1. Révisions, suites de référence

1.1 Révisions

simplifier fraction

Exercice 1.1.1 Simplifier **F**

$$\frac{2}{9}-\frac{1}{15}+\frac{5}{6} \qquad \frac{1}{6}+\frac{6}{8}+\frac{5}{9} \qquad \frac{\frac{4}{25}-\frac{6}{35}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{15}} \qquad \left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)\times\left(\frac{9}{4}+\frac{21}{6}\right) \qquad \frac{\frac{26}{18}\times\frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}$$

simplifier puissance

Exercice 1.1.2 Simplifier $\dfrac{(-18)^7\times 2^4\times(-50)^3}{(-25)^4\times(-4)^5\times(-27)^2}$ **F**

simplifier ln

Exercice 1.1.3 Exprimer $\ln(4\sqrt{2})$ en fonction de $\ln(2)$. **F**

simplifier racine

Exercice 1.1.4 Simplifier **FM** quantité conjuguée

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \qquad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$$

résoudre polynôme

Exercice 1.1.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes **F** équivalences forme canonique changer l'inconnue

E_1 : $3x^4+5x^2-2=0$ $\qquad$ E_2 : $(\ln x)^2+3\ln(x)+2=0$

E_3 : $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2$ $\qquad$ E_4 : $\ln(3x)+\ln(x-1)=\ln(2)+2\ln(3)$

E_5 : $x=\sqrt{x}+2$ $\qquad$ E_6 : $\sqrt{x^2-9}=4-x$

E_7 : $3^{2x}-3^{x+1}+2=0$

résoudre valeur absolue polynôme racine

Exercice 1.1.6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes **FM** équivalences forme canonique cas

E_1 : $\left|x^2+x+1\right|=|x|$ $\qquad$ E_2 : $|2x+1|=x-4$

E_3 : $\sqrt{|x^2-1|}=x-5$

résoudre valeur absolue polynôme racine puissance

Exercice 1.1.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes **FM** équivalences forme canonique même dénominateur cas

E_1 : $x^3+5x\leqslant 6x$ $\qquad$ E_2 : $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x(x+1)}\leqslant 1$ $\qquad$ E_3 : $3\times 2^{3x-4}\geqslant 7^8$

E_4 : $|x^2-2|\geqslant 2$ $\qquad$ E_5 : $|x+4|\leqslant 5-3x$ $\qquad$ E_6 : $|x-4|\leqslant|2x+1|$

E_7 : $|x-3|+|x^2-3x+2|\leqslant 2$ $\qquad$ E_8 : $x-4\sqrt{x-2}\geqslant 0$

résoudre polynôme racine valeur absolue

Exercice 1.1.8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes **FM** équivalences forme canonique cas

E_1 : $1-x^2\geqslant 0$ $\qquad$ E_2 : $x^2+2\leqslant 5x-4$ $\qquad$ E_3 : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}<3$

E_4 : $x-1\leqslant\sqrt{x+2}$ $\qquad$ E_5 : $\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\geqslant 2$ $\qquad$ E_6 : $\frac{x-1}{x+1}<\frac{2}{x-1}$

E_7 : $|2x+1|\leqslant|x-3|\leqslant 2$ $\qquad$ E_8 : $|x+1|-|2x-1|\leqslant 1$

dérivabilité dérivée

Exercice 1.1.9 Dérivez les fonctions suivantes, là où elles sont dérivables. : **F** dérivabilité (F)

$2x^3-3x^2+1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^3}$	$\sqrt{x+2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
$x\ln(x)-x$	$\sin(x)\cos(x)$	$\cos(x)^2-\sin(x)^2$	$\frac{x+1}{x+2}$	$x\cos(x)\mathrm{e}^x$
$\frac{x}{x^2+1}$	$\tan(x)$	$\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x}$	$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$	$\ln\frac{x+1}{x-1}$
$\ln(\cos(x))$	$\mathrm{e}^{3x}\sin(x^2)$	$\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$	$\ln(\ln(x))$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

définition dérivabilité dérivée

Exercice 1.1.10 Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée des fonctions **FM** définition (F) dérivabilité (F)

