**Exercice 13.23** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que  $A^2 = A + 2I$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'il existe deux uniques nombres réels  $u_n$  et  $v_n$  tels que  $A^n = u_n A + v_n I$ .  
On précisera les relations de récurrences entre  $u_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$  et  $u_n$  et  $v_n$ .
3. On pose  $a_n = 2u_n + v_n$  et  $b_n = u_n - v_n$ . Reconnaître les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , en déduire  $u_n$  et  $v_n$  puis  $A^n$  en fonction de  $n$

F

matrice nilpotente  
 $AB = BA$

**Exercice 13.24** Une matrice  $M$  est dite « nilpotente » s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^k = 0$ .  
Soient  $A$  et  $B$  deux matrices qui commutent.

1. Si  $A$  est nilpotente, montrer que  $AB$  l'est aussi
2. Si  $A$  et  $B$  sont nilpotentes, montrer que  $A + B$  l'est aussi.

M  
 $(a + b)^n$

inversible  
 $A^{-1}$

**Exercice 13.25** Soient  $n \geq 2$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $I - A^n = (I - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k$
2. On suppose que  $A^n = 0$  et  $A^{n-1} \neq 0$ , i.e. que  $A$  est nilpotente d'indice  $n$ .
  - a. Montrer que  $A$  n'est pas inversible
  - b. En utilisant 1), montrer que  $I - A$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $A$ .

F  
somme télescopique  
 $P(A) = 0$   
 $AB = I_n$

matrice

**Exercice 13.26**

F

1. Montrer que les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ne sont pas inversibles
2. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$X^2 = A$   
 $AB = BA$   
 inversible

**Exercice 13.27** On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et on note  $S$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$ . F

1. On suppose que  $S$  est non vide et on considère  $M \in S$ 
  - a. Montrer sans utiliser les coefficients de  $A$  que  $AM = MA$
  - b. La matrice  $A$  est-elle inversible ? Montrer alors que  $M$  n'est pas inversible.
  - c. On pose  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Dédurre des deux questions précédentes que  $a = c = d = 0$ .
2. Montrer que  $S$  est vide

matrice  
 suite géométrique  
 matrice nilpotente  
 $A^n$   
 $u_n$

**Exercice 13.28** Soient  $u$  et  $v$  les suites définies par la donnée de  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}$  et vérifiant  $(a+b)^n$  F

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad (n \geq 0).$$

1. Montrer qu'il existe une matrice  $A$  versifiant  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  pour  $n \geq 0$ . En déduire que l'on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

2. Montrer que l'on peut décomposer  $A$  sous la forme  $A = 5I_2 + J$  où  $J$  est une matrice à déterminer qui vérifie  $J^2 = 0$ . En déduire  $A^n$  pour  $n \geq 0$
3. Obtenir alors les expressions de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ ,  $u_0$  et  $v_0$ .

diagonalisation  
 $A^n$   
 $u_n$

**Exercice 13.29** On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = -1$  et F

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \quad (n \geq 0).$$

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Que vaut  $D = P^{-1}AP$  ? En déduire  $D^n$
2. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $D^n = P^{-1}A^nP$  et en déduire  $A^n$ .
3. a. Vérifier que  $X_{n+1} = AX_n$  pour  $n \geq 0$  et en déduire  $X_n$  en fonction de  $A^n$  et  $X_0$ .  
 b. Déterminer la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$

matrice

**Exercice 13.30** Soient  $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  F

1. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Déterminer alors la matrice  $D$  telle que  $M = PDP^{-1}$
2. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $M^n = PD^nP^{-1}$  et en déduire  $M^n$ .

3. Dans un club de vacances, un enfant choisit chaque jour une activité parmi « jeu de ballon », « planche à voile » ou « catamaran » selon les règles suivantes :
- Le premier jour, l'enfant choisit au hasard
  - si la veille il a choisi le jeu de ballon, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , ou change pour la planche à voile (resp. catamaran) avec probabilité  $\frac{1}{4}$ .
  - si la veille il a choisi la planche à voile, il reste fidèle à ce sport avec probabilité  $\frac{1}{3}$  ou change pour le ballon avec probabilité  $\frac{2}{3}$
  - si la veille il a choisi le catamaran, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité  $\frac{1}{4}$  ou change pour la planche à voile (resp. le jeu de ballon) avec probabilité  $\frac{1}{4}$  (resp.  $\frac{1}{2}$ )
- Pour  $n \geq 0$ , On note  $b_n$  (resp.  $v_n, c_n$ ) la probabilité que l'enfant choisisse le ballon (resp. planche à voile, resp. catamaran) le jour  $n$ . Enfin, on pose  $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ c_n \end{pmatrix}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- Déterminer  $X_1$
- A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que  $X_{n+1} = MX_n$  pour  $n \geq 1$ .
- A l'aide de la question 2), déterminer alors  $b_n, v_n$  et  $c_n$  pour  $n \geq 2$  et calculer leur limite.

**matrice** **Exercice 13.31** Un feu bicolore, passe au vert lorsqu'il est rouge avec la probabilité  $p \in ]0,1[$  et passe au rouge lorsqu'il est vert avec la probabilité  $q \in ]0,1[$ . Pour  $n \geq 0$ , on note  $r_n$  (resp.  $v_n$ ) la probabilité que ce feu soit au rouge (resp. au vert) à l'instant  $n$ . F

- Pour  $n \geq 0$ , justifier que  $\begin{cases} r_{n+1} = (1-p)r_n + qv_n \\ v_{n+1} = pr_n + (1-q)v_n \end{cases}$
- En déduire l'existence d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et montrer que

$$\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 0).$$

- Déterminer deux matrices  $B$  et  $C$  telles que  $\begin{cases} I = B + C \\ A = B + (1-p-q)C \end{cases}$
- Vérifier que  $BC = 0 = CB$
- Pour  $n \geq 0$ , exprimer  $A^n$  en fonction de  $B, C$  et  $n$
- Pour  $n \geq 1$ , en déduire  $r_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n, r_0$  et  $v_0$  puis leur limite éventuelle.

**espace vectoriel base** **Exercice 13.32** Montrer que l'on définit des espaces vectoriels, dont on donnera une base, en posant F Vect

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} & F_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : x + y = 0 \right\} \\ F_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} & F_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & & F_5 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = 2b + c \right\} \end{aligned}$$

**matrice** **Exercice 13.33** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$  F

- Montrer que  $E$  est un espace vectoriel

- Déterminer une base de  $E$  pour  $n = 3$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- mêmes questions pour  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = 0\}$  et  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**matrice** **Exercice 13.34** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . F

Montrer que  $(A, B, C, D)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  puis décomposer  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  dans cette base.

**matrice** **Exercice 13.35** Déterminer une base du sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  engendré par

**F**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

## 14. VAR et lois usuelles (univers fini)

**VAR** **Exercice 14.1** On jette deux fois de suite un dé non truqué. On introduit la VAR  $X$  égale au plus grand des numéros obtenus ainsi que la VAR  $S$  qui est égale à la somme des numéros pairs obtenus, si on obtient au moins un numéro pair, et à 0 sinon.

1. Déterminer  $\Omega$ ,  $\text{Card}(\Omega)$ ,  $X(\Omega)$  et  $S(\Omega)$
2. Déterminer la loi de  $S$ . En déduire sa fonction de répartition, et la dessiner.
3. Déterminer la fonction de répartition de  $X$  et la dessiner. En déduire la loi de  $X$ .

F  
univers  
univers image  
fonction de répartition  
loi

**probabilité** **Exercice 14.2**

1. Une urne contient  $n$  boules rouges et  $m$  boules blanches. En calculant de deux manières différentes le nombre de tirage de  $k$  boules de l'urne, montrer que

$$\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k} \quad (\text{Formule de Vandermonde})$$

2. En déduire  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$
3. Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée  $n$  fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois « pile ». *On pourra introduire deux variables aléatoires ....*

F

**loi** **Exercice 14.3** Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6 et 8. Déterminer la loi de  $X$  sachant que

$$P(X < 6) = \frac{1}{4}, \quad P(X > 6) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X = 2) = P(X = 4).$$

Calculer alors  $E(X)$  et  $V(X)$

F

**Exercice 14.4** Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise 5 boules. Soit  $B$  (resp.  $N$ ) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues.

1. Déterminer la loi de  $B$  puis calculer  $E(B)$ .
2. Trouver une relation liant  $B$  et  $N$ . En déduire la loi de  $N$  ainsi que son espérance. Que deviennent ces résultats lorsque les tirages se font avec remise ?

F

**Exercice 14.5** Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit  $X$  le nombre de tirages nécessaires. Expliciter la loi de  $X$  et son espérance.

F

**Exercice 14.6** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $X$  une VAR à valeurs dans  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$  vérifiant

$$P(X = k) = \alpha k \quad (1 \leq k \leq 10).$$

1. Déterminer  $\alpha$
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$
3. Déterminer la loi et l'espérance de  $Y = X + 1$

F

**Exercice 14.7** On dispose de  $n \geq 1$  boîtes. Pour  $1 \leq k \leq n$ , la boîte  $B_k$  contient  $k$  jetons numérotés de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte puis on tire un jeton. On note  $X$  la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de  $X$ .

F

**Exercice 14.8** On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 2 boules blanches et  $n - 2$  boules rouges. On appelle  $X$  le rang de sortie de la première boule blanche,  $Y$  le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et  $Z$  le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

F

- Déterminer la loi de  $X$  et son espérance.
- Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$  et calculer  $E(Y)$ .
- Trouver un lien entre  $Z$  et  $X$ , et en déduire sans calcul la loi de  $Z$ .

**Exercice 14.9** On jette  $n \geq 1$  fois une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est  $p \in ]0,1[$ . Soit  $X$  la VAR égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut  $n + 1$  sinon.

F

- Déterminer la loi de  $X$  et vérifier par le calcul que  $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$
- Pour  $x \neq 1$ , rappeler  $\sum_{k=0}^n x^k$  et en déduire que

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1)$$

En déduire l'espérance de  $X$

**Exercice 14.10** Un joueur mise  $s \geq 2$  euros puis tire successivement et avec remise des boules d'une urne, contenant  $\frac{1}{3}$  de boules blanches et  $\frac{2}{3}$  de boules noires. Chaque tirage enlève 1 euro de la mise. Le jeu s'arrête dans deux cas :

F

- lorsque la somme restant dans la mise est nulle
- lorsqu'il tire une boule blanche, auquel cas le joueur perçoit alors le triple de la somme restant dans la mise

On introduit la VAR  $X$  égale au nombre de tirages effectués par le joueur, et la VAR  $T$  égale à la somme perçue par le joueur.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Déterminer  $E(X)$ . On pourra reprendre la formule de l'exercice 14.9.
- Exprimer  $T$  en fonction de  $X$ . Quel est le gain relatif moyen du joueur (mise incluse) ?

**Exercice 14.11 Variante courte Edhec E 2005.** Un mobile se déplace sur un axe :

F

- A l'instant 0, il est à l'abscisse 0
- Si le mobile est à l'abscisse  $k$ , à l'instant suivant, il sera à l'abscisse  $k + 1$  avec probabilité  $p \in ]0,1[$  et en 0 sinon.

On appelle  $X_n$  la variable égale à l'abscisse du mobile à l'instant  $n$ .

- Donner la loi de  $X_0$  et de  $X_1$
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- Pour  $1 \leq k \leq n$ , montrer que  $P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k - 1)$ .
- Pour  $n \geq 1$ , en déduire que  $E(X_n) = pE_{X_{n-1}} + p$  puis déterminer  $E(X_n)$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

**Exercice 14.12** Tracer la fonction de répartition

F

- de la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$
- de la loi binomiale  $\mathcal{B}(2, \frac{1}{4})$

**Exercice 14.13**

F

traduire

- Un cycliste rencontre 5 feux de circulation sur le boulevard de Strasbourg. La probabilité qu'un feu soit vert est de  $\frac{1}{2}$ , et ce indépendamment des autres feux. On note  $X$  le nombre de feux verts pour le cycliste. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
- Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère. Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne :
  - un seul gaucher
  - au moins deux gauchers
- Un parking souterrain contient 20 scooters à 3 roues, 20 motos et 20 voitures. On choisit un véhicule au hasard, et on note  $X$  le nombre de roues de ce véhicule. Loi de  $X$ , espérance, et variance.
- Dans un magasin de matériel informatique, chaque boîte de CD a la probabilité  $\frac{49}{1000}$  de contenir au moins un CD défectueux et ce indépendamment des autres boîtes. Régulièrement, un client achète  $n$  boîtes de CD. S'il constate qu'un CD est défectueux, il rapporte toute la boîte au magasin. Comment choisir  $n$ , pour qu'en moyenne, il ait au plus une boîte à rapporter ?

**Exercice 14.14** Pour  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ , déterminer et reconnaître la loi de  $Y = n - X$  F

**Exercice 14.15** Pour  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ , calculer  $E(2^X)$  et  $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$ . F

**Exercice 14.16** Les résultats de la VAR  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$  sont affichés par un compteur détraqué : F

1. lorsque  $X \neq 0$ , le compteur affiche la bonne valeur
  2. sinon, il affiche un nombre au hasard entre 1 et  $n$
- On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur
1. Déterminer la loi de  $Y$
  2. Montrer que  $E(Y) \geq E(X)$ . Aurait-on pu deviner ce résultat ?

**Exercice 14.17** Une puce se déplace sur un axe : initialement à l'origine, elle se déplace d'une unité sur la droite avec probabilité  $p \in ]0,1[$ , ou de deux unités sur la droite avec probabilité  $1 - p$ . F

- On note  $X_n$  sa position après  $n$  sauts, et  $Y_n$  le nombre de sauts d'une unité parmi ces  $n$  sauts.
1. Déterminer la loi de  $Y_n$  puis trouver une relation entre  $X_n$  et  $Y_n$ .
  2. Donner sans calcul l'espérance et la variance de  $X_n$ . bonus : trouver la loi de  $X_n$ .

**Exercice 14.18**  $M$  demande  $F$  en mariage. Sa réponse est transmise à  $I_1$ , qui la transmet à  $I_2$  (en la niant pour blaguer avec une probabilité  $p \in ]0,1[$ ), qui la transmet de même à  $I_3$  et ainsi de suite jusqu'à  $I_n$  qui la transmet à  $M$ . Blaguer se fait indépendamment des uns des autres. F

1. Calcul préliminaire : déterminer  $\frac{1}{2}(1 + (-1)^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
2. On introduit la variable aléatoire  $X_n$  qui compte le nombre de messages contraires. Déterminer la loi de  $X_n$ . En déduire la probabilité  $p_n$  que la réponse transmise à  $B$  soit la bonne.
3. Déterminer la limite de  $(p_n)$

**Exercice 14.19** Soit  $X$  une VAR telle que  $X(\Omega) = \llbracket 0,n \rrbracket$ . Montrer que F

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$$

Partir de  $E(X)$  et exprimer  $P(X = k)$  en fonction de  $P(X > k)$  et  $P(X > k - 1)$

## 15. Applications linéaires

linéaire **Exercice 15.1** Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

F

$$\begin{array}{lll}
 f: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 (x,y,z) & \mapsto & (y,x+z)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 g: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 (x,y) & \mapsto & (2xy, x-y)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 h: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 (x,y) & \mapsto & 2x+3y
 \end{array}$$

linéaire  
Ker  
Im  
injection  
surjection

**Exercice 15.2** Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer une base de leur noyau et de leur image. Préciser si elles sont injectives, surjectives ou bijectives

F  
rang

$$\begin{array}{lll}
 f: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, y+z, x+2y)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 g: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 (x,y,z) & \mapsto & (x-y-z, y-2z)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 h: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 (x,y) & \mapsto & (y,0)
 \end{array}$$

linéaire  
 $f(x)$   
antécédent  
injection  
surjection  
Ker  
Im

**Exercice 15.3** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que les images par  $f$  des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  sont respectivement  $(1, -1, 2)$ ,  $(-3, 2, -1)$ ,  $(-7, 4, 1)$ .

F  
rang

1. Pour  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , déterminer  $f(v)$
2. Donner les antécédents par  $f$  de  $u = (-1, -1, 8)$  et de  $v = (-2, 1, 3)$ .  $f$  est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $f$

existence

**Exercice 15.4** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. Montrer qu'il existe un unique  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $f(x) = ax$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

F  
analyse-synthèse

linéaire

**Exercice 15.5** Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  avec  $g(1,1,1) = (0,1,1)$ ,  $g(1,2,3) = (1,1,1)$  et  $g(0,1,1) = (1,2,3)$ .

F

1. Montrer que la famille  $((1,1,1), (1,2,3), (0,1,1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées de  $x = (x, y, z)$  dans cette base
2. Justifier que  $g$  est uniquement définie par les données de l'exercice.
3.  $g$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ?

linéaire

**Exercice 15.6** On pose  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $f(A) = AM - MA$  pour  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

F

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. On suppose que  $A$  est inversible. Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque  $f^{-1}$ .
3. On suppose que  $f$  est surjective. Montrer que  $A$  est inversible

linéaire

**Exercice 15.7** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $f(M) = AM$  pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

F

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. On suppose que  $A$  est inversible. Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque  $f^{-1}$ .
3. On suppose que  $f$  est surjective. Montrer que  $A$  est inversible

linéaire

**Exercice 15.8** A une suite  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est associée la suite  $U$  vérifiant  $U_n = u_{n+1} - 2u_n$  pour  $n \geq 0$

F

1. a. Déterminer la suite  $U$  associée à la suite  $u$  donnée par  $u_n = n$  pour  $n \geq 0$   
 b. Déterminer la suite  $U$  associée à la suite  $u$  donnée par  $u_n = 3 \times 2^n + 1$  pour  $n \geq 0$
2. Montrer que l'application  $f: u \mapsto U$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
3. Déterminer le noyau de  $f$ . On en précisera une base.
4. Montrer que  $f$  est surjectif

linéaire

**Exercice 15.9** A une application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on associe l'application  $T(f): x \mapsto f(x+1) - f(x)$

F

1. Déterminer l'application  $T(f)$  associée à la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = ax + b$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $T: f \mapsto T(f)$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. Déterminer le noyau de  $T$ . On en précisera une base
4. Montrer que  $T$  est bijectif

**linéaire** **Exercice 15.10** soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x,y) = (x - y, x + y)$  pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  F

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et déterminer sa réciproque  $f^{-1}$
2. Donner l'expression de  $f \circ f$ .