$f:x\mapsto\ln(2-x)$ $\qquad$ $g:x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$h:x\mapsto x\ln\left(\frac{x+2}{3x-1}\right)$ $\qquad$ $i:x\mapsto\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2x+3}$

majorer **Exercice 1.1.11** Pour $x \geqslant 1$, prouver que $\ln(x) \leqslant \sqrt{x}$. **F** tableau de variation

majorer **Exercice 1.1.12** Pour $x \leqslant 0$, prouver que $1 - x + \frac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. **F** tableau de variation

1.2 Suites de référence

u_n sommer **Exercice 1.2.13** Soit u la suite arithmétique vérifiant $u_0 = \frac{2}{3}$ et $u_{11} = 0$. **F** suite arithmétique
1. Exprimer u_n en fonction de n
2. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots u_{12}$

u_n sommer **Exercice 1.2.14** On considère la suite u définie par $u_{n+1} = -\frac{u_n}{4} \qquad (n \geqslant 0)$. **F** suite géométrique
1. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n
2. Calculer $v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

attribut **Exercice 1.2.15** Soient a, b et c trois réels distincts, a étant non nul. On suppose que a,b,c sont en progression arithmétique et que $3a$,b,c sont en progression géométrique. Que dire de la raison de cette progression géométrique? **FM** suite arithmétique suite géométrique système

u_n **Exercice 1.2.16** Exprimer u_n en fonction de n pour les suites u définies par **F** récurrence linéaire forme canonique
1. $u_0 = 2$, $u_1 = \sqrt{5}$ et $u_{n+2} + u_{n+1} = u_n \quad (n \geqslant 0)$
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $8u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \quad (n \geqslant 0)$
3. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $9u_{n+2} + 6u_{n+1} + u_n = 0 \quad (n \geqslant 0)$
4. $u_0 = -1$, $u_1 = \sqrt{3}$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n \quad (n \geqslant 0)$
5. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0 \quad (n \geqslant 0)$

relation u_n **Exercice 1.2.17** Deux suites u et v vérifient $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et **FM** récurrence linéaire forme canonique

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = u_n + 4v_n \end{cases} \qquad (n \geqslant 0)$$

1. Démontrer que la suite u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2
2. En déduire u_n puis v_n en fonction de n

résoudre relation u_n **Exercice 1.2.18** Soit u la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - n - 2$ pour $n \geqslant 0$. **M** suite arithmétique suite géométrique
1. Déterminer une suite arithmétique v vérifiant $v_{n+1} = 2v_n - n - 2$ pour $n \geqslant 0$
2. Déterminer une relation satisfaite par $w = u - v$
3. En déduire w_n puis u_n en fonction de n.

existence u_n sommer **Exercice 1.2.19** Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $6u_{n+1} = 2u_n + 6n + 3$ pour $n \geqslant 0$. **M** suite géométrique
1. Montrer qu'il existe un réel b, indépendant de n, telle que $v_n = 2u_n - bn + 3$ soit une suite géométrique.
2. En déduire u_n en fonction de n
3. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

uite géométrique u_n **Exercice 1.2.20** Soient u et v deux suites vérifiant $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ et **M**

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

on pose $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = 2u_n - v_n$ pour $n \geqslant 0$
1. Montrer que les suites a et b sont géométriques
2. Déterminer l'expression de a_n et de b_n en fonction de n
3. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n

u_n limite **Exercice 1.2.21** Déterminer u_n ainsi que sa limite pourr **F** récurrence linéaire

$$u_0 = u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \qquad (n \geqslant 0).$$

convergence **Exercice 1.2.22** Soient $(a,b) \in]0,\infty[^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n-1}} \qquad (n \geqslant 0).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

M
ln
récurrence linéaire

u_n
sommer
Exercice 1.2.23 Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $2u_{n+1} = u_n + 3 \quad (n \geqslant 0)$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

M
suite arithméti-co-géométrique

u_n **Exercice 1.2.24** Exprimer u_n en fonction de n pour u vérifiant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 5$ $(n \geqslant 0)$.

F
suite arithméti-co-géométrique

1.3 DM

Exercice 1.3.25 Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

continuité
dérivabilité
variations
dérivée

1. étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 (*taux d'accroissement...*).
2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$.
   a. étudier les variations de φ.
   b. établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β.
      On admettra que $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.
   c. Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$.
   d. En déduire les variations de f.
3. Déterminer la limite
   a. de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. de $\ln(x) - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Construire soigneusement les courbes représentatives $\mathcal{C}$ de f et Γ de $x \mapsto \ln(x)$ dans un repére orthonormé.

tableau de variation
factoriser le terme dominant
même dénominateur
croissance comparée

2. Logique

2.1 Logique

vrai ou faux **Exercice 2.1.1** Quelle est la valeur logique des propositions suivantes ? **FM** implication

1. 2 est pair $\Longrightarrow$ 4 est pair
2. 2 est pair $\Longrightarrow$ 3 est pair
3. 2 est impair $\Longrightarrow$ 3 est pair
4. $4 > 1 \Longleftrightarrow 4^2 > 1$
5. Le ciel est bleu $\Longleftrightarrow 2 + 2 = 4$. Peut on en déduire que 3 est pair ? que $16 > 1$?

vrai ou faux **Exercice 2.1.2** Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses... ou autre chose : **F** quantificateur implication

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*, \quad x = 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{N}, \quad x^2 > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$
4. $\forall x \in \mathbb{C}, \quad x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0.$

vrai ou faux **Exercice 2.1.3** Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? **FM** quantificateur

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exists y \in \mathbb{R}_+, \quad y^2 = x$
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y^2 = x$
3. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad xy = x$

vrai ou faux **Exercice 2.1.4** Déterminer la valeur logique des propositions suivantes : quantificateur

a. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

b. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant -5,$

c. $\forall x \geqslant 0 : x^2 - 4 = \sqrt{(x^2-4)^2},$

d. $\forall x \in \mathbb{R} : x = \ln(e^x),$

e. $\forall x > 0 : x = e^{\ln x},$

f. $\forall x \leqslant 0 : \sqrt{x^2} = -x,$

g. $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} > x,$

h. $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} = -x,$

i. $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} = e^x,$

j. $\exists x \in \mathbb{R} : \ln x - \ln(2x) = 3,$

k. $\exists x \geqslant 0 : 3x + 5 < 0,$

l. $\exists x < 0 : \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) = 3.$

vrai ou faux négation contraposée **Exercice 2.1.5** Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou non (justifier votre réponse), et écrire sa négation. Écrire la contraposée de (3) et (4). **FM** quantificateur implication $overline mathcal P$ or $mathcal Q$

1. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, x = ab$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x = ab$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad xy \geqslant 4 \Longrightarrow (x \geqslant 2 \text{ et } y \geqslant 2)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2)$

transformer **Exercice 2.1.6** Donner la négation des propositions suivantes **F** négation implication ou et quantificateur $overline mathcal P$ or $mathcal Q$

a. $x = 1$ ou $x = -1$

b. $0 \leqslant x < 1$

c. $(x = 0)$ ou $x(x^2 = 1$ et $x \leqslant 0)$

d. $x \geqslant 3 \Longrightarrow x^2 > 5$

e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$

f. $\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = 3$

2.2 Raisonnements

prouver **Exercice 2.2.7** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. Montrer que $x = 0$. **F** absurde

prouver **Exercice 2.2.8** Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $4n + 1$ crayons sont rangés dans n tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 crayons. **F** absurde

prouver **Exercice 2.2.9** Soient x et y des nombres réels. Prouver que **F** implication MARRE

$$(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow xy + 1 - x - y \neq 0$$

prouver **Exercice 2.2.10** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer l'implication suivante, en utilisant sa contraposée : « si n^2 est impair, alors n est impair ». **F** contraposée MARRE résoudre **Exercice 2.2.11** Trouver l'ensemble des trilets (x,y,z) vérifiant $\begin{cases}(x-1)(y-2)(z-3)=0\\(x-2)(y-3)(z-1)=0\\(x-3)(y-1)(z-2)=0\end{cases}$

FM
cas

prouver **Exercice 2.2.12**

FM
équivalence
implication
MARRE

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n$ est pair $\Longleftrightarrow 3n+1$ est impair.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2$ est pair $\Longleftrightarrow n^3$ est pair.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n$ est pair $\Longrightarrow 2n^2+1$ est impair.
   La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in]-1;2[\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in \left]\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right]$.
   La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\ln(3x+1)+4} \geqslant 2$.

résoudre **Exercice 2.2.13** Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}_n : 2^n > n^2$.