**linéaire** **Exercice 15.11** soient  $E, F, G$ , trois  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications linéaires F  
MARRE

1. Montrer que  $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$
2. Montrer que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$

**linéaire** **Exercice 15.12** **Extrait d'EML S 2014.** A chaque application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on associe une application  $T(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant F

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

1. Pour  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , montrer que  $T(f)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée continue et que

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$$

2. Montrer que  $T : f \mapsto T(f)$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ .
3. Est-ce-que  $T$  est surjectif ?
4. Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  est paire, montrer que  $T(f)$  est paire.
5. Calculer  $T(s)$  pour l'application  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $s(x) = \sin(\pi x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
L'application  $T$  est-elle bijective ?

### 15.1 Matrices d'application linéaire

**Mat(f)** **Exercice 15.1.13** Donner les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques des espaces concernés F

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & g : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (2x - y, x + y, x) & (x,y,z,t) &\mapsto (x + y, z + t) \\ \\ h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & k : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x, 2x, x) & (x,y,z) &\mapsto 2x - z \end{aligned}$$

**Mat(f)** **Exercice 15.1.14** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linéaire, définie par  $f(x,y) = (4x - 6y, x - y)$  pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  FM

1. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$
2. Idem avec la base  $((1,1), (1,-1))$  au départ et la base canonique à l'arrivée
3. Idem avec la base canonique au départ et la base  $((1,1), (1,-1))$  à l'arrivée
4. Idem avec la base  $((2,1), (3,1))$  au départ et à l'arrivée

**f(x)** **Exercice 15.1.15** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application canoniquement associée à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . M

**Ker**  
**Im**  
**base**  
**Mat(f)**

1. Pour  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ , déterminer  $f(x,y,z)$  de deux façons différentes
2. Déterminer le noyau de  $f$  de deux façons différentes puis l'image de  $f$ . La première question était-elle nécessaire ?

3. Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**endo** **Exercice 15.1.16** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Pour  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on pose  $f(M) = AM - MA$  FM

**Mat(f)**  
**Ker**  
**Im**

1. Montrer que  $f : M \mapsto f(M)$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Déterminer la matrice  $B$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. En déduire  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

Ker  
Im

**Exercice 15.1.17** Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

FM

- Déterminer le noyau et l'image de l'application  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à  $M$ .
- Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Déterminer le noyau et l'image de l'application  $g \in \mathcal{L}(E)$  dont  $M$  est la matrice dans la base  $\mathcal{B}$ .

- mêmes questions avec  $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

endo  
Mat(f)  
auto  
Ker  
Im

**Exercice 15.1.18** Soit  $n \geq 2$ . Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$ .

FM  
rang

- Vérifier que  $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Ecrire la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- $\Phi$  est-elle un automorphisme ? Déterminer  $\text{Ker } \Phi$  et  $\text{Im } \Phi$ .

existence  
base  
Mat(f)  
nilpotence

**Exercice 15.1.19** Soit  $E$  un EV de base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ .

M  
MARRE

- Montrer qu'il existe  $u \in E$  tel que la famille  $(u, f(u), f^2(u))$  soit une base de  $E$
- Ecrire la matrice de  $f$  dans cette base
- Généraliser ce résultat lorsque  $E$  admet une base  $(e_1, \dots, e_n)$  avec  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$

Mat(f)  
base  
coordonnées  
f^n

**Exercice 15.1.20** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associé à  $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

FM  
matrice (\)  
A^n

- soient  $\vec{i} = (-2, 1, 0)$ ,  $\vec{j} = (-1, 1, -1)$  et  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{v} = (a, b, c)$  quelconque dans cette base.
- Donner la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base  $\mathcal{B}$ . Que remarquez-vous ?
- Donner la matrice de  $f^n$  dans cette base  $\mathcal{B}$ . En déduire l'expression de  $f^n$  pour  $n \geq 1$ .

$E = F \oplus G$   
base  
projecteur  
Mat(f)

**Exercice 15.1.21** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, 3, 0))$

M

- Montrer que  $F \oplus G = \mathbb{R}^3$  et préciser une base adaptée à cette somme directe.
- Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Donner la matrice de  $p$  dans cette base.
- Déterminer l'expression de  $p$ , puis donner la matrice de  $p$  dans la base canonique.

linéaire

**Exercice 15.1.22 ESCP E 96 adapté.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\Phi_a$  l'unique endomorphisme de  $E$  vérifiant

F

$$\Phi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \Phi_a(\vec{j}) = -\vec{i} + (a-3)\vec{j} + (a-1)\vec{k} \quad \text{et} \quad \Phi_a(\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + a\vec{k}$$

- Ecrire la matrice de  $\Phi_a$  dans la base  $\mathcal{B}$
- Montrer que  $\Phi_0$  est un automorphisme et déterminer la matrice de sa réciproque dans  $\mathcal{B}$ .
- Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $\Phi_a$  est un automorphisme.
  - Pour chaque valeur de  $a$ , déterminer le noyau de  $\Phi_a$ .
  - Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles le vecteur  $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$  appartient à l'image de  $\Phi_a$
- Montrer que les vecteurs  $\vec{I} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{J} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$  et  $\vec{k}$  forment une base de  $E$  et déterminer la matrice de  $\Phi_1$  dans cette base.

## 16. Intégration (sur un segment)

$\int$  **Exercice 16.1** Calculer les intégrales

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 2x^5 dx & B &= \int_1^2 \frac{dx}{x} & C &= \int_1^2 \frac{dx}{x^3} & D &= \int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} \\
 E &= \int_0^1 \sqrt{x+1} dx & F &= \int_1^2 (2x+3)^7 dx & G &= \int_1^2 \frac{dx}{x^2+1} & H &= \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}
 \end{aligned}$$

**F**  
 $\int x^\alpha dx$   
 $u = x + a$   
 $u = ax + b$   
 $u' f(u)$

$\int$  **Exercice 16.2** Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx, & J &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx, & K &= \int_0^2 \frac{e^x}{e^x+3} dx, \\
 L &= \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}, & M &= \int_1^4 \sqrt{x}(x-2\sqrt{x}) dx, & N &= \int_0^1 \frac{xdx}{x+1}, \\
 P &= \int_{-1}^1 |x^2-x| dx, & Q &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, & R &= \int_0^1 \max\left(x, \frac{1}{3}\right) dx
 \end{aligned}$$

**FM**  
 $u' f(u)$   
 $\int x^\alpha dx$   
 $+1-1$   
 Chasles

**primitive** **Exercice 16.3** Déterminer les primitives sur les intervalles où elles existent pour

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = x\sqrt{3-x}, \quad h(x) = \frac{3}{x(x-1)}$$

**FM**  
 $+1-1$   
 ipp  
 $u = ax + b$   
 élément simple

$\int$  **Exercice 16.4** Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{10} \frac{xdx}{(x^2+2)(x^2+1)} & \text{cdv } y &= x^2 & J &= \int_0^{10} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} & \text{cdv } y &= e^x \\
 K &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \frac{\ln x}{x} dx & \text{cdv } y &= \frac{1}{x} & L &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \frac{dx}{x(x+1)} & \text{cdv } y &= \frac{x}{x+1} \\
 M &= \int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}} dx & \text{cdv } y &= 1+e^x & N &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx & \text{cdv } y &= \cos(x)
 \end{aligned}$$

**M**  
 élément simple  
 $+1-1$

$\int$  **Exercice 16.5** Calculer les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 xe^x dx, & J &= \int_0^{-2} x^2 e^{5x} dx, & K &= \int_1^9 x^3 \ln(x) dx, & L &= \int_1^e x(\ln x)^2 dx, \\
 M &= \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx, & N &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx, & P &= \int_0^{\pi/4} e^x \cos(4x) dx
 \end{aligned}$$

**M**  
 ipp  
 cdv  
 double ipp

**positivité** :  $\int$  **Exercice 16.6** Montrer que  $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^3 dx \geq 0$ . Comment montrer l'inégalité stricte ?

**M**  
 $\int$  nulle

**inégalité** :  $\int$  **Exercice 16.7**

1. Pour  $n \geq 2$ , calculer  $\int_2^n \frac{dx}{x \ln x}$
2. Pour  $k \geq 2$ , montrer que  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \frac{1}{k \ln k}$
3. Montrer que l'on définit une suite  $S$  divergeant vers  $+\infty$  en posant  $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}$  pour  $n \geq 2$ .

**M**  
 somme télescopique

**encadrer limite**  $\int$  **Exercice 16.8** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} dx$  vérifie  $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.

**FM**  
 inégalité :  $\int$   
 gendarmes

somme  
|∫|  
limite

### Exercice 16.9

1. Montrer que  $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$  pour  $n \geq 1$  et  $x \neq -1$ ;
2. Pour  $n \geq 1$ , en déduire que  $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \ln 2 - u_n$  pour  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
3. Montrer alors que  $\left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$  pour  $n \geq 1$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

M  
somme géométrique  
gendarmes

monotonie  
inégalité : ∫  
relation  
limite

### Exercice 16.10

1. Déterminer la monotonie de la suite définie par  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$  pour  $n \geq 0$ .
2. Montrer que  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  pour  $n \geq 0$ . En déduire la limite de  $(I_n)$ .
3. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$  vérifie  $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$
4. En déduire la limite de  $J_n$  puis celle de  $nJ_n$ .

M  
 $u_{n+1} - u_n$   
gendarmes  
ipp

inégalité : ∫  
limite  
relation

**Exercice 16.11** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$
2. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ . En déduire la limite de  $(I_n)$
3. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$
4. Pour  $n \geq 0$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . Montrer que  $I_n = e - S_n$  puis déterminer la limite de  $(S_n)$ .

M

élément simple  
∫  
relation  
décroissant  
encadrer

**Exercice 16.12** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{1-x^2}$

1. a. Déterminer  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$  pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ . En déduire  $u_0$   
b. Calculer  $u_1$
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ . En déduire  $u_2$  et  $u_3$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante
4. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $0 \leq u_n \leq \frac{4}{2(n+1)2^{n+1}}$ . Conclusion ?

M  
 $\int x^\alpha dx$   
gendarmes

∫  
décroissant  
convergence  
relation  
 $u_n$

**Exercice 16.13** *Intégrales de Wallis.* Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$ .

1. Calculer  $W_0$  et  $W_1$ .
2. Montrer que la suite  $(W_n)$  est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .
4. Pour  $n \geq 0$ , montrer qlors que  $W_n = \frac{(2, n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .
5. Montrer que la suite définie par  $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$  pour  $n \geq 0$  est constante. Déterminer sa valeur.
6. En déduire l'expression de  $W_{2n+1}$  pour  $n \geq 0$

MD  
minorer  
récurrence faible

limite  
∫

### Exercice 16.14

1. Pour  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ .
2. Pour  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0$ .

MD  
borné  
inégalité : ∫  
gendarmes  
ipp

fonction : ∫  
définition  
signe  
parité  
 $\mathcal{C}^1$   
eau de variation

**Exercice 16.15** Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $F$  et préciser son signe.
2. Etudier la parité de  $F$
3. Justifier que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , dresser son tableau de variations et retrouver son signe.

FM  
 $\int_a^x f(t) dt$

fonction :  $\int$   
 définition  
 impair  
 signe  
 $\mathcal{C}^1$   
 dérivée  
 eau de variation

**Exercice 16.16 Escp E 89.** On pose  $g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1. a. Justifier que  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$   
 b. Montrer que  $g$  est une fonction impaire  
 c. Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$
2. a. Justifier que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b. Dresser le tableau de variations de  $g$ . On précisera  $g(0)$ .  
 c. Pour  $x > 0$ , montrer que  $xe^{-4x^2} \leq g(x) \leq xe^{-x^2}$ . En déduire les limites de  $g$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

**M**  
 inégalité :  $\int$   
 $\int_a^x f(t) dt$

fonction :  $\int$   
 continuité

**Exercice 16.17** Montrer que la fonction définie par  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^2 e^t dt$  est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur. *Proposer 3 méthodes*

**M**  
 $\int_a^x f(t) dt$   
 DL<sup>1</sup>

minorer  
 $\int_a^x f(t) dt$

**Exercice 16.18**

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ .
2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer alors que  $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

**FM**  
 tableau de variation  
 ou  
 cas

fonction :  $\int$   
 définition  
 signe  
 $\mathcal{C}^1$   
 dérivée  
 variations  
 encadrer  
 limite

**Exercice 16.19**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$
2. Trouver le signe de  $f$  selon  $x$
3. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$  pour  $x > 0$
4. En déduire les variations de  $f$
5. Pour  $x > 0$ , montrer que  $e^{-x^4} \ln x \leq f(x) \leq e^{-x^2} \ln x$ . *On séparera les cas  $x < 1$  et  $x \geq 1$ .*
6. En déduire les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

**MD**  
 $\int_a^x f(t) dt$

fonction :  $\int$   
 définition  
 décroissant  
 limite  
 $\mathcal{C}^1$   
 dérivée

**Exercice 16.20**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$
2. Montrer que  $F$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$
3. Etudier la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
4. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et que  $F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$ .

**MD**  
 cdv  
 $\int_a^x f(t) dt$

fonction :  $\int$   
 eau de variation  
 existence  
 unicité  
 variations  
 dérivabilité

**Exercice 16.21**

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ .
2. Montrer qu'il existe une unique fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\int_0^{g(x)} e^{t^2} dt = x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Etudier les variations de  $g$  ainsi que sa dérivabilité.

**M**  
 $\int_a^x f(t) dt$   
 bijection  
 $f^{-1}$

existence

**Exercice 16.22** Pour  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et vérifiant  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$ , établir l'existence de  $c \in [0,1]$  vérifiant  $f(c) = c$ .

**M**  
 Rolle

linéaire

**Exercice 16.23 Extrait d'EML S 2014.** A chaque application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on associe une application  $T(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

**F**

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

1. Pour  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , montrer que  $T(f)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée continue et que

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$$

2. Montrer que  $T : f \mapsto T(f)$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ .
3. Est-ce-que  $T$  est surjectif ?
4. Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  est paire, montrer que  $T(f)$  est paire.
5. Calculer  $T(s)$  pour l'application  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $s(x) = \sin(\pi x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
L'application  $T$  est-elle bijective ?

### 16.1 Intégrales à un paramètre

**Exercice 16.1.24** On pose  $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

F

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $F$  et préciser le signe de  $F$  sur
2. Justifier que  $F$  est dérivable sur et dresser son tableau de variations.
3. Calculer la limite de  $F$  en 0
4. Etudier le signe de  $F(x) - \ln x$  pour  $x \geq 1$ . En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

**Exercice 16.1.25** On pose  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$

F

1. Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^*$ , et déterminer le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$ . Qu'en est-il en 0 ?

**Exercice 16.1.26** On pose  $g(x) = \int_0^x \sqrt{x^2 + t^2} dt$

F

1. Pourquoi les méthodes des exercices 16.1.24 et 16.1.25 ne s'appliquent-elles plus ici pour trouver le tableau de variation de  $g$  ?
2. Déterminer l'ensemble de définition de  $g$
3. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer, à l'aide d'un changement de variable, que  $g(x) = cx|x|$  avec  $c = \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy$
4. En déduire que  $g$  est continue puis dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
5. Dresser le tableau de variations complet de  $g$ .

### 16.2 Sommes de Riemann

convergence  
limite

**Exercice 16.2.27** Etablir la convergence des suites suivantes et déterminer leur limite

M

somme de Riemann

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}, \quad w_n = \left( \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

**Exercice 16.2.28** Soit  $k \geq 2$  un entier. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

D

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$$

**Exercice 16.2.29** Déterminer la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

M

$$\forall n \geq 1, \quad v_n := \frac{1}{n^2} \left( \sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1} \right)$$

## 17. Nombres complexes

**C Exercice 17.1** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants. F

$$a = (3 + 2i)(-1 - i) \quad b = \frac{5 - i}{2 + 3i} \quad c = \frac{7 + i}{1 - i} + \frac{7 - i}{1 + i} \quad d = (5 + 3i)^2 \quad e = i^{2020}$$

**C Exercice 17.2** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . Donner la forme exponentielle des nombres complexes F

$$1 + i\sqrt{3} \quad (1 + i)^n \quad c = 1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \frac{2}{1 + i} \quad (1 + i\sqrt{3})^n \quad 1 + e^{i\vartheta} \quad 1 - e^{i\vartheta}$$

**C Exercice 17.3** Calculer  $\frac{1 + i}{1 - i}$ ,  $(\sqrt{3} + i)^5$ ,  $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{30}$  et  $\frac{1 + i \tan(x)}{1 - i \tan(x)}$  pour  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . F

**C Exercice 17.4** Résoudre les équations complexes d'inconnue  $z$  suivantes F

$$a) \quad z + \frac{9}{z} \in \mathbb{R} \quad b) \quad \left| \frac{z - 2}{iz + 3} \right| = 1 \quad c) \quad |z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z|$$

**C Exercice 17.5** Résoudre les équations complexes d'inconnue  $z$  suivantes F

$$a) \quad z^4 = i \quad b) \quad z^3 = \frac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}} \quad c) \quad z^7 = \frac{1 + i}{2} \quad d) \quad z^n = 1 - i\sqrt{3} \quad e) \quad z^n = \bar{z}$$

**C Exercice 17.6** F

1. Résoudre l'équation  $e^{ix} = 1$  pour  $x \in \mathbb{R}$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $E_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$

3. Trouver la forme algébrique de  $E_n$

4. Donner les expressions factorisés de  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et de  $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

angle moitié

**C Exercice 17.7** F

1. Ecrire la forme algébrique de  $(e^{ib} + 1)^n$  pour  $b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$

2. Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(a+kb)}$  pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**C Exercice 17.8** Simplifier  $(1 + j)^5$  et  $\frac{1}{(1 + j)^4}$  ou  $j = e^{\frac{i\pi}{3}}$  F

linéarisation

**C Exercice 17.9** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^n = 1$  pour  $n \geq 1$  F

linéarisation

**C Exercice 17.10** Ecrire  $\sin(x)^3 \times \cos(x)$  en fonction de  $\sin(4x)$  et  $\sin(2x)$  F

linéarisation

**C Exercice 17.11** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $e^z = 1 + i\sqrt{3}$  F

linéarisation

**C Exercice 17.12** Ecrire  $\cos(5x)$  en fonction des puissances de  $\cos(x)$ . De même, écrire  $\sin(5x)$  en fonction des puissances de  $\sin(x)$ . F

linéarisation

## 18. Polynômes

**Exercice 18.1** Pour  $n \geq 2$ , déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes

F

$$P = (X + 1)^{2n} - X^{2n-1}(X + 2n) \quad Q = \prod_{k=0}^n (2X - k) \quad R = (X + 3)^n - (X + 2)^n$$

**Exercice 18.2** Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  vérifiant  $2P = XP'$

F

**Exercice 18.3** Le but est de déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

F

$$(*) \quad P(X^2) = (X^2 + 1)P.$$

1. Quelques exemples :
  - a. Le polynôme  $P = X^3 + X + 1$  est-il solution ?
  - b. Le polynôme nul est-il solution ?
  - c. Montrer qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution
2. Analyse du problème : soit  $P \neq 0$  un polynôme vérifiant (\*)
  - a. En posant  $n = \deg(P)$  déterminer la seule valeur de  $n$  possible
  - b. En déduire alors tous les candidats
3. Synthèse du problème : déterminer toutes les solutions.

**Exercice 18.4** Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans  $\mathbb{R}[X]$

F

$$X^3 + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \quad 4X^4 + X^3 - 2X^2 - 5 \text{ par } 2X^2 + X + 1$$

**Exercice 18.5** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de

FM

$$\begin{array}{ll} X^n \text{ par } X^2 - 3X + 2 & X^n \text{ par } (X - 1)^2 \\ (X - 1)^n + (X + 1)^n - 1 \text{ par } X^2 - 1 & X^{2n} + 2X^n + 1 \text{ par } X^2 + 1 \end{array}$$

**Exercice 18.6** Calculer de deux manières la dérivée du polynôme  $P = (X + 1)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

FM

En déduire la somme  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

$(a + b)^n$

**Exercice 18.7** Sans développer, montrer que le polynôme  $P = (X - 3)^2 - 2(X - 2)^2 + (X - 1)^2 - 2$  est le polynôme nul

F

racines

**Exercice 18.8** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X + 1) = P(X)$ . Montrer que  $P$  est un polynôme constant. Poser  $Q = P - P(0)$  et montrer que  $Q = 0$

M

analyse-synthèse  
réurrence faible

**Exercice 18.9** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $X^2P = 0$ .

FM

1. Montrer que  $P = 0$  de deux façons différentes
2. Ce résultat reste-t-il vrai pour les fonctions ?

racines  
base

contre-exemple

**Exercice 18.10** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(x) \cos(x) + Q(x) \sin(x) = 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $P = 0$  et  $Q = 0$ .

F

**Exercice 18.11**

F

1. Montrer que  $-1$  est racine triple de  $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ . En déduire sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Préciser l'ordre de multiplicité de la racine 1 pour

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1 \quad Q = X^{2n+1} - (2n + 1)X^{n+1} + (2n + 1)X^n - 1$$

**Exercice 18.12** Déterminer l'unique polynôme  $P$  à coefficients réels vérifiant les propriétés :

F

- Le degré de  $P$  est 5
- Son coefficient dominant est 3

analyse-synthèse

- 1 est racine double de  $P$
- 2 et  $3 + 2i$  sont racines simples de  $P$

**Exercice 18.13**

F

1. Montrer que  $X^2 + 2X - 3$  divise  $X^3 + X^2 - 5X + 3$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . Proposer 3 méthodes. Quelle est la plus simple ?
2. Même question avec  $X^2 - 3X + 2$  et  $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 5X + 2$
3. Même question avec  $(X - 1)^2$  et  $2X^3 - X^2 - 4X + 3$ .

**Exercice 18.14**

F

1. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$  sachant que  $i + 1$  en est racine.
2. Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^4 + 1$ .

coeff-racine

**Exercice 18.15** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes. On pose

$$P = (X - a)(X - b) = X^2 - sX + p.$$

F

1. Déterminer  $s$  et  $p$  en fonction de  $a$  et  $b$  (relation coefficients-racines)
2. Prouver que les solutions du système  $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$  sont les couples de racines de  $P$
3. Résoudre le système  $\begin{cases} x + y = -1 \\ x \times y = -6 \end{cases}$

**Exercice 18.16** Soit  $(P_n)$  la suite de polynômes définie par  $P_1 = 1 + X$  et

F

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \dots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} \quad (n \geq 2)$$

1. A l'aide de la définition, écrire les polynômes  $P_2, P_3$  et  $P_4$ .
2. Déterminer la relation de récurrence entre  $P_{n+1}$  et  $P_n$
3. Factoriser les polynôme  $P_3$  et  $P_3$ .
4. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $P_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (X + k)$

**Exercice 18.17** Polynômes de Tchebycheff. Soit  $(P_n)$  la suite de polynômes définis par

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

F

1. Préciser  $P_2, P_3, P_4$ .
2. Pour  $n \geq 1$ , déterminer le coefficient dominant de  $P_n$  et son degré. Qu'en est-il pour  $n = 0$  ?
3. Etudier la parité de  $P_n$
4. a. Exprimer  $\cos(a)\cos(b)$  en fonction de  $\cos(a+b)$  et  $\cos(a-b)$   
 b. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , montrer alors que  $P_n(\cos x) = \cos(nx)$   
 c. En déduire les racines de  $P_n$  ainsi que sa forme factorisée

**Exercice 18.18** Polynômes d'interpolation de Lagrange.

F

1. Déterminer l'unique polynôme de degré 3 tel que  $P(1) = 0, P(2) = 0, P(3) = 0$  et  $P(4) = 1$
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $n + 1$  nombres réels distincts deux à deux  $a_0, \dots, a_n$ .  
 a. Déterminer l'unique polynôme de degré  $n$ , noté  $L_0$  vérifiant

$$L_0(a_0) = 1 \quad \text{et} \quad L_0(a_k) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

- b. Plus généralement, déterminer l'unique polynôme de degré  $n$ , noté  $L_k$ , vérifiant

$$L_k(a_k) = 1 \quad \text{et} \quad L_k(a_j) = 0 \quad (j \neq k)$$

- c. soient  $n + 1$  nombres réels  $b_0, \dots, b_n$ . Montrer que l'unique polynôme  $P$  de degré inférieur à  $n$  vérifiant  $P(a_k) = b_k$  pour  $0 \leq k \leq n$  est le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n b_k L_k$$

analyse-synthèse

### Exercice 18.19

F

1. Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$  déterminer le degré du polynôme  $P(X+1) - P(X)$  en fonction de celui de  $P$
2. Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(0) = 0$  et  $P(X+1) - P(X) = X^2$ .
3. En déduire l'expression de  $\sum_{k=1}^n k^2$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

## 18.1 Espaces vectoriels et polynômes

espace vectoriel

**Exercice 18.1.20** Montrer que les deux ensembles suivants sont des espaces vectoriels

F

sous-espace

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$

espace vectoriel

**Exercice 18.1.21** Quel est le plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  contenant  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = 3\}$  ?

F

Vect

endance linéaire  
Vect

**Exercice 18.1.22** Dans  $\mathbb{R}[X]$ , le vecteur  $P = 3X^3 - 2X^2 - 4X$  est-il combinaison linéaire des vecteurs  $Q = 1$ ,  $R = (X+1)^2$  et  $S = X^3$  ? Plus généralement, décrire  $\text{Vect}(Q, R, S)$ .

F

base

endance linéaire

**Exercice 18.1.23** Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les familles suivantes sont-elles libres ?

FM

rang

1.  $\mathcal{F}_1 = (3X, X^2 - 1, X^3)$
2.  $\mathcal{F}_2 = (X+1, X-1)$
3.  $\mathcal{F}_3 = (X^2 - 1, 21X^2 + 1, X^2 + X)$

espace vectoriel  
base

**Exercice 18.1.24** Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

F

Vect

$$E_1 = \{bX^2 + aX - a : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \quad E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P'(0)\}$$
$$E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \quad E_4 = \text{Vect}(2X+1, X+3, 4X+7)$$

continuité

**Exercice 18.1.25** Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

F

valeur intermédiaire  
limite

base  
coordonnées

**Exercice 18.1.26** Montrer que  $\mathcal{B} = (1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et décomposer le vecteur  $P = 1 + X + X^2 + X^3$  dans cette base.

F

échelonné en degré

linéaire  
Im  
Ker

**Exercice 18.1.27** Pour  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , on pose  $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$ .

F

1. Montrer que l'application  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est linéaire
2. Déterminer une base de l'image de  $f$ . L'application  $f$  est-elle bijective ?
3. Déterminer une base du noyau de  $f$

linéaire

**Exercice 18.1.28** Pour  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , on pose  $f(P) = 2P - XP'$

F

1. Montrer que  $f$  est linéaire
2. Déterminer le noyau de  $f$ . est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de  $f$ . est-elle surjective ?
4. Mêmes questions avec  $\mathbb{R}_n[X]$  à la place de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

linéaire

**Exercice 18.1.29** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  linéaire avec  $f(1,0,0) = (X+1)^2$ ,  $f(0,1,0) = X^2 + 1$  et  $f(0,0,1) = X^2$

F

1. Montrer que la famille  $(X+1)^2, X^2 + 1, X^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$
2. Qu'en déduit-on à propos de  $f$  ? Préciser alors le noyau et l'image de  $f$ .

linéaire

**Exercice 18.1.30** Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$

F

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer une base du noyau de  $f$ , puis une base de l'image de  $f$ .
3. Mêmes questions avec  $\mathbb{R}_n[X]$  remplaçant  $\mathbb{R}_2[X]$ .

linéaire

**Exercice 18.1.31** Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $f(P) = XP$  et  $g(P) = P'$ 

F

1. Vérifier que  $f : P \mapsto f(P)$  et  $g : P \mapsto g(P)$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que  $g \circ f - f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}$
3. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $g \circ f^n - f^n \circ g = n f^{n-1}$

linéaire

**Exercice 18.1.32** Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $\Phi(P) = P - P'$ 

F

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour  $0 \leq k \leq n$ , calculer  $\Phi(X^k)$
3. Déterminer une base de l'image de  $\Phi$
4. Déterminer le noyau de  $\Phi$

linéaire

**Exercice 18.1.33** Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\Phi(P) = (X^2 - 1)P$  et  $u(P) = (P(-1), P(1))$ 

F

1. Montrer que  $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  et  $u : \mathbb{R}_{n+2}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont linéaires  

$$P \mapsto \Phi(P) \qquad P \mapsto u(P)$$
2. Montrer que  $\Phi$  est injective
3. Montrer que  $\text{Im}(\Phi) = \text{Ker}(u)$
4. Montrer que  $u$  est surjective

endo  
 $\text{Mat}(f)$   
auto**Exercice 18.1.34** Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $f(P) = XP'$ FM  
rang

1. Vérifier que  $f : P \mapsto f(P)$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  puis écrire sa matrice dans la base canonique.
2.  $f$  est-elle un automorphisme ? Déterminer  $\text{Im } f$  puis  $\text{Ker } f$ .

endo  
 $\text{Mat}(f)$ **Exercice 18.1.35** Soit  $n \geq 2$ . Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $\Phi(P) = ((X^2 - 1)P)''$ 

FM

1. Vérifier que  $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Montrer que  $\Phi(1) = 2$  et  $\Phi(X) = 6X$ .
3. Déterminer la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Qu'en déduit-on sur  $\Phi$  ?

matrice (▼)

linéaire  
 $f^{-1}$ **Exercice 18.1.36** Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $f(P) = (P(0), P'(0), P(1))$ 

FM

1. Montrer que  $f : P \mapsto f(P)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer, à l'aide de la représentation matricielle, une expression de  $f^{-1}$ . Comment aurait-on pu faire sinon ?

 $\text{Mat}(f)$   
 $A^{-1}$ 

## 18.2 DM

compatibilité  
système linéaire**Exercice 18.2.37** Discuter et résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  les systèmes

F

$$a) \begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases} \quad b) \begin{cases} x & +my & & +z & & = 1 \\ mx & & +y & & +(m-1)z & = m \\ x & & +y & & & +z & = m+1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

## 19. Espaces vectoriels de dimension finie

**Exercice 19.1** Dans  $\mathbb{R}^4$ , déterminer la dimension de  $F = \text{Vect}((1, -1, 3, -3), (2, -2, 4, -4), (3, -3, 7, -7), (1, -1, 1, -1))$ . F

**Exercice 19.2** Dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , déterminer la dimension de  $F = \text{Vect}(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x^2 e^{2x})$ . F

**Exercice 19.3** F

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont on précisera la dimension.
2. Même question avec l'ensemble  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3. Même question avec l'ensemble  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  des matrices anti-symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Exercice 19.4** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que  $F_\alpha = \{x \mapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x} : (P, Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2\}$  est un espace vectoriel de dimension finie. En déterminer une base et la dimension F

**Exercice 19.5** Montrer que  $(X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . F

**Exercice 19.6** F

1. Montrer que  $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}$  est un espace vectoriel et en déterminer la dimension
2. Plus généralement, montrer que  $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(1) = 0\}$  est un espace vectoriel et en déterminer la dimension

existence  
base

**Exercice 19.7** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$  M  
MARRE

1. Montrer qu'il existe  $u \in E$  tel que  $f^{n-1}(u) \neq 0$
2. Vérifier alors que la famille  $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{n-1}(u))$  est une base de  $E$

**Exercice 19.8** On pose  $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(0) = P(4) = 0\}$  et  $Q = X(X-4)$  F

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_4[X]$
2. Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on note  $f(P) = PQ$ 
  - a. Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , montrer que  $f(P) \in E$
  - b. Montrer que  $f : P \mapsto f(P)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $E$
3. En déduire (sans calculs) une base de  $E$  ainsi que sa dimension.
4. Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ 
  - a. Montrer que l'application  $\Delta : P \mapsto \Delta(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$
  - b. Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , déterminer le degré de  $\Delta(P)$  en fonction du degré de  $P$
  - c. Déterminer le noyau et l'image de  $\Delta$
  - d. Etablir que  $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$

**Exercice 19.9** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $u = (1, 0, -1)$ ,  $v = (-1, 2, 1)$  et  $w = (3, -4, -3)$ . Déterminer le rang de la famille  $(u, v, w)$  ainsi qu'une base du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. F

**Exercice 19.10** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par  $f(x, y, z) = (x + y, y + 2z)$  pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  F

1. Montrer que  $f$  est linéaire puis que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$
2. Vérifier que  $(2, -2, 1) \in \text{Ker } f$ . En déduire  $\text{Ker } f$

**Exercice 19.11** Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P'$  F

1. Justifier que  $f : P \mapsto f(P)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$ , son rang, ainsi qu'une base de l'image

**Exercice 19.12** Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P' - (1X + 1)P$  F

1. Justifier que  $f : P \mapsto f(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer le rang de  $f$ . Qu'en déduit-on ?

**Exercice 19.13 Polynômes de Lagrange.**

F

Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  on pose  $f(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n))$

1. Montrer que  $f : P \mapsto f(P)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et en déterminer le noyau
2. Pour  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant  $P(i) = a_i$  pour  $0 \leq i \leq n$
3. Pour  $0 \leq j \leq n$ , on note  $L_j$  l'unique polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$L_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

4. Vérifier que la famille  $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$
5. Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , quelles sont les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_0, \dots, L_n)$ .

**Exercice 19.14** Soit  $n \geq 2$ . Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $f(P) = 2(X-1)P' + 3X^2P''$ 

F

1. Vérifier que  $f : P \mapsto f(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour  $0 \leq k \leq n$  déterminer  $f(X^k)$
3. Déterminer une base de l'image de  $f$
4. Déterminer une base du noyau de  $f$

**Exercice 19.15** Soit  $n \geq 2$ . Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $f(P) = nXP - X^2P'$ 

F

1. Vérifier que  $f : P \mapsto f(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour  $0 \leq k \leq n$  déterminer  $f(X^k)$
3. Déterminer une base de l'image de  $f$
4. Déterminer une base du noyau de  $f$

**Exercice 19.16** Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $f(P) = P - P'$ . Montrer  $f : P \mapsto f(P)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

F

**Exercice 19.17** Indiquer le plus rapidement possible si les applications linéaires suivantes sont des isomorphismes.

F

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(a,b) = a + (a-b)X + (a+b)X^2$
2.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(a,b,c) = a + b + (a+b)X + (a+b+c)X^2$
3.  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$

**Exercice 19.18** Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $f(P) = P(X+1) - P(X)$ 

F

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer  $\text{Ker}(f)$
3. En déduire le rang de  $f$ . Comment aurait-on pu faire sinon ?
4. pour  $n \geq 1$ , montrer que  $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

**Exercice 19.19** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

F

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^n)$  pour  $n \geq 1$
2. Montrer que  $\text{Im}(f^n) \subset \dots \subset \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$  pour  $n \geq 1$
3. En déduire que la suite des rangs  $(\text{rg}(f^n))_{n \geq 1}$  est constante à partir d'un certain rang. Qu'en est-il pour la suite des noyaux et des images ?

**Exercice 19.20** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  de dimension finie.

F

1. Montrer que  $\text{rg}(f \circ f) \leq \text{rg}(f)$ .
2. Comparer alors  $\dim \text{Ker}(f \circ g)$  et  $\dim \text{Ker}(f)$

## 20. Espaces vectoriels : sommes et supplémentaires

$E = F + G$  **Exercice 20.1** soient  $E = \text{Vect}((1,0,1), (-1,0,1))$  et  $F = \text{Vect}((1,0,0), (0,1,0))$ . Montrer que  $E + F = \mathbb{R}^3$ . La somme est-elle directe ? F

$E = F + G$  **Exercice 20.2** soient  $E = \text{Vect}(X-1, X+2)$  et  $F = \text{Vect}(X, X^2)$ . Montrer que  $E+F = \mathbb{R}_2[X]$ . La somme est-elle directe ? F

$E + F$  **Exercice 20.3** Soient  $\vec{u} = (1,0,1,0)$ ,  $\vec{v} = (0,1,-1,0)$ ,  $\vec{w} = (1,1,1,1)$ , et  $\vec{s} = (0,0,1,0)$  et  $\vec{t} = (1,1,0,-1)$ . On pose  $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et  $G = \text{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$ . Quelles sont les dimensions de  $F$ ,  $G$ ,  $F + G$  et  $F \cap G$  ? F

supplémentaire **Exercice 20.4** Déterminer un supplémentaire de  $\text{Vect}((1,0,0), (1,2,3))$  dans  $\mathbb{R}^3$ . F

$E + F$  **Exercice 20.5** Montrer que  $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 4z = 0\}$  et  $F = \text{Vect}((1,0,0))$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ . On précisera une base adaptée à cette somme directe F

$E + F$  **Exercice 20.6** Soit  $n \geq 2$ . Montrer que  $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$  est un espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ , puis déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . On précisera une base adaptée à cette somme directe. F

$E + F$  **Exercice 20.7** F  
 1. Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t M = M\}$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t M = -M\}$  sont des sous espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 2. Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$   
 3. Donner la décomposition de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  dans cette somme directe.

$E + F$  **Exercice 20.8** Pour  $n \geq 2$ , montrer que  $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$  et  $F = \{(\lambda, \dots, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^n$ . F

$E + F$  **Exercice 20.9** F  
 1. Montrer que  $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ paire}\}$  et  $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ impaire}\}$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
 2. Décomposer les fonctions  $f : x \mapsto x + 1$  et  $g : x \mapsto e^x$  dans cette somme directe.

$E + F$  **Exercice 20.10** Généralisation à 3 espaces. F  
 Soient  $E = \text{Vect}((1,1,1), (-1,1,-1))$ ,  $F = \text{Vect}((1,3,1))$  et  $G = \text{Vect}((1,1,-1))$ .  
 1. Montrer que  $E + F + G = \mathbb{R}^3$   
 2. Montrer que  $E \cap F \cap G = \{0\}$ . A t-on  $E \oplus F \oplus G = \mathbb{R}^3$  ?

$E + F$  **Exercice 20.11** On pose  $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ,  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$  et  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ . Montrer que  $E \oplus F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . F

$E + F$  **Exercice 20.12** Soit  $f \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $f(x,y,z) = (x + 2y - z, x + z, y - z)$  pour  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ . F  
 1. Déterminer le noyau puis une base de l'image de  $f$ .  
 2. Montrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .  
 3. Mêmes questions avec  $f(x,y,z) = (x + y - 2z, x + 2y - 3z, x - y)$ .

$E + F$  **Exercice 20.13** Soit  $f \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $f(x,y,z) = (x, y + z, y + z)$  pour  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ . F  
 1. Prouver que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$  et  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .  
 2. Montrer que  $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ .

$E + F$  **Exercice 20.14** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \iff \begin{cases} \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \\ \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \end{cases}$$

**F**  
MARRE

$E + F$  **Exercice 20.15** Soit  $n \geq 2$ . Montrer que les ensembles suivants sont des hyperplans de  $\mathbb{R}_n[X]$

$$H_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P'(1) = 0\} \quad H_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P(t)dt = 0\right\}$$

**F**

projecteur **Exercice 20.16**

1. Montrer que  $F = \text{Vect}((1,0,0), (1,1,1))$  et  $G = \text{Vect}((1,2,0))$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer l'expression du projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$
3. Mêmes questions avec  $F = \text{Vect}((1,0,0), (1,1,0))$  et  $G = \text{Vect}((1,1,1))$ .

**F**

$E + F$  **Exercice 20.17**

1. Montrer que la formule  $f(x,y,z) = (x,y,0)$  définit un projecteur de  $\mathbb{R}^3$  dont on donnera le support et la direction
2. Même question pour  $f(x,y,z) = (x+z, y+z, 0)$

**F**

$E + F$  **Exercice 20.18** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs, vérifiant  $p \circ q = q \circ p$ , d'un espace vectoriel  $E$

1. Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur de  $E$
2. Montrer que  $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$
3. Montrer que  $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$

**F**

$E + F$  **Exercice 20.19** **Escp E 99.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. a. Calculer  $J^2$ . En déduire que  $J$  est inversible et déterminer  $J^{-1}$   
b. Montrer que l'application  $S : M \mapsto JMJ$  définit un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Quel est son automorphisme réciproque ?
2. Soient  $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : S(M) = M\}$  et  $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : S(M) = -M\}$   
a. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
b. Montrer qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  se décompose d'une manière unique sous la forme  $M = M_+ + M_-$  avec  $M_+ \in F$  et  $M_- \in G$ . Qu'en déduit-on ?  
c. Déterminer les matrices  $A_+$  et  $A_-$
3. a. Montrer que le produit de deux matrices de  $F$  appartient aussi à  $F$ . Que peut-on dire du produit de deux éléments de  $G$  ?  
b. Pour deux matrices  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , exprimer  $(MN)_+$  et  $(MN)_-$  en fonction de  $M_+$ ,  $M_-$ ,  $N_+$  et  $N_-$

**F**

$E + F$  **Exercice 20.20** **Esc S 99.** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$  (\*).

**F**  
MARRE

- On pose  $v = u - \text{Id}_E$  et  $w = u - 2\text{Id}_E$
1. Identifier  $v - w$ . En déduire que  $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$ .
  2. Identifier  $v \circ w$  et  $w \circ v$ . En déduire que  $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(v)$  et  $\mathfrak{J}(v) \subset \text{Ker}(w)$ .
  3. Montrer alors que  $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Ker}(w)$

$E + F$  **Exercice 20.21** **HEC E 93.** On note  $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : f'' - 3f' + 2f = 0\}$  et  $F_0 = \{f \in F : f(0) = f'(0) = 0\}$ .

**F**

1. Montrer que  $F$  et  $F_0$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$
2. Montrer que  $g : x \mapsto e^x$  et  $h : x \mapsto e^{2x}$  forment une famille libre d'éléments de  $F$ .
3. Soit  $f$  un élément de  $F$ .  
a. Montrer qu'il existe un unique couple  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f - ag - bh$  soit dans  $F_0$   
b. Montrer que les fonctions  $j : x \mapsto e^{-x}(f'(x) - 2f(x))$  et  $k : x \mapsto e^{-2x}(f'(x) - f(x))$  sont constantes  
c. Déduire du résultat précédent que si  $f \in F_0$ , alors  $f = 0$   
d. Montrer que  $g, h$  est une base de  $F$ .
4. Montrer que l'on définit un isomorphisme  $\Phi : F \rightarrow \mathbb{R}^2$  en posant  $\Phi(f) = (f(0), f'(0))$  pour  $f \in F$ .

## 21. Etude asymptotique des suites

**équivalent** **Exercice 21.1** Si possible, déterminer un équivalent puis une limite au point considéré des fonctions suivantes F

$$\begin{aligned}
 a(x) &= \frac{\sqrt{x}}{1+x} \text{ en } 0 \text{ et } +\infty & b(x) &= \sin \frac{\pi}{x} \text{ en } +\infty & c(x) &= \ln(x^2) - xs \text{ en } +\infty \\
 d(x) &= \frac{(x+1)^x - 1}{x} \text{ en } 0 & e(x) &= \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \text{ en } 0 & f(x) &= \sin(x) \ln(x) \text{ en } 0 \\
 g(x) &= x \ln(1+x) - (x+1) \ln(x) \text{ en } +\infty & h(x) &= [x] \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ en } +\infty & i(x) &= \frac{\ln(\cos(x)^2)}{x^2} \text{ en } 0
 \end{aligned}$$

**équivalent** **Exercice 21.2** F

1. Déterminer un équivalent de  $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$
2. Déterminer un équivalent de  $v_n = (n+1)^p - n^p$  pour  $p \geq 2$ .
3. Déterminer un équivalent de  $w_n = 2n - \ln(n)$

**suite implicite équivalent** **Exercice 21.3** F

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$  montrer que l'équation  $x + \ln(x) = n$  admet une unique solution  $x_n \in ]0, +\infty[$ . Préciser  $x_1$
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  est croissante
3. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $n - \ln(n) \leq x_n \leq n$
4. Déterminer un équivalent simple de  $(x_n)$

**suite implicite équivalent** **Exercice 21.4** F

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$  montrer que l'équation  $x^5 + nx - 1 = n$  admet une unique solution  $x_n \in ]0, +\infty[$ .
2. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $0 < x_n < \frac{1}{n}$ . qu'en déduit-on ?
3. Déterminer un équivalent simple de  $(x_n)$
4. Déterminer un équivalent simple de  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{1}{n} - x_n$  pour  $n \geq 1$ .

**équivalent** **Exercice 21.5** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$  F

1. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . qu'en déduit-on ?
2. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$
3. Pour  $n \geq 1$ , en déduire que  $0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
4. Déterminer un équivalent simple de  $I_n$

**développements limités** **Exercice 21.6** Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes F

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(1+x) \cos(x) & g(x) &= \sin(2x) & h(x) &= xe^{2x+1} \\
 i(x) &= \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & f(x) &= \frac{e^x}{1+x} & f(x) &= \text{Arctan}(x)
 \end{aligned}$$

**développements limités** **Exercice 21.7** En utilisant un développement limité à un ordre convenable, donner un équivalent simple en 0 de F

$$f(x) = e^x - \cos(x) - \sin(x) \quad g(x) = \ln(1+x) - x \quad h(x) = e^{x+1} - (1+x)^e - e + 1$$

**développements limités** **Exercice 21.8** Déterminer les limites suivantes en 0 F

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \quad \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)} \quad \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2} \quad \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}$$

**développements limités** **Exercice 21.9** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ . Montrer que F

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n e^{-a_n} = 1$$

développe-  
ments limités

**Exercice 21.10** Pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[-1,1]$ , évaluer la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2}$  F

développe-  
ments limités

**Exercice 21.11** Inspiré d'EML 85. On pose  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  F

1. Justifier que la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et préciser la valeur de  $f'(0)$ .

développe-  
ments limités

**Exercice 21.12** EML 87 adapté. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n \ln(1+x)}{x(2+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$  F

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $f_0$
2. Préciser alors la position locale de la courbe de  $f_0$  par rapport à sa tangente en 0.
3. Mêmes questions avec  $f_n$  pour  $n \geq 1$ .

développe-  
ments limités

**Exercice 21.13** A l'aide d'un DL, étudier le comportement au voisinage de 0, préciser la tangente éventuelle ainsi que la position par rapport à la tangente, pour F

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

**Exercice 21.14** Montrer que  $\sum_{0 \leq k \leq n} e^{k^2} \sim e^{n^2}$ . M

**Exercice 21.15** a) Etablir une condition nécessaire et suffisante sur deux suites  $u_n$  et  $v_n$  pour que  $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ . F

b) trouver deux suites  $u_n \approx v_n$  telles que  $e^{u_n} \sim e^{v_n}$  et deux suites  $u'_n \sim v'_n$  telles que  $e^{u'_n} \not\sim e^{v'_n}$ .

## 21.1 DM

**Exercice 21.1.16** Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$$

1. Démontrer que l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \quad (n \geq 1).$$

2. Déterminer le sens de variation de la suite  $u$ .
3. Démontrer que l'on a

$$u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \quad (n \geq 1).$$

4. En déduire que la suite  $u$  converge vers une limite  $\ell$  strictement positive.
5. En admettant que  $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ , déterminer un équivalent lorsque  $n \rightarrow +\infty$  du  $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan défini par

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

## 22. Séries numériques

série **Exercice 22.1** Donner la nature et éventuellement la somme des séries de terme général

F  
somme télescopique

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \quad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad w_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

série **Exercice 22.2** Déterminer la nature des séries suivantes

F

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{n \geq 2} \frac{2n^2}{n^3 - 1} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} & \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^4} & \sum_{n \geq 2} \frac{5}{4^n \ln n} & \sum_{n \geq 1} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{nn^{\frac{1}{n}}} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n} & \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2} & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n - \sin n}{n^3} \end{array}$$

série **Exercice 22.3** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier la convergence et calculer la somme des séries

F

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n} & \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{4^n} & \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n} & \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} & \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)}{5^n} \\ \sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!} & \sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{n!} & \sum_{n \geq 2} ne^{-n} & \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} & \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} \end{array}$$

série **Exercice 22.4** Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , justifier la convergence et calculer la somme des séries

F

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!} \quad \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$$

série **Exercice 22.5**

MD

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$  converge et donner sa somme
2. Justifier la convergence et calculer la somme de  $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{(2n)!}$

série **Exercice 22.6** Soit  $u$  la suite définie par la donnée de  $u_0 \in ]0, 1[$  et par la relation  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$  pour  $n \geq 0$ .

F

1. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $0_L e u_n < 1$ . Montrer que la suite  $u$  converge et déterminer sa limite
2. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^2$  converge et calculer sa somme en fonction de  $u_0$ .
3. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} (n(u_n) - \ln(u_{n+1}))$  ?
4. Déterminer un équivalent de  $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ . En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$

série **Exercice 22.7** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$  avec  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante de limite nulle.

F

1. Montrer que les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes
2. Que peut-on en déduire sur la série de terme général  $(-1)^n a_n$  ?
3.
  - a. Etudier la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$
  - b. Etudier la nature de la série  $\sum \frac{1 + n(-1)^n}{n^2}$

série **Exercice 22.8**

F  
 $\sum \leq \int$

1. Pour  $k \geq 2$ , montrer que  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \frac{1}{k \ln k}$ .
2. Pour  $n \geq 2$ , en déduire que  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$
3. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$

série **Exercice 22.9**

F

1. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que  $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$
2. On introduit  $E = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 0} a_n^2 \text{ converge} \right\}$ 
  - a. Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , montrer que la suite  $\left( \frac{x^n}{\sqrt{n!}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $E$
  - b. Pour  $(a, b) \in E^2$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$  converge absolument
  - c. En déduire que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles

série **Exercice 22.10** Dans tout l'exercice,  $x$  désigne un nombre réel de  $[0, 1[$ .

F

1. a. Pour  $t \in [0, x]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} t^k - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^n}{1-t}$   
 b. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\left| \int_0^x -\frac{t^n dt}{1-t} \right| \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1}$
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en déduire que  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \ln(1-x) \right| \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1}$
3. Montrer alors que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  converge et déterminer sa somme.

série **Exercice 22.11** Inspiré d'Edhec S 2006. Soit  $u$  la suite définie par  $u_1 = 1_F 2$  et par  $u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$  pour  $n \geq 0$ .

F

1. Montrer que la suite  $u$  converge
2. a. Déterminer un équivalent de  $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$   
 b. En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$  et préciser  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)$ .
3. En déduire la limite de  $\ln(u_n)$  puis celle de  $u_n$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$ .
4. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $u_n = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}$  puis en déduire que  $\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right)$

série **Exercice 22.12** Esc S 2007. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}$

F

1. Montrer que la suite  $(J_n)$  est décroissante et converge. On note  $\ell$  sa limite
2. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n2^n} + (J_n - J_{n+1})$
3. Le but de cette question est d'établir que  $\ell = 0$ 
  - a. Montrer que les séries de terme général  $J_n - J_{n+1}$  et  $\frac{1}{3n2^n}$  sont convergentes
  - b. On suppose que  $\ell \neq 0$ . Donner un équivalent de  $\frac{J_n}{3n}$ . Quelle est alors la nature de la série de terme général  $\frac{J_n}{3n}$  ?
  - c. Conclure

série **Exercice 22.13** inspiré d'Edhec S 2013. Montrons dans deux cas particuliers que si  $a_n > 0$  pour  $n \geq 1$  avec convergence de  $\sum \frac{1}{a_n}$ , alors la série de terme général  $u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$  converge et vérifie

F

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

1. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $a_n = n(n+1)$ .
  - a. Montrer que la série de terme général  $\frac{1}{a_n}$  converge et donner sa somme
  - b. Pour  $n \geq 1$ , déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$

c. Etablir la convergence de la série de terme général  $u_n$ , donner sa somme, puis l'inégalité demandée.

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $a_n = n!$ .

2. a. Ecrire une fonction scilab dont l'en-tête est **function y=fact(n)** et qui renvoie  $n!$ . En déduire un script scilab qui calcule et affiche  $u_n$  lorsque  $n$  est un entier entré par l'utilisateur.
- b. Etablir la convergence de la série de terme général  $\frac{1}{a_n}$
- c. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$
- d. En déduire la convergence de la série de terme général  $u_n$ , puis l'égalité demandée

**série** **Exercice 22.14** Soit  $u$  la suite définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}$  pour  $n \geq 1$  F

1. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $u_n$  est bien défini et vérifie  $u_n \geq 1$
2. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = u_{n+1} - u_n$ 
  - a. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$
  - b. En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$
  - c. En déduire que la suite  $u$  converge vers un réel  $\ell$ , que l'on ne déterminera pas.
3. a. Pour  $k \geq 2$ , montrer que  $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$ 
  - b. Pour  $2 \leq p < n$ , calculer  $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$  et en déduire que
 
$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$$
  - c. Pour  $n \geq 3$ , en déduire que  $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$ . Montrer alors que  $\ell \in [2, 3]$ .
  - d. Pour  $p \geq 2$ , montrer que  $0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$
  - e. En déduire une fonction Scilab qui renvoie une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-4}$  près.

**série** **Exercice 22.15** Etudier la nature des séries de terme général défini par F

$$u_n = e^{\frac{2}{n}} - 1 - \frac{2}{n} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad w_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1$$

**développement limités** **Exercice 22.16** **Ecricom S 2016.** Pour  $n \geq 1$ , on note  $u_n = \sum_{k=1}^n -\ln(n)$  F

1. Donner un DL à l'ordre 2 en 0 de  $\ln(1+x)$  et de  $\frac{1}{1+x}$
2. Montrer que  $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$
3. Montrer que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge, puis que la suite  $(u_n)$  converge.

**Exercice 22.17** Soit  $u_0 \in ]0, \pi/2[$  et soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $u_{n+1} := \sin u_n$  pour  $n \geq 0$ . D

- a) Prouver que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante puis qu'elle tend vers 0.
- b) En déduire la nature des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^3$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ .
- c) Trouver un nombre  $\alpha > 0$  et une constante  $\beta > 0$  tels que

$$\frac{1}{(u_n)^\alpha} - \frac{1}{(u_{n+1})^\alpha} \sim \beta \quad (n \rightarrow \infty).$$

- d) En sommant la relation précédente, trouver un équivalent simple de la suite  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## 23. Espaces probabilisés et VAR (univers quelconque)

### 23.1 Espace probabilisé infini

**probabilité** **Exercice 23.1.1** Déterminer  $\bigcup_{k=1}^n A_k$ ,  $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ ,  $\bigcap_{k=1}^n A_k$  et  $\bigcap_{n \geq 1} A_n$  pour F

- $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$
- $A_n = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$

**probabilité** **Exercice 23.1.2** soit  $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$  et  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$ . F

- Vérifier que  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \Omega\}$  sont des tribus
- Construire la tribu engendrée par  $\{a\}$  et  $\{b, c\}$ , i.e. la plus petite tribu contenant ces ensembles.

**probabilité** **Exercice 23.1.3** On effectue une infinité de lancers d'une pièce avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'avoir pile. On introduit  $B = \ll \text{n'avoir aucun pile} \gg$  ainsi que  $A_n = \ll \text{ne pas avoir de pile durant les } n \text{ premiers lancers} \gg$  pour  $n \geq 1$ . Déterminer  $P(A_n)$  pour  $n \geq 1$  et en déduire  $P(B)$  F

**probabilité** **Exercice 23.1.4** On effectue des tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules vertes, en proportion  $v \in ]0, 1[$  et rouges, en proportion  $r \in ]0, 1[$ . On veut montrer qu'on obtient presque sûrement une boule rouge en un nombre fini de tirages. F

- Méthode 1 : pour  $n \geq 1$ , calculer la probabilité de  $C_n = \ll \text{on a obtenu la première boule rouge en moins de } n \text{ tirages} \gg$ . Conclure
- Méthode 2 : pour  $n \geq 1$ , calculer la probabilité de  $D_n = \ll \text{on a obtenu la première boule rouge au } n^{\text{ième}} \text{ tirage} \gg$ . Conclure.

**probabilité** **Exercice 23.1.5** On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée et on pose  $A_n = \ll \text{au cours des } n \text{ premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile} \gg$  pour  $n \geq 2$ . F

- Déterminer  $P(A_n)$  pour  $n \geq 2$ . Est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile ?
- Variante : prendre une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir face est  $p \neq 1/2$ . Montrer alors que

$$P(A_n) = \frac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1} \quad (n \geq 2)$$

Dans ce cas, est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile ?

**probabilité** **Exercice 23.1.6** Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7 et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne. F

- Déterminer la probabilité d'obtenir un total de 6 (resp. 7) en lançant 2 dés.
- Déterminer la probabilité des événements:  $B_n$  (resp.  $A_n$ ) « B (resp. A) gagne à son  $n$  ième lancer » pour  $n \geq 1$
- Décrire les événements  $G$  (resp.  $F$ ) « B (resp. A) gagne » à l'aide des événements précédents. En déduire la probabilité de succès de B (resp. A). Y-a-t-il toujours un gagnant ? Le jeu est-il équilibré ?

**probabilité** **Exercice 23.1.7** Une puce évolue sur trois cases A, B et C. A l'instant 0, la puce se trouve sur la case A, puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces cases selon la règle suivante. F

- Si la puce se trouve en A ou B, elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant suivant
- Si la puce se trouve en C, elle y restera l'instant suivant

On note  $A_n$ , resp  $B_n$ ,  $C_n$  l'événement : « la puce se trouve en A (resp. B, C) à l'instant  $n$  » et on note  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités correspondantes.

- Etablir une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  et  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ .
- Remarquer que la suite  $(a_n + b_n)$  est géométrique et déduire la valeur de  $c_n$  en fonction de  $n$ .  
bonus : déterminer les expressions de  $b_n$  et  $a_n$  en fonction de  $n$ .

- Calculer la probabilité de l'événement  $E = \text{« la puce atteint la case C »}$
- Sachant que la puce est en C à l'instant  $n + 1$ , calculer la probabilité qu'elle y ait été pour la première fois à l'instant  $n$

**probabilité** **Exercice 23.1.8** Un jeu consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré AGBP à l'aide d'un dé. A chaque tour, le jeton est déplacé, dans le sens trigonométrique, du nombre de sommets donné par un jet de dé. Le jeu se poursuit jusqu'à tomber sur G (Gain), ou jusqu'à tomber sur P (Perte). Lors de sa partie, le joueur  $J$  part du sommet A. Soit les évts :  $V = \text{« J gagne »}$  et  $B_1 = \text{« J va en B à l'issue de son premier lancer »}$ . Lors de sa partie, le joueur  $J'$  part du sommet B : on notera  $V'$  et  $B'_1$  les événements correspondants. F

- Déterminer un s.c.e adapté au jeu (du joueur J) qui contient  $B_1$ .
- A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à ce s.c.e., démontrer que  $P(V) = \frac{2}{5}(1 + P(V'))$ .
- Démontrer de même que  $P(V') = \frac{1}{5}(1 + 2P(V))$ . En déduire  $P(V)$  et  $P(V')$ . Quel est le bon choix de départ ?

**probabilité** **Exercice 23.1.9** On considère une infinité d'urnes numérotées. Pour  $n \geq 1$ , la probabilité de choisir l'urne  $n$  est égale à  $\frac{1}{2^n}$  or l'urne numéro  $n$  est composée boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ? F

### 23.2 VAR discrète

**loi** **Exercice 23.2.10** On considère deux urnes : l'urne 1 contient deux boules noires et deux boules blanches, et l'urne 2 contient 3 boules noires et 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, puis on extrait successivement et sans remise 3 boules. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Loi de  $Y$  ? F

**loi** **Exercice 23.2.11** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que  $P(X = k) = \alpha 3^{-k}$  pour  $k \geq 1$ . F

- Déterminer  $\alpha$  pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.
- $X$  a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
- Montrer que  $X$  admet une espérance et une variance et les calculer.
- On pose la variable  $Y = X(X - 1)$ . Montrer que  $Y$  admet une espérance et la calculer.

**loi** **Exercice 23.2.12** Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives 1, 2, ... Pour  $n \geq 1$ , on suppose que la probabilité de succès à la hauteur  $n$  est  $\frac{1}{n}$ . Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. F

- Justifier soigneusement que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  puis montrer que  $P(X = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$  pour  $k \geq 1$ . Vérifier alors que  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$
- Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer. bonus : Etudier la variance de  $X$

**loi** **Exercice 23.2.13** Une urne contient des boules blanches en proportion  $b > 0$  et vertes en proportion  $v > 1$  avec  $b + v = 1$ . On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit  $X$  la variable égale au nombre de tirages effectués, et  $Y$  la variable égale au nombre de boules blanches obtenues. F

- Déterminer la loi de  $X$
  - Montrer que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$
  - Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer
- Déterminer  $Y(\Omega)$  puis  $P(Y = k)$  pour  $k \geq 2$ .
  - En déduire la loi de  $Y$

**loi** **Exercice 23.2.14** Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note  $X$  la variable égale au numéro du tirage final, si un tel tirage existe, et égale à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue. F

- Donner sans calcul  $X(\Omega)$  puis déterminer  $P(X = n)$  pour  $n \geq 1$ .

2. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$ . En déduire  $P(X = 0)$ . Conclusion ?

loi **Exercice 23.2.15** On lance de manière indépendante une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est  $p \in ]0,1[$ , jusqu'à l'obtention du premier pile. On note  $X$  le nombre de lancers nécessaires et  $Y$  le nombre de "face" obtenus. F

1. Reconnaître la loi de  $X$ , et rappeler son espérance et sa variance.
2. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ . En déduire son espérance et sa variance, puis sa loi.

loi de Poisson  
 $E(X)$

**Exercice 23.2.16** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\vartheta)$ . Montrer que  $Y = \frac{1}{X+1}$  admet une espérance et la calculer. F

loi **Exercice 23.2.17** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  avec  $0 < p < 1$ . Montrer que  $P(X > k) = (1 - p)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer alors la propriété d'absence de mémoire F

$$P_{(X>\ell)}(X > k + \ell) = P(X > k) \quad (k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}).$$

loi **Exercice 23.2.18** Deux joueurs A et B lancent une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est  $\frac{1}{3}$  jusqu'à l'obtention d'un pile. On note  $X_A$  (resp.  $X_B$ ) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (resp. B). F

1. Donner la loi de  $X_A$  et de  $X_B$  ainsi que leur espérance et leur variance
2. Calculer  $P(X_A = X_B)$
3. Pour  $k \geq 1$ , calculer  $P(X_B \geq k)$ . En déduire  $P(X_B \geq X_A)$ .

loi **Exercice 23.2.19** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  vérifiant  $4P(X = n + 2) = 5P(X = n + 1) - P(X = n)$  pour  $n \geq 1$ . Montrer que  $X$  suit une loi usuelle. En déduire la valeur de son espérance et de sa variance. F

récurrence linéaire

loi **Exercice 23.2.20** Soit  $p \in ]0,1[$ . On suppose que la fonction de répartition  $F$  d'une variable  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  vérifie  $F(n) = 1 - (1 - p)^n$  pour  $n \geq 0$ . Donner la loi de  $X$ . En déduire son espérance et sa variance. F

loi **Exercice 23.2.21** Une princesse est retenue prisonnière dans un chateau. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant trois portes. Il en ouvre une au hasard. F

- S'il ouvre la première porte, un dragon apparaît et le dévore.
- S'il ouvre la deuxième, il délivre la princesse.
- S'il ouvre la troisième, une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie ce qu'il a fait et est remis à la porte du chateau.

Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré par le dragon.

1. Calculer la probabilité de l'événement  $D_k = \ll \text{il délivre la princesse au } k^{\text{ième}} \text{ essai} \gg$
2. Calculer la probabilité de l'événement  $D = \ll \text{il délivre la princesse} \gg$
3. On note  $T$  le nombre de tentatives du prince. Donner la loi de  $T$  ainsi que son espérance

loi **Exercice 23.2.22 Loi binomiale négative.** On effectue une infinité de lancers de dé indépendants et on appelle succès l'obtention d'un 6. Pour  $n \geq 1$ , on note  $X_n$  le temps d'attente du  $n^{\text{ième}}$  succès, c'est-à-dire le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention du  $n^{\text{ième}}$  succès F

1. Déterminer  $X_n(\Omega)$  puis décrire  $(X_n = n)$  et  $(X_n = n+1)$ . Que vaut  $P(X_n = n)$  et  $P(X_n = n+1)$
2. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , décrire  $(X_n = n + k)$  en précisant le nombre d'issues. En déduire la loi de  $X_n$ .
3. Pour  $n \geq 0$ , en déduire que la série  $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^k$  converge et que sa somme vaut  $5^n$ .

loi **Exercice 23.2.23** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  F

1. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$ .
2. On suppose que  $X$  admet une espérance

- a. Pour  $n \geq 0$ , montrer que  $0 \leq nP(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ . En déduire la limite de  $nP(X > n)$

- b. Dédurre du 1) que la série de terme général  $P(X > k)$  converge et que sa somme vaut  $E(X)$
3. Réciproquement, on suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$  converge
- a. En étudiant la suite des sommes partielles, montrer que  $X$  admet une espérance
- b. En déduire l'égalité des sommes  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$

**loi** **Exercice 23.2.24** Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures  $N$ , arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit  $X_1$  la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet  $n^\circ 1$  en une heure. F

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet  $n^\circ 1$  ?
3. Calculer  $P_{(N=n)}(X_1 = k)$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Et pour  $k > n$  ?
4. Déterminer  $X(\Omega)$  puis justifier que  $P(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X_1 = k)P(N = n)$  pour  $k \in \mathbb{N}$
5. Calculer alors cette somme pour en déduire la loi de  $X_1$ , puis son espérance et sa variance.

**loi** **Exercice 23.2.25** On suppose que le nombre  $N$  de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0.2. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et  $Y$  la variable égale au nombre de colis en bon état. On a donc  $X + Y = N$ . F

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , calculer la probabilité conditionnelle  $P_{(N=n)}(X = k)$
2. En déduire que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre 1
3. En suivant une méthode similaire, déterminer la loi de  $Y$

**loi** **Exercice 23.2.26** On jette  $n \geq 1$  fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est  $p$ . Soit  $X$  la var égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut  $n + 1$  sinon. F

1. Déterminer la loi de  $X$  et vérifier que  $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$ .
2. Pour  $x \neq 1$ , montrer que  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$
3. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.

## 24. Applications linéaires II

linéaire  
 $f^{-1}$

**Exercice 24.1** Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $f(P) = (P(0), P'(0), P(1))$

1. Montrer que  $f : P \mapsto f(P)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer, à l'aide de la représentation matricielle, une expression de  $f^{-1}$ . Comment aurait-on pu faire sinon ?

FM

$\mathcal{M}at(f)$   
 $A^{-1}$

linéaire

**Exercice 24.2** **Edhec ast1 2003.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de rang 1.

1. Montrer que  $f$  satisfait une et une seule des deux propriétés suivantes :

$$(A) \quad \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3 \qquad (B) \quad \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$$

2. On suppose que  $f$  satisfait la propriété (A). Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle

$f$  admet la matrice  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Que vaut alors  $f^2$  ?

3. On suppose que  $f$  satisfait la propriété (B). Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle

$f$  admet la matrice  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Que vaut alors  $f^2$  ?

F

## 25. Dérivées successives

## 26. Intégration sur un intervalle

**Exercice 26.1** Soit  $\alpha > 1$ . Nature et calcul en cas de convergence de

F

$$\begin{array}{llll}
 a) \int_0^{+\infty} \sin(x) dx & b) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx & c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx & d) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 2)^2} \\
 e) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} & f) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx & g) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} & h) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}
 \end{array}$$

**Exercice 26.2** Soit  $\alpha > 1$ . Nature et calcul en cas de convergence de  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx$

F

**Exercice 26.3** Nature des intégrales

F

$$\begin{array}{llll}
 a) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx & b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx & c) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{x + e^{-x}} & d) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \\
 e) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx & f) \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx & g) \int_0^1 \ln(x) dx & h) \int_0^1 (\ln(x+1) - \ln x) dx \\
 i) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)} dx & j) \int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx & & 
 \end{array}$$

**Exercice 26.4**

F

1. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$  converge et vaut 1
2. Nature et calcul de  $\int_0^1 x^\alpha \ln(x) dx$  pour  $\alpha > -1$

**Exercice 26.5** A l'aide du changement de variable proposé, nature et calcul (en cas de convergence) pour

F

cdv

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \quad \text{cdv: } y = e^x \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \quad \text{cdv: } x = t^2 \quad c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x} dx \quad \text{cdv: } u = e^x$$

**Exercice 26.6** soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$

F

1. Etudier la parité de  $f$
2. Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$  puis préciser sa valeur
3. Que peut-on en déduire sur  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$

**Exercice 26.7** Pour  $x \geq 0$ , calculer  $\int_x^x \sin(t) dt$ . Que peut-on en déduire sur  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$  ?

F

**Exercice 26.8**

F

1. Pour  $x \geq 1$ , montrer que  $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$
2. En déduire que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
3. Montrer de même que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$  converge
4. Pour  $t \in \mathbb{R}$ , montrer que  $|\sin t| \geq \sin(t)^2$  puis que  $|\sin t| \geq \frac{1-\cos(2t)}{2}$
5. En déduire que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  ne converge pas absolument

**Exercice 26.9** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

F

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que l'intégrale  $I_n$  converge
2. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

3. Trouver une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$
4. En déduire la valeur de  $I_n$  en fonction de  $n$
5. Montrer la convergence et préciser la valeur de l'intégrale  $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx$

**Exercice 26.10** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

F

1. Pour  $n \geq 1$ , montrer que l'intégrale  $I_n$  converge
2. Calculer  $I_1$
3. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et convergente.
4. Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$
5. Pour  $n \geq 1$ , en déduire que  $I_n = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2} \times ((n-1)!)^2}$

**Exercice 26.11** Inspiré d'Edhec E 2004. Le but est de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$

F

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , justifier l'existence de  $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$  puis calculer  $u_0$  et  $u_1$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente
3. a. Montrer que  $0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$  pour  $n \geq 0$ .  
b. Donner la limite de la suite  $(u_n)$
4. a. Pour  $n \geq 2$ , justifier la convergence de  $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$   
b. Pour  $n \geq 2$ , montrer que  $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$  puis conclure

**Exercice 26.12** On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$

F

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Etudier le sens de variation de  $f$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 26.13** On pose  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

F  
ipp

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $f$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et dresser son tableau de variations. Peut-on prolonger  $f$  par continuité en 0 ?
3. Pour  $t \geq 1$ , montrer que  $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$
4. Montrer que  $f(x)$  est équivalent à  $\frac{e^{-x}}{x}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 26.14**

F

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que l'intégrale  $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$  converge et calculer sa valeur
2. Montrer que l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$  est convergente. Est-elle absolument convergente ?
3. a. Pour  $0 < t < 1$ , et  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$   
b. Montrer alors que  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^2} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1-t} \ln(t) dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
c. En déduire qu'il existe une fonction  $f$ , prolongeable par continuité sur  $[0,1]$  telle que

$$\left| I + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^2} \right| \leq \int_0^1 |f(t)| t^n dt \quad (n \geq 0)$$

- d. Montrer qu'il existe un nombre réel  $M$  tel que  $\int_0^1 |f(t)| t^n dt \leq \frac{M}{n+1}$  pour  $n \geq 0$ .
- e. En déduire que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  converge et exprimer sa somme en fonction de  $I$

## 27. VAR à densité et lois usuelles

**Exercice 27.1** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles définissent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant une densité associée. Existence et calcul de l'espérance. F

$$F_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad F_2(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

**Exercice 27.2** Parmi les fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$ , lesquelles sont des densités d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant la fonction de répartition associée. Existence et calcul de l'espérance. F

$$f_1(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_6(x) = 1 + \sin x \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 27.3** On pose  $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$  F

1. Déterminer le réel  $a$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité. On introduit alors une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  (on dit que  $X$  suit la loi de Cauchy).
2. Déterminer la fonction de répartition associée à  $X$
3. Montrer que  $X$  n'admet pas d'espérance

**Exercice 27.4** soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  F

1. Déterminer le réel  $a$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire  $X$ .
2. Déterminer la fonction de répartition associée à  $X$ .
3. Montrer que  $X$  n'admet pas d'espérance.

**Exercice 27.5** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  F

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera  $X$
2. Déterminer la fonction de répartition associée
3. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
4. On pose  $Y = 2X + 1$  et on admet que  $Y$  est bien une variable aléatoire.
  - a. Déterminer la fonction de répartition notée  $G$  de  $Y$
  - b. Montrer alors que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité  $g$  de  $Y$
  - c. Mêmes questions avec  $Z = X^2$

**Exercice 27.6** Même énoncé que 27.5 pour  $Y = \ln X$  et  $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  F

**Exercice 27.7** EML E 96. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  F

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, notée  $X$ .
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
4. On admet que  $Y = |X|$  est bien une variable aléatoire.
  - a. Déterminer la fonction de répartition de  $G$  de  $Y$
  - b. Montrer alors que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité  $g$  de  $Y$ .

**Exercice 27.8** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  F

- Déterminer le réel  $a$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$
- Déterminer la fonction de répartition de  $X$  et son espérance, si elle existe
- On admet que  $Y = \frac{1}{X}$  et  $\frac{N=1}{X]=[Y]}$  sont des variables aléatoires.
  - Vérifier que  $Y$  est bien une variable à densité et préciser une densité.  $Y$  admet-elle une espérance ?
  - Déterminer la loi de  $N$ .  $N$  admet-elle une espérance ?

**Exercice 27.9**

F

- Rappeler une densité  $f$  de  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1,1[)$ , sa fonction de répartition  $F$ , ainsi que la valeur de son espérance.
- Montrer que  $g : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+X}{1-X} \right)$  réalise une bijection de  $] -1,1[ \text{ sur } \mathbb{R}$ , et dresser le tableau de variations de  $g^{-1}$
  - Déterminer  $g^{-1}$ . En déduire la fonction de répartition de  $Z = g(X)$ .
  - Vérifier que  $Z$  est une variable à densité, et préciser une densité de  $Z$

**Exercice 27.10** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ .

F

- Pour  $\lambda > 0$ , reconnaître la loi de  $T = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$ .
- En scilab, à l'aide de la syntaxe `rand()`, simuler une loi exponentielle de paramètre 5

**Exercice 27.11** Soit  $X \hookrightarrow E(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . On admet que  $T = X^2$  et  $U = \lfloor X \rfloor + 1$  sont des VAR.

F

- Rappeler une densité de  $X$ , sa fonction de répartition, ainsi que la valeur de son espérance.
- Vérifier que  $T$  est bien une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
- Reconnaître la loi de  $U$ . En déduire son espérance.
- 

**Exercice 27.12** Edhec E 2008. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$

F

- Vérifier que  $f$  peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ . On note  $F$  sa fonction de répartition, qu'on ne calculera pas.
- On pose  $Y = \ln(1 + |X|)$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire.
  - Exprimer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$  en fonction de  $F$ .
  - En déduire que  $Y$  est une variable à densité, et exprimer sa densité en fonction de  $f$ .
  - Reconnaître la loi de  $Y$ .

**Exercice 27.13** Edhec E 2010.

F

- Même énoncé que 27.12 avec  $Y = \ln(|X|)$  et  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .
- déterminer  $F$

**Exercice 27.14** Eml E 2006. Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

F

- Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$  converge. On admettra qu'elle vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ .
- Vérifier que  $F$  est une fonction de répartition d'une variable à densité  $X$ . Déterminer une densité de  $X$ .
- Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
- Montrer que  $X^2$  suit une loi exponentielle, dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance de  $X^2$ .

**Exercice 27.15**

F

- Montrer que si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ , alors  $P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
- Exprimer l'intégrale  $\int_0^1 e^{-(x-1)^2} dx$  à l'aide de  $\Phi$ .

3. Même question avec  $\int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x-2} dx$
4. Reprendre l'intégrale de l'exercice 27.14, et montrer qu'elle vaut effectivement  $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ .

**Exercice 27.16** Soit  $Y = X^2$  avec  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

F

1. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  en fonction de  $\Phi$ .
2. En déduire que  $Y$  est bien une variable à densité et préciser une densité.
3. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}} dx$

**Exercice 27.17 Loi lognormale** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ . On admet que  $Y = e^X$  est une variable aléatoire.

F

cdv

1. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  en fonction de  $\Phi$ .
2. En déduire que  $Y$  est bien une variable à densité, et préciser une densité.
3. Montrer que  $Y$  admet une espérance et la calculer

## 27.1 Modélisation

**Exercice 27.1.18** Suite à un problème de réseau, un client contacte le service après-vente de son opérateur. Un conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance entre 14h et 15h. On suppose enfin, que ce technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau donné.

F

1. Quelle est la probabilité que le client patiente moins de 30 minutes ? entre 10 et 30 minutes ?  
On pourra commencer par introduire une variable aléatoire .... et deviner sa loi !
2. Donner une syntaxe scilab qui permet de simuler l'heure où le technicien appelle le client.

**Exercice 27.1.19** Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre restreint de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la loi de la durée de vie de ce composant, en années, est la loi exponentielle de paramètre 1/4.

F

1. Rappeler une densité de cette loi, ainsi que son espérance et sa fonction de répartition.
2. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de quatre ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne sans défaillance au moins 6 ans, sachant qu'il a déjà fonctionné 5 ans ?
4. Pendant combien de temps, 50
5. Donner la période de garantie optimum pour remplacer moins de 15

**Exercice 27.1.20** La taille en cm d'un homme (en France) suit une loi normale de paramètres  $m = 176\text{cm}$  et  $\sigma = 7\text{cm}$ .

F

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
2. Un fabricant de vêtements pour hommes souhaite utiliser cette loi pour produire son stock.
  - a. Déterminer le réel  $a$ , tel que l'intervalle  $[m - a, m + a]$  contienne en moyenne 90 hommes.
  - b. bonus : Le fabricant en déduit 4 tailles S, M, L et XL correspondant respectivement aux intervalles  $[m - a, m - \frac{a}{2}]$ ,  $[m - \frac{a}{2}, m]$ ,  $[m, m + \frac{a}{2}]$  et  $[m + \frac{a}{2}, m + a]$ . Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

**Exercice 27.1.21** On suppose que la distance  $X$  en mètres parcourues par un javelot lancé par un athlète  $A$  suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

F

- exactement 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- exactement 25% des javelots atteignent moins de 50 mètres.

Déterminer alors les paramètres de la loi normale de  $X$ . Quelle est la longueur moyenne parcourue par un javelot ?

## 28. Formules de Taylor

29. Extrema  
**Techniques et Stratégies**

### Partie 30. Techniques : Advanced mathematical warfare

**1 (Traduire du français aux maths ou inversement)** 1, 2, 3, 4

**2 (quantificateur)** 1, 2, 3, 4, 5, 6

30.1 Raisonnements logiques

**3 (Infirmer par contre-exemple)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

**4 (Implication)** 1, 2, 3, 4, 5, 6

On suppose  $\mathcal{P}$ , puis on montre  $\mathcal{Q}$

Supposons  $\mathcal{P}$ . Montrons  $\mathcal{Q}$  ...

**5 (Inclusion)** 1, 2, 3

On suppose prend  $x \in A$ , puis on montre que  $x \in B$

Soit  $x \in A$ . Montrons que  $x \in B$  ...

**6 (Double Implication)**

On prouve  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$

- Montrons que  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$  ...
  - Montrons que  $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$  ...
- A fortiori, on a  $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$

**7 (Raisonnement direct)**

$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \implies \dots \implies \mathcal{Z}$

Comme  $\mathcal{P}$ , on a ... donc  $\mathcal{Q}$  est vraie, de sorte que ... et en conclusion  $\mathcal{Z}$  est vraie

Remarques :

- les liens logiques du raisonnement doivent être matérialisés à l'aide de mots français correctement employés : comme, car, par conséquent, puisque, donc, or, en conclusion, a fortiori, on a, on en déduit que, implique que, découle de, ...
- l'utilisation inadéquate d'un mot ou des symboles  $\implies$  et  $\iff$  pour matérialiser un lien logique du raisonnement est sanctionnée

**8 (Raisonnement par contraposée)** 1, 2

Pour démontrer que  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ , on montre que  $\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}}$

Supposons que  $\mathcal{Q}$  soit fausse. Alors, ... donc  $\mathcal{P}$  est fausse.  
Par contraposition, on conclut que  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$

**9 (Raisonnement par équivalences)** 1, 2, 3, 4

$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \iff \dots \iff \mathcal{Z}$

$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$  car ...  
 $\iff \vdots$   
 $\iff \mathcal{Z}$  car ...

**10 (Raisonnement par l'absurde)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

On suppose la négation de  $\mathcal{P}$ , on en déduit une proposition qui ne peut être vraie (contradiction).  
On conclut alors que  $\mathcal{P}$  est vraie

Supposons que  $\mathcal{P}$  soit fausse.  
Alors ... et donc la propriété vraie  $\mathcal{Q}$  est fausse, ce qui est absurde.  
En conclusion,  $\mathcal{P}$  est vraie

11 (Raisonnement par analyse-synthèse) 1, 2, 3, 4, 5

12 (Partitioner en cas disjoints) 1, 2, 3, 4, 5

Pour établir une proposition  $\mathcal{P}_x$  pour  $x \in C_1 \cup \dots \cup C_n$

- Lorsque  $x \in C_1$ , ... donc  $\mathcal{P}_x$  est vraie
  - ...
  - Lorsque  $x \in C_n$ , ... donc  $\mathcal{P}_x$  est vraie
- En conclusion,  $\mathcal{P}_x$  est vraie pour  $x \in C_1 \cup \dots \cup C_n$ .

13 (Raisonnement epsilononique) 1, 2

14 (Méthode Automatique de Résolution et de Rédaction Efficace) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Les objectifs complexes sont, autant que possible, divisés en objectifs plus simples, prouvés ensuite

30.2 Récurrences

1, 2, 3

On déduit des (une infinité de) propositions, d'une initialisation et d'un procédé de transmission.

Remarques :

- La manière correcte d'initialiser une récurrence, se déduit de la transmission utilisée.
- La récurrence doit être adaptée aux besoins (récurrence finie ? transmission ? départ de 0 ? ...)

15 (Récurrence faible) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

Schema de récurrence :  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$

- $\mathcal{P}_0$  est vraie car ...
  - Supposons  $\mathcal{P}_n$  pour **un** entier  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$  ...
- En conclusion,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour  $n \geq 0$

16 (Récurrence faible (avancée)) 1, 2

17 (Récurrence à deux pas) 1, 2, 3

Schema de récurrence :  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$  et  $(\mathcal{P}_{n-1}$  et  $\mathcal{P}_n) \implies \mathcal{P}_{n+1}$

- $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont vrais car ...
  - Supposons  $\mathcal{P}_{n-1}$  et  $\mathcal{P}_n$  pour **un** entier  $n \geq 1$ . Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$  ...
- En conclusion,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour  $n \geq 0$

18 (Récurrence forte) 1, 2, 3, 4

Schema de récurrence :  $\mathcal{P}_0, (\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n) \implies \mathcal{P}_{n+1}$

- $\mathcal{P}_0$  est vraie car ...
  - Supposons  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$  pour **un** entier  $n \geq 0$ . Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$  ...
- En conclusion,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour  $n \geq 0$

19 (Récurrence finie)

Schema de récurrence :  $\mathcal{P}_0, (n < N$  et  $\mathcal{P}_n) \implies \mathcal{P}_{n+1}$

- $\mathcal{P}_0$  est vraie car ...
  - Supposons  $\mathcal{P}_n$  pour **un** entier  $n \in \llbracket 0, N \llbracket$ . Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$  ...
- En conclusion,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour  $0 \leq n \leq N$

### 30.3 Existence

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**

**20 (Théorème de Rolle) 1, 2, 3**

### 30.4 Unicité

**1, 2, 3, 4**

### 30.5 Situer

**1**

**21 (Appartenir) 1**

### 30.6 Images et antécédents

**22 (Antécédents) 1, 2**

**23 (Images)**

**24 (Application)**

**25 (Ensemble image)**

**26 (Ensemble image réciproque)**

**27 (Résoudre l'équation  $y = f(x)$ ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

Fixer  $y \in F$  et déterminer tous les  $x \in E$  vérifiant  $y = f(x)$ , en procédant par équivalences.

Soit $y \in F$ . Comme, $y = f(x) \iff \dots \iff$	$\left  \begin{array}{l} x = \dots \\ x \in \dots \end{array} \right.$ alors $f \dots$
--	--

▷  $f$  est surjective s'il y a toujours au moins une solution  $x \in E$

▷  $f$  est injective s'il y a toujours au plus une solution  $x \in E$

▷  $f$  est bijective s'il y a toujours exactement une solution  $x \in E$ . La résolution donne alors également une formule pour la bijection réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  car

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \quad (x \in E, y \in F)$$

Utile pour:

- déterminer si  $f$  est injective, surjective, bijective
- trouver une formule pour une bijection réciproque
- déterminer les antécédents, les images réciproques par  $f$

Nécessite : l'équation  $y = f(x)$  soit être soluble

équivalences, résoudre

repose sur...

**28 (Injection) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

**29 (Surjection) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

#### 30.6.1 Bijection

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**30 (Bijection réciproque) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

**31 (Dériver une bijection réciproque) 1, 2**

**32 (Transférer les propriétés de  $f$  sur  $f^{-1}$ , en posant  $x = f^{-1}(y)$ ) 1, 2**

### 30.7 Transformer une expression

**1**

#### 30.7.1 Calcul

**33 (Entiers) 1**

**34 (Fractions) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**35 (Dérivation)**

**36 (négation) 1, 2**

**37 (contraposition)**

**38 ( $a^b = e^{b \ln a}$ ) 1, 2**

#### 30.7.2 Identités fondamentales

**39 (Identité remarquable  $(a - b)^2$ ) 1**

**40 (Identité remarquable  $(a + b)^2$ )**

**41 (Identité remarquable  $a^2 - b^2$ )**

42  $(a^n - b^n)$  1

43 (Binôme de Newton  $(a + b)^n$ ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

30.7.3 Trigonométrie

1, 2, 3

44  $(\cos(a + b))$

45  $(\sin(a + b))$  1

46  $(\tan(a + b))$

47  $(\cos(2x))$

48  $(\sin(2x))$

30.7.4 Rassembler en un seul élément

49 (Mettre sous le même dénominateur) 1, 2

Mettre sous le même dénominateur

$$\frac{a}{c} + \dots + \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{u}{u} + \dots + \frac{b}{d} \times \frac{v}{v} = \frac{au + \dots + bv}{ppcm} \text{ avec } ppcm = cu = \dots = dv$$

Remarque : on utilisera systématiquement le plus petit commun multiple (ppcm) de  $c, \dots, d$  au lieu d'appliquer sans réfléchir la formule  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$  pour ensuite réduire la fraction obtenue.

30.7.5 Séparer en plusieurs parties plus simples

1, 2, 3, 4, 5, 6

30.7.6 Simplifier une expression

1, 2, 3, 4, 5

30.7.7 Développer une expression

1, 2

30.7.8 Factoriser une expression

1

30.7.9 Techniques diverses

50 (changement d'indice) 1

51 (quantité conjuguée) 1, 2, 3, 4, 5 52  $((P \implies Q) = (\bar{P} \text{ or } Q))$

Factoriser une expression avec des racines

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Etudier le signe, en présence de racines

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ est de même signe que } a - b$$

Forme algébrique d'un inverse de nombre complexe

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

53 (Changement d'apparence  $+1 - 1$ ) 1, 2, 3

30.8 Résoudre

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

### 30.8.1 Systèmes linéaires

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

**54 (Système d'équations) 1, 2, 3**

**55 (compatibilité) 1, 2, 3**

### 30.8.2 Equations Polynômiales

**1, 2, 3, 4**

**56 (Changement d'inconnue) 1**

**57 (Mise sous forme canonique) 1, 2, 3, 4, 5, 6**

*Mettre sous forme canonique*

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a \times (X^2 + uX + v) \\ &= a \times \left[ \left( X + \frac{u}{2} \right)^2 + \frac{\text{nombre}}{4} \right] \\ &= a \times \left[ \left( X + \frac{u}{2} \right)^2 - \frac{\Delta'}{4} \right] \\ &= a \times \left[ \left( X + \frac{u}{2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4} \right] \\ &= a \times \left( X + \frac{u-\omega}{2} \right) \left( X + \frac{u+\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

1. Factoriser  $a$

2. Utiliser l'identité remarquable  $X^2 + uX = \left( X + \frac{u}{2} \right)^2 - \frac{u^2}{4}$  et simplifier pour obtenir **nombre**

3. faire apparaitre un signe négatif **nombre** =  $-\Delta'$

4. Ecrire que  $\Delta' = \omega^2$  en utilisant une racine carrée  $\omega$  de  $\Delta'$  (se rappeler que  $i^2 = -1$ ).

5. factoriser en utilisant l'identité remarquable  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

Remarques, on a :

- $u = \frac{b}{a}$  et  $v = \frac{c}{a}$
- $\Delta' = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$  indique le nombre de racines réelles :
  - Si  $\Delta \neq 0$ , les racines sont  $\frac{-u+\omega}{2}$  et  $\frac{-u-\omega}{2}$ .  
Elles valent  $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  si  $\Delta > 0$  et  $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  si  $\Delta < 0$ .
  - Si  $\Delta = 0$ ,  $\frac{-u}{2} = \frac{-b}{2a}$  est racine double.

### 30.8.3 Equations Trigonometriques

### 30.8.4 Equations Matricielle

**58 (Poser une matrice) 1**

**59 (Racine carrée matricielle) 1**

**60 (Commuter) 1, 2, 3**

### 30.8.5 Equations fonctionnelles

**61 (Changement de fonction inconnue)**

### 30.8.6 Equations portant sur des suites

**62 (Changement de suite inconnue) 1, 2**

### 30.8.7 Inéquations

**63 (Inéquations)**

### 30.9 Polynômes

### 30.10 Matrices

**64 (Matrice diagonale) 1**

**65 (Matrice triangulaire supérieure) 1**

### 30.11 Inversibilité

**66 (Relation matricielle polynômiale) 1, 2, 3, 4, 5**

#### 30.11.1 Matrice inversible

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**67 (Matrice inverse) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

**68 (Matrice inverse (définition)) 1, 2**

**69 (Matrice non inversible) 1**

**70 (Matrice puissance) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

**71 (Matrice nilpotente) 1, 2**

### 30.12 Diagonalisation

**1, 2**

**72 (Matrice diagonalisable)**

### 30.13 Espaces vectoriels

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

**73 (Sous-espace vectoriel) 1, 2, 3, 4**

**74 (Espace engendré) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

**75 (Appartenir à un Vect) 1, 2, 3**

**76 (Equation cartésienne) 1**

### 30.14 Familles libres ou liées

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

#### 30.14.1 Famille libre

**1, 2**

**77 (Un vecteur non nul)**

**78 (Deux vecteurs non colinéaires)**

**79 (Famille de même rang que son cardinal (fini))**

**80 (Famille de polynômes échelonnés en degré) 1**

#### 30.14.2 Famille liée

#### 30.14.3 Familles génératrices

**81 (Famille de même rang que la dimension (finie))**

#### 30.14.4 Bases

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19**

**82 (Coordonnées dans une base) 1, 2, 3**

**83 (Utilisation du rang) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

#### 30.14.5 Sommes d'espaces vectoriels

**84 ( $E = F \oplus G$ ) 1**

#### 30.14.6 Dimension

**1, 2**

### 30.15 Applications linéaires

**85 (Application linéaire) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25**

**86 (Noyau) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**87 (Image) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**88 (Matrice d'une application linéaire) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Pour obtenir la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$  de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B} = (b_j)_{1 \leq j \leq n}$  et  $\mathcal{C} = (c_i)_{1 \leq i \leq m}$

1. Dessiner une matrice

2. Facultatif : sur la droite, écrire les vecteurs  $c_i$  de la base d'arrivée  $\mathcal{C}$

3. Facultatif : Sur le haut, écrire l'image  $f(b_j)$  par  $f$  des vecteurs de la base de départ  $\mathcal{B}$

4. Calculer  $f(b_j)$  pour  $1 \leq j \leq n$  : Il y a autant de colonnes que de vecteurs au départ

5. exprimer  $f(b_j)$  en fonction des  $c_i$  avec l'intuition ou, en désespoir de cause, en résolvant le système

$$f(b_j) = x_1 c_1 + \dots + x_p c_m$$

6. Reporter les coefficients  $c_1, \dots, c_m$  obtenus pour la colonne  $j$  dans la matrice

**89 (projecteur) 1, 2**

### 30.16 Fonctions de référence

**90 (Logarithme  $\ln x$ ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**91 (Exponentielle  $e^x$ ) 1**

**92 (Puissance  $a^n$ ) 1, 2, 3**

**93 (Racine  $\sqrt{x}$ ) 1, 2, 3, 4, 5, 6**

**94 (valeur absolue  $|x|$ ) 1, 2, 3, 4**

**95 (Partie entière  $[x]$ ) 1, 2, 3**

**96 (Partie fractionnaire  $\{x\}$ ) 1**

**97 (Cosinus  $\cos x$ )**

**98 (Sinus  $\sin x$ )**

**99 (Tangente  $\tan x$ )**

**100 (Arctangente  $\text{Arctan } x$ )**

**101 (Fonction homographique  $\frac{ax+b}{cx+d}$ ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

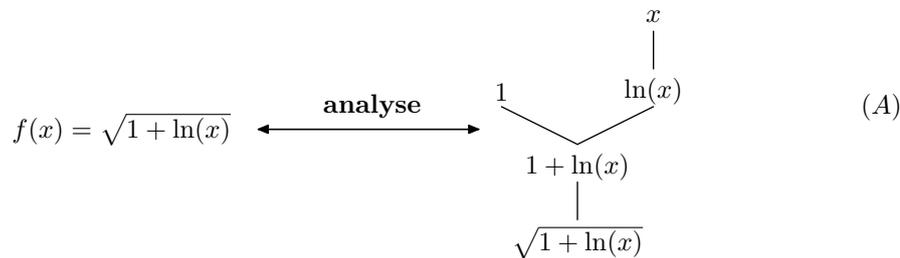
**102 (module) 1**

30.17 Etude de régularité

103 (Analyse de calcul) 1

Analyser un calcul

Au brouillon, décomposer l'expression  $f(x)$  en un arbre d'étapes élémentaires.



Les contraintes sont

$\underbrace{x > 0}_{\ln}$ et $\underbrace{1 + \ln(x) \geq 0}_{\sqrt{\cdot}}$	définition, continuité
$\underbrace{x > 0}_{\ln}$ et $\underbrace{1 + \ln(x) > 0}_{\sqrt{\cdot}}$	dérivable, $\mathcal{C}^1$ , ...

30.17.1 Définition

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

104 (La base : via l'analyse (A)) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Déterminer un ensemble de définition

Comme  $x \in \mathcal{D}f \iff \boxed{C_1}$  et ... et  $\boxed{C_n}$   
 $\iff \dots$   
 $\iff x \in E$ ,  
 nous concluons que  $\mathcal{D}f = E$ .

1. Déterminer les contraintes  $C_1, \dots, C_n$  pour la définition de  $f(x)$  à l'aide de l'analyse (A).
2. Résoudre le système constitué par ces contraintes
3. L'ensemble de définition  $\mathcal{D}f$  est l'ensemble solution  $E$  du système de ces contraintes

30.17.2 Continuité

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

105 (Continuité dans le cas simple) 1, 2, 3, 4, 5

Continuité de  $f$  est continue sur  $E$  (cas simple)

1. Déterminer les contraintes  $C_1, \dots, C_n$  pour la continuité de  $f(x)$  à l'aide de l'analyse (A).
2. Etablir les continuités des étapes élémentaires du haut de l'arbre à sa racine, à l'aide de la résolution des contraintes

Continuité d'une composée

Comme  $f$  est continue sur  $I$ , à valeurs dans  $J$ , et comme  $g$  est continue sur  $J$ , la composée  $g \circ f$  est continue sur  $I$

Continuité d'un quotient

Comme  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  et comme  $g(x) \neq 0$  pour  $x \in I$ ,  
 le quotient  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $I$

106 (Continu) 1, 2, 3

30.17.3 Dérivabilité

1, 2, 3, 4, 5

107 (Limite du taux d'accroissement) 1

108 (Fonction dérivable) 1, 2, 3

30.17.4 Classe  $C^1$

1, 2, 3, 4

109 (Classe  $C^1$  (cas simple))

30.17.5 Classe  $C^n$

30.17.6 Classe  $C^\infty$

30.17.7 Dérivée

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

30.18 Evaluer, trouver une formule

30.18.1 Trouver  $u_n$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

110 (Suites constantes) 1

111 (Suites arithmétiques) 1, 2, 3

112 (Suites géométriques) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

113 (Suites arithmético-géométriques) 1, 2, 3, 4

114 (Récurrences linéaires d'ordre 2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Reconnaitre la récurrence linéaire du second ordre

La suite  $u$  satisfait la récurrence linéaire  $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$  pour  $n \geq 0$ , qui admet le polynôme caractéristique  $P = aX^2 + bX + c$

Si  $P$  admet deux racines distinctes

Comme le polynôme caractéristique a deux racines distinctes  $z$  et  $s$ , il existe deux nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$u_n = \lambda z^n + \mu s^n \quad (n \geq 0).$$

Si  $P$  admet une racine double

Comme le polynôme caractéristique a une racine double  $z$ , il existe deux nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$u_n = \lambda z^n + \mu n z^n = (\lambda + \mu n) z^n \quad (n \geq 0).$$

Déterminer les constantes pour trouver  $u_n$  en fonction de  $n$

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha\lambda + \beta\mu \\ u_1 &= \alpha'\lambda + \beta'\mu \end{cases}$$

1. Utiliser les conditions initiales pour obtenir un système
2. Résoudre puis reporter les valeurs obtenues pour  $\lambda$  et  $\mu$  dans la formule de  $u_n$

A fortiori, on a  $u_n = \dots$  pour  $n \geq 0$

30.18.2 Calculer une somme

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23**

**115 (Sommes telescopiques) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**

**116 (Sommes arithmétiques) 1, 2**

**117 (Sommes géométriques) 1, 2, 3, 4**

**118 (Binôme de Newton) 1**

**119 (Sommes de Beroulli) 1, 2, 3, 4, 5, 6**

**120 (Formule de Vandermonde)**

30.19 Parité et périodicité

30.19.1 parité

**1, 2, 3, 4**

**121 (pair)**

**122 (impair) 1, 2**

30.19.2 périodicité

**123 (périodique) 1**

**124 (anti-périodique)**

**125 (Théorème des valeurs intermédiaires) 1, 2, 3**

**126 (Relation de Chasles) 1, 2, 3, 4, 5**

30.20 Inégalités

**1, 2, 3, 4**

**127 (Inégalité des accroissements finis) 1**

30.20.1 Minorer

**1, 2, 3, 4**

30.20.2 Majorer

**1, 2, 3, 4**

30.20.3 Encadrer

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33**

30.20.4 Borne sup

**1**

30.20.5 Borne inf

30.20.6 Plus petit élément

30.20.7 Plus grand élément

30.21 Etudier le signe

**1, 2, 3, 4, 5, 6**

**128 (Un carré de nombre réel est positif (ou nul)) 1**

**129 (Tableau de signe) 1, 2**

30.22 Etudier les variations

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17**

**130 (Monotone) 1, 2, 3, 4, 5, 6**

**131 (Croissant)**

**132 (Décroissant) 1, 2, 3**

### 30.22.1 Monotonie et variations des fonctions

**133 (Tableau de variation)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

Pour établir un tableau de variation  $f$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
2. (facultatif) Etudier la parité et la périodicité de  $f$ , afin de réduire l'intervalle d'étude.
3. Etude de dérivabilité et calcul de  $f'(x)$
4. Etude du signe de  $f'(x)$
5. Dresser le tableau de variation de  $f$

Pour établir une majoration du type  $a(x) \leq b(x)$  pour  $x \in I$

1. Utiliser que  $a(x) \leq b(x) \iff 0 \leq b(x) - a(x)$  pour  $x \in I$
2. Dresser le tableau de variation de  $f(x) = b(x) - a(x)$  sur  $I$
3. A l'aide du tableau, établir la positivité de  $f$  sur  $I$

### 30.22.2 Monotonie des suites

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

**134 (Méthode à essayer en priorité)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Monotonie de  $u_n$

Calculer et simplifier  $\Delta = u_{n+1} - u_n$  pour trouver son signe

- si  $\Delta > 0$  pour chaque  $n$  : suite strictement croissante
- si  $\Delta \geq 0$  pour chaque  $n$  : suite croissante
- si  $\Delta = 0$  pour chaque  $n$  : suite constante
- si  $\Delta \leq 0$  pour chaque  $n$  : suite décroissante
- si  $\Delta < 0$  pour chaque  $n$  : suite strictement décroissante

**135 (Méthode pour produits, quotients, puissances et factorielles.)** 1, 2, 3, 4, 5

Monotonie de  $u_n > 0$

Lorsque  $u_n$  est toujours strictement positif, calculer et simplifier  $Q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$  pour le comparer à 1

- si  $Q > 1$  pour chaque  $n$  : suite strictement croissante
- si  $Q \geq 1$  pour chaque  $n$  : suite croissante
- si  $Q = 1$  pour chaque  $n$  : suite constante
- si  $Q \leq 1$  pour chaque  $n$  : suite décroissante
- si  $Q < 1$  pour chaque  $n$  : suite strictement décroissante

Si  $u_n$  est toujours strictement négatif, se ramener au cas précédent en posant  $v_n = -u_n$ , les conclusions pour  $u_n$  sont inversées.

Si  $u_n$  change régulièrement de signe, il n'y a pas de monotonie

**136 (Méthode pour les suites, s'exprimant à l'aide de fonctions élémentaires)** 1

Monotonie de  $u_n = f(n)$

1. Dresser le tableau de variation de  $f$
2. Utiliser ce tableau pour comparer  $u_{n+1} = f(n+1)$  et  $u_n = f(n)$

Il est nécessaire d'arriver à dériver  $f$  et à étudier le signe de sa dérivée  $f'$  pour aboutir

**137 (Méthode par récurrence)**

Monotonie de  $u_n$

Prouver par récurrence l'une des propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}_n : u_{n+1} > u_n$
- $\mathcal{Q}_n : u_{n+1} \geq u_n$
- $\mathcal{R}_n : u_{n+1} = u_n$
- $\mathcal{S}_n : u_{n+1} \leq u_n$
- $\mathcal{T}_n : u_{n+1} < u_n$

Cette méthode est parfois utilisable pour une suite récurrente ou implicitement définie.

Exemple : la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n^3$  pour  $n \geq 0$  est strictement croissante.

- $u_1 = 8 > 2 = u_0$
- si  $u_{n+1} > u_n$  alors  $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}$  par stricte croissance de  $f : x \mapsto x^3$  sur  $\mathbb{R}$

### 30.23 Suite implicite

1, 2, 3, 4, 5

Stratégie pour étudier une suite définie implicitement par une équation du type  $f_n(u_n) = 0$  ( $n \geq 0$ )

1. Dresser le tableau de variation de  $f_n$
2. Situer les solutions possibles de  $f_n(x) = 0$  via la monotonie de  $f_n$  : déduire que  $a < u_n < b$  (resp.  $b < u_n < a$ ) de la croissance (resp. décroissance) stricte de  $f_n$  et des relations :
  - a.  $f(a) < 0$
  - b.  $f(b) < 0$
  - c.  $u_n$  est l'unique solution de  $f(x) = 0$  sur  $[a, b]$
3. Pour  $x$  fixé, étudier le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ .
4. En déduire le signe de  $f_{n+1}(u_n) = f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$
5. de l'inégalité  $f_{n+1}(u_n) \leq 0 = f_n(u_n)$  (resp.  $f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_n(u_n)$ ) et de la monotonie de  $f_n$  déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
6. Déduire le comportement asymptotique de  $u_n$  de sa localisation, de sa monotonie et de la relation  $f_n(u_n) = 0$ .

### 30.24 Suites récurrentes

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

*Stratégie pour étudier une suite récurrente du type  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  ( $n \geq 0$ )*

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  permet de situer  $u_n$  :
  - a. trouver un intervalle  $I$  stable par  $f$ , i.e. tel que  $f(I) \subset I$
  - b. si  $a \in I$ , prouver par récurrence que  $u_n \in I$  pour  $n \geq 0$
2. Etudier le signe de la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  permet d'étudier la monotonie de  $(u_n)$ 
  - a. Dresser le tableau de variation de  $g$
  - b. En déduire le signe de  $g$  sur un intervalle  $I$  d'étude
  - c. Le signe de  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$  donne le sens de variation de  $(u_n)$
3. à partir de la localisation (encadrement) de  $(u_n)$  et de sa monotonie, il est souvent possible de montrer d'établir sa convergence (ou divergence)
4. En cas de convergence, on trouve sa limite en résolvant l'équation  $\ell = f(\ell)$  obtenue par passage à la limite dans  $u_{n+1} = f(u_n)$

### 30.25 Etudier la convergence

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40**

**138 (Diverger vers  $+\infty$ ) 1**

**139 (Opérations) 1, 2**

**140 (Principe des gendarmes) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14**

**141 (Théorème de croissance comparée) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

**142 (Factoriser le terme dominant dans les sommes) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

**143 (Utiliser la limite du taux de variation (une dérivée)) 1**

**144 (Faire un développement limité) 1**

**145 (Suites adjacentes) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

**146 ( $\ell = f(\ell)$ ) 1, 2, 3**

#### 30.25.1 Etude asymptotique

**147 (Equivalent) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**148 (Etude des branches infinies) 1, 2**

**149 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) 1, 2, 3**

### 30.26 Calculer un produit

**1, 2, 3**

### 30.27 Intégrales

#### 30.27.1 Primitives

**150 (Primitive de fonction continue) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**151 (Primitive de  $x^\alpha$ ) 1, 2, 3**

**152 (Primitive (ou changement de variable) avec la forme  $u'f(u)$ )**

**153 (Primitive avec translation) 1**

**154 (Primitive avec translation) 1, 2**

**155 (Fonction définie par une intégrale à un paramètre Primitive avec translation) 1, 2, 3, 4, 5, 6**

**156 (Changement de variable) 1, 2, 3, 4, 5**

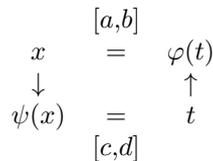
Pour procéder au changement de variable  $x = \varphi(t)$  dans l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$

Comme l'application [1] est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur [2], à valeurs dans [3],  
comme l'application [4] est continue sur [3],  
il résulte du changement de variable  $x = \varphi(t)$  que  $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d$  [5]  $dt$ .

1. a. Isoler  $t$  dans  $x = \varphi(t)$  pour obtenir que  $t = \psi(x)$ , si possible.  
b. dériver ces relations par rapport à la variable isolée pour obtenir (truc des physiciens) que

$$\boxed{dx = \varphi'(t)dt} \quad \text{ou} \quad \boxed{dt = \psi'(x)dx}$$

- c. Utiliser également ces relations, pour trouver que
$$\begin{array}{lll} x = a & \text{correspond à} & t = c \\ x = b & \text{correspond à} & t = d \end{array}$$
  
d. Compléter la partie [5], ce qui donne 2 points.
2. Pour justifier correctement et obtenir 2 points de plus,
  - a. dessiner au brouillon le schéma



- b. Parmi les deux flèches, représentant  $t \mapsto \varphi(t)$  ou  $x \mapsto \psi(x)$ , choisir l'application qui est  $\mathcal{C}^1$  et qui vous plaît le plus pour remplir [1], [2] et [3]
- c. Pour le block [4], mettre l'applications du block [5] qui utilise la variable isolée à la pointe de la flèche choisie (c'est  $f$  si vous avez choisi de prendre  $t \mapsto \varphi(t)$  pour [1] et l'autre sinon)

**157 (Intégration par partie) 1, 2, 3, 4, 5**

30.28 Séries

**158 (Nature)**

**159 (Calcul)**

30.29 Intégrales généralisées

30.30 Développements limités

30.31 Dénombrement

**160 (Arbre de dénombrement) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** Pour compter le nombre de cas d'un arbre

- on utilise l'addition pour un arbre hétérogène (ou non)
- On utilise la multiplication pour un arbre homogène

**161 (Liste (application)) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

**162 (Arrangement (injection)) 1, 2, 3**

**163 (Permutation (bijection)) 1, 2**

**164 (Combinaison (partie)) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

**165 (Surjection) 1, 2**

**166 (Pendule point barre) 1**

30.32 Univers

**1, 2, 3**

**167 (Univers Image) 1**

30.33 Evenements

**1, 2**

**168 (Incompatibilité)**

**169 (Indépendance)**

30.34 Probabilité

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34**

170 (Probabilité du complémentaire) **1**

171 (Formule de Poincaré) **1**

172 (Formule du crible) **1**

30.35 VAR

**1, 2**

173 (Fonction de répartition) **1**

30.36 Lois

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18**

174 (loi certaine)

175 (loi uniforme) **1, 2, 3, 4**

176 (loi de Bernoulli)

177 (loi binomiale)

178 (loi géométrique)

179 (loi hypergéométrique)

180 (loi de Poisson) **1**

181 (loi géométrique tronquée)

182 (loi uniforme continue)

183 (loi exponentielle)

184 (loi normale)

30.37 Limite de probabilité d'une suite d'événements

30.38 Probabilités conditionnelles

**1**

185 (Arbre (probabilités conditionnelles))

186 (Définition)

187 (Formule des probabilités composées)

188 (Formule des probabilités totales)

189 (Formule de Bayes)

30.39 Espérance  $E(X)$

**1, 2**

30.40 Variance  $V(X)$

**1**

## Table des matières

1	Révisions, suites de référence	1
1.1	Révisions	1
1.2	Suites de référence	2
1.3	DM	3
2	Logique	4
2.1	Logique	4
2.2	Raisonnements	4
3	Récurrences, sommes, produits, factorielles	6
4	$\mathbb{R}$ et Suites	9
4.1	$\mathbb{R}$	9
4.2	Suites	9
4.3	DMS	12
5	Ensembles et applications	15
5.1	Ensembles	15
5.2	Applications	15
6	Limite et continuité (locale)	18
6.1	Suites	18
6.2	Fonctions	19
7	Dénombrément	22
7.1	Dénombrer	22
7.2	sommes	25
8	Probabilités sur un univers fini	26
8.1	Probabilité uniforme	26
8.2	événements	26
8.3	probabilités	27
9	Systèmes linéaires	30
10	Espaces vectoriels (introduction)	31
11	Etude globale des fonctions	33
11.1	continuité	33
12	Dérivation	35
13	Matrices	38
14	VAR et lois usuelles (univers fini)	44
15	Applications linéaires	47
15.1	Matrices d'application linéaire	48
16	Intégration (sur un segment)	50
16.1	Intégrales à un paramètre	53
16.2	Sommes de Riemann	53
17	Nombres complexes	54
18	Polynômes	55
18.1	Espaces vectoriels et polynômes	57
18.2	DM	58

19	Espaces vectoriels de dimension finie	59
20	Espaces vectoriels : sommes et supplémentaires	61
21	Etude asymptotique des suites	63
21.1	DM	64
22	Séries numériques	65
23	Espaces probabilisés et VAR (univers quelconque)	68
23.1	Espace probabilisé infini	68
23.2	VAR discrète	69
24	Applications linéaires II	72
25	Dérivées successives	73
26	Intégration sur un intervalle	74
27	VAR à densité et lois usuelles	76
27.1	Modélisation	78
28	Formules de Taylor	79
29	Extrema	80
30	Techniques : Advanced mathematical warfare	81
30.1	Raisonnements logiques	81
30.2	Récurrences	82
30.3	Existence	83
30.4	Unicité	83
30.5	Situer	83
30.6	Images et antécédents	83
30.6.1	Bijection	83
30.7	Transformer une expression	83
30.7.1	Calcul	83
30.7.2	Identités fondamentales	83
30.7.3	Trigonométrie	84
30.7.4	Rassembler en un seul élément	84
30.7.5	Séparer en plusieurs parties plus simples	84
30.7.6	Simplifier une expression	84
30.7.7	Développer une expression	84
30.7.8	Factoriser une expression	84
30.7.9	Techniques diverses	84
30.8	Résoudre	84
30.8.1	Systèmes linéaires	85
30.8.2	Equations Polynômiales	85
30.8.3	Equations Trigonométriques	85
30.8.4	Equations Matricielle	85
30.8.5	Equations fonctionnelles	85
30.8.6	Equations portant sur des suites	85
30.8.7	Inéquations	85
30.9	Polynômes	85
30.10	Matrices	85
30.11	Inversibilité	85
30.11.1	Matrice inversible	85
30.12	Diagonalisation	85
30.13	Espaces vectoriels	86

30.14	Familles libres ou liées	86
30.14.1	Famille libre	86
30.14.2	Famille liée	86
30.14.3	Familles génératrices	86
30.14.4	Bases	86
30.14.5	Sommes d'espaces vectoriels	86
30.14.6	Dimension	86
30.15	Applications linéaires	86
30.16	Fonctions de référence	86
30.17	Etude de régularité	87
30.17.1	Définition	87
30.17.2	Continuité	87
30.17.3	Dérivabilité	88
30.17.4	Classe $C^1$	88
30.17.5	Classe $C^n$	88
30.17.6	Classe $C^\infty$	88
30.17.7	Dérivée	88
30.18	Evaluer, trouver une formule	88
30.18.1	Trouver $u_n$	88
30.18.2	Calculer une somme	89
30.19	Parité et périodicité	89
30.19.1	parité	89
30.19.2	périodicité	89
30.20	Inégalités	89
30.20.1	Minorer	89
30.20.2	Majorer	89
30.20.3	Encadrer	89
30.20.4	Borne sup	89
30.20.5	Borne inf	89
30.20.6	Plus petit élément	89
30.20.7	Plus grand élément	89
30.21	Etudier le signe	89
30.22	Etudier les variations	89
30.22.1	Monotonie et variations des fonctions	90
30.22.2	Monotonie des suites	90
30.23	Suite implicite	90
30.24	Suites récurrentes	91
30.25	Etudier la convergence	91
30.25.1	Etude asymptotique	91
30.26	Calculer un produit	91
30.27	Intégrales	91
30.27.1	Primitives	91
30.28	Séries	92
30.29	Intégrales généralisées	92
30.30	Développements limités	92
30.31	Dénombrement	92
30.32	Univers	92
30.33	Evenements	92
30.34	Probabilité	93
30.35	VAR	93
30.36	Lois	93
30.37	Limite de probabilité d'une suite d'événements	93
30.38	Probabilités conditionnelles	93
30.39	Espérance $E(X)$	93
30.40	Variance $V(X)$	93

$\int$  nulle : 1  $f(x)$  : 1, 2, 3, 4, 5 loi de Poisson : 1  $C^1$  : 1, 2, 3, 4 cardinal : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 série : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 suite constante : 1 antécédent : 1, 2 prouver : 1, 2, 3, 4, 5, 6  $C^1$  : 1  $+1 - 1$  : 1, 2, 3 arrangement : 1, 2, 3 conditionnement : 1  $f^n$  : 1 unicité : 1, 2, 3, 4  $E + F$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17  $E = F + G$  : 1, 2 matrice ( $\blacktriangleright$ ) : 1 parité : 1, 2, 3, 4 somme : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 élément : 1 tableau de variation : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 divisibilité : 1 factoriser le terme dominant : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sous-espace : 1, 2, 3, 4 échelonné en degré : 1 approximation : 1  $u_n = f(n)$  : 1  $\ell \leq \ell'$  : 1, 2, 3 dénombrer : surjection : 1, 2  $\int x^\alpha dx$  : 1, 2, 3 ensemble : 1, 2 somme télescopique : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13  $DL^1$  : 1 encadrer : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 valeur absolue : 1, 2, 3, 4 permutation : 1, 2 compatibilité : 1, 2, 3 division euclidienne : 1 linéarisation : 1, 2, 3, 4, 5 angle moitié : 1  $\mathbb{C}$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 somme de Riemann : 1 constant : 1  $\int_a^x f(t)dt$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7  $DL^1$  : 1  $\sum \leq \int$  : 1 formule du crible : 1 dénombrer : arbre : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 MARRE : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12  $u_{n+1} - u_n$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 fonction :  $\int$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6  $w_n =$  : 1, 2 univers image : 1  $u_{n+1}/u_n$  : 1, 2, 3, 4, 5 binôme de Newton : 1 décroissant : 1, 2, 3  $|\int|$  : 1 diverger $^{+\infty}$  : 1 opération ensembliste : 1, 2, 3 attribut : 1 double inclusion : 1  $a^n - b^n$  : 1 inégalité :  $\int$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6 positivité :  $\int$  : 1 double ipp : 1 cdv : 1, 2, 3, 4, 5 élément simple : 1, 2, 3 somme arithmétique : 1, 2 variations : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ipp : 1, 2, 3, 4, 5 relation : 1, 2, 3, 4, 5, 6 espace vectoriel : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 continuité : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 diagonalisation : 1, 2 signe : 1, 2, 3, 4, 5, 6  $Mat(f)$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 récurrence faible : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 base : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19  $u = ax + b$  : 1, 2 fonction de répartition : 1 complémentaire : 1 quantité conjuguée : 1, 2, 3, 4, 5  $u = x + a$  : 1  $\int$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 projecteur : 1, 2 limite : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 suite récurrente : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10  $E = F \oplus G$  : 1 développer : 1, 2 matrice ( $\setminus$ ) : 1 raisonnement epsilonïque : 1, 2 nilpotence : 1 dimension : 1, 2 comparer : 1 endo : 1, 2, 3, 4  $u'f(u)$  : 1, 2 récurrence forte : 1, 2, 3, 4 partie fractionnaire : 1 suite implicite : 1, 2, 3, 4, 5 système linéaire : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 séparer : 1, 2, 3, 4, 5, 6  $\text{Im}$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 récurrence faible (M) : 1, 2 valeur intermédiaire : 1, 2, 3 croissance comparée : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 fraction : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 constante : 1 Rolle : 1, 2, 3  $V(X)$  : 1 transformer : 1  $A = B$  : 1 dérivée : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 impair : 1, 2  $E(X)$  : 1, 2 loi : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 inversible : 1 dérivabilité (F) : 1, 2, 3, 4, 5 impaire : 1  $X^2 = A$  : 1  $\overline{P}$  or  $Q$  : 1, 2 récurrence linéaire : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 élimination : 1 contraposée : 1, 2 primitive : 1  $(a_{ij})$  : 1  $AB = BA$  : 1, 2, 3 continuité (F) : 1, 2, 3, 4, 5 dérivable : 1, 2, 3  $f^{-1}$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 équation polynômiale : 1 périodique : 1 minorer : 1, 2, 3, 4 résoudre : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 factoriser : 1 changer l'inconnue : 1 inversible : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 système : 1, 2, 3 simplifier : 1, 2, 3, 4, 5 inégalité : 1, 2, 3, 4 formule de Poincaré : 1  $\text{Ker}$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 monotone : 1, 2, 3, 4, 5, 6 changement d'indice : 1 traduire : 1, 2, 3, 4 monotonie : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 majoration : 1  $(f^{-1})'$  : 1, 2 loi uniforme : 1, 2, 3, 4 univers : 1, 2, 3  $AB = I_n$  : 1, 2 polynôme : 1, 2, 3, 4 rang : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 borne sup : 1 quantificateur : 1, 2, 3, 4, 5, 6  $a^b$  : 1, 2 analyse de calcul : 1 tableau de signe : 1, 2 dérivabilité : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 supplémentaire : 1 module : 1 somme de Bernoulli : 1, 2, 3, 4, 5, 6  $(a+b)^n$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 équivalences : 1, 2, 3, 4 situer : 1 opération : 1, 2 variation : 1 dépendance linéaire : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 étude de  $f(x)$  : 1, 2, 3 DL : 1  $P(A) = 0$  : 1, 2, 3, 4, 5 libre : définition : 1 forme canonique : 1, 2, 3, 4, 5, 6 libre : 1, 2 négation : 1, 2 monotonie de  $u$  : 1 définition (F) : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dans un Vect : 1, 2, 3 auto : 1, 2 coordonnées : 1, 2, 3 combinaison : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 matrice nilpotente : 1, 2 définition : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 taux d'accroissement : 1 linéaire : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 reste euclidien : 1 analyse-synthèse : 1, 2, 3, 4, 5  $\ln$  : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 développements limités : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 événement : 1, 2 sommer : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 récurrence à 2 pas : 1, 2, 3 récurrence : 1, 2, 3 inclusion : 1, 2, 3 même dénominateur : 1, 2 composée : 1, 2 VAR : 1, 2  $n$ -liste : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 point barre : 1 racines : 1, 2 complémentaire : 1  $(a-b)^2$  : 1 coeff-racine : 1 ou : 1 appartenir : 1 somme géométrique : 1, 2, 3, 4 divergence : 1, 2 bijection : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 probabilité : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 cas : 1, 2, 3, 4, 5 homographie : 1, 2

**3, 4, 5, 6, 7**  $f(x) = 0$  : **1** DL<sup>1</sup> : **1** entier : **1** terme dominant : **1** asymptote : **1** carré positif : **1**  
 continu : **1, 2, 3** implication : **1, 2, 3, 4, 5, 6** matrice : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,**  
**14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22** suite arithmético-géométrique : **1, 2, 3, 4** équivalent : **1, 2, 3,**  
**4, 5, 6, 7** convergence : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,**  
**22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40** résoudre  $y = f(x)$  : **1,**  
**2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10** Chasles : **1, 2, 3, 4, 5** borné : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7** puissance : **1, 2, 3** exp  
 : **1** et : **1** Vect : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** multiplier : **1, 2, 3** contre-exemple : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**  $A^n$   
 : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**  $\sin(a + b)$  : **1** suite géométrique : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,**  
**13, 14** absurde : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**  $\ell = f(\ell)$  : **1, 2, 3** surjection : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** suite  
 arithmétique : **1, 2, 3** existence : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13** suites adjacentes : **1, 2,**  
**3, 4, 5, 6, 7, 8** opérations : **1, 2** bijection : **1** majorer : **1, 2, 3, 4** trigo : **1, 2, 3**  $\leq$  : accroissements  
 finis : **1** équivalence : **1, 2, 3, 4**  $x = f^{-1}(y)$  : **1, 2** injection : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10** branche  
 infinie : **1, 2**  $u_n$  : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23,**  
**24** vrai ou faux : **1, 2, 3, 4, 5** partie entière : **1, 2, 3** gendarmes : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,**  
**12, 13, 14** racine : **1, 2, 3, 4, 5, 6**  $A^{-1}$  : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

Missing

$\int$  nulle,  $f(x)$ , cardinal, série, prouver,  $\mathcal{C}^1$ ,  $f^n$ ,  $E + F$ ,  $E = F + G$ , somme, élément, divisibili-  
 té, approximation, ensemble, DL<sup>1</sup>, division euclidienne, linéarisation, angle moitié,  $\mathbb{C}$ , somme de  
 Riemann, constant,  $\sum \leq \int$ ,  $|\int|$ , opération ensembliste, attribut, double inclusion, inégalité :  $\int$ ,  
 positivité :  $\int$ , double ipp, élément simple, relation,  $\int$ , limite, nilpotence, comparer, endo,  $u'f(u)$ ,  
 constante,  $A = B$ , impaire, *overlinemathcalP* or *mathcalQ*, primitive, équation polynômiale,  
 majoration, dérivabilité, supplémentaire, opération, variation, étude de  $f(x)$ , libre : définition, mo-  
 notonie de  $u$ , auto, reste euclidien, développements limités, composée, racines, complémentaire,  
 coeff-racine, ou, divergence,  $f(x) = 0$ , DL<sup>1</sup>, terme dominant, asymptote, matrice, borné, et, bijec-  
 tion, équivalence, vrai ou faux,