F
récurrence faible

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la proposition $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?

3. Récurrences, sommes, produits, factorielles

définition encadrer u_n

Exercice 3.1 Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et vérifie $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $u_n = 3^{2^{-n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$

M récurrence faible

définition encadrer

Exercice 3.2 Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$ pour $n \geqslant 0$. Montrer que la suite u est bien définie et vérifie $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

FM récurrence faible

divisibilité

Exercice 3.3 Montrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour $n \in \mathbb{N}$.

MD récurrence faible

somme

Exercice 3.4 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

M récurrence faible

u_n

Exercice 3.5 Soit $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

1. si $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, prouver que $u_n = 2^n$ pour $n \geqslant 0$.
2. si $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, prouver que $u_n = 3^n - 2^n$ pour $n \geqslant 0$.

F récurrence à 2 pas ou récurrence linéaire

u_n

Exercice 3.6 Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour $n \geqslant 0$. Vérifier que $u_n = 1 + 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

FM récurrence à 2 pas ou récurrence linéaire

définition encadrer u_n

Exercice 3.7 Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^4}{(u_n)^3}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et vérifie $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $u_n = (\sqrt{2})^{3^n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

M récurrence à 2 pas ou ln récurrence linéaire

sommer

Exercice 3.8 Pour $n \geqslant 0$, prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

F récurrence faible ou somme télescopique

sommer

Exercice 3.9 Pour $n \geqslant 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!k = (n+1)! - 1$.

F récurrence faible ou somme télescopique

sommer

Exercice 3.10 Pour $n \geqslant 1$, montrer que $u_n = \dfrac{1}{1.2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

M fraction récurrence faible ou somme télescopique

sommer

Exercice 3.11 Pour $n \geqslant 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^4+4} = (-1)^n \frac{n+1}{4(n+1)^2+1}$.

M récurrence faible fraction

encadrer

Exercice 3.12 Montrer que $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

FM récurrence faible

sommer

Exercice 3.13 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 4k(k-1)(k-2) = (n+1)n(n-1)(n-2)$ pour $n \geqslant 0$

FM récurrence faible

encadrer

Exercice 3.14 On considère une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} \leqslant a u_n$ pour un réel positif a et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \leqslant a^n u_0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

F récurrence faible

sommer

Exercice 3.15 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

F récurrence faible

$\sum = + \cdots +$

Exercice 3.16 Ecrire les formules suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

FM

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 99, \qquad S_2 = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n,$$
$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \ldots + \frac{n+2}{3^{n+2}}, \qquad S_4 = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{2n+4},$$
$$S_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} + \ldots \frac{1}{2p\sqrt{2p}}$$

somme **Exercice 3.17** Calculer les sommes suivantes:

M
séparer
somme géométrique
somme de Bernoulli

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(5 \times 3^{-k} - 4 \times 2^{2k-1}\right) \qquad A_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2k + nk^2 - 3k^3}{n^4} \qquad I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)3^k - 5^{k-1}}{3^k}$$

$$J_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{5}{6^{k-1}}$$

sommer **Exercice 3.18** Simplifier les sommes suivantes, puis les calculer lorsque c'est possible.

M
séparer
somme géométrique
somme télescopique
somme de Bernoulli

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (3k+5), \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{2n} 3^{i+n}, \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{50} \left(\frac{5}{n+3} - \frac{5}{n+4}\right),$$

$$S_4 = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(3(-1)^k + \frac{4}{k+1}\right), \qquad S_5 = \sum_{3 \leqslant k \leqslant n+3} \left((k-3)^2 + \frac{5}{k-2} - (k-3)\right).$$

somme **Exercice 3.19**

FM
système
somme télescopique

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)}$

somme **Exercice 3.20**

FM
système
somme télescopique

1. Déterminer des réels a, b et c tels que $\frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$ pour $n \geqslant 3$.
2. En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)}$.

somme **Exercice 3.21** Soit $q \neq 1$

F
séparer
développer
somme télescopique

1. Calculer $(1-q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.
2. Application : calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} q^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{2k+1}$.

somme **Exercice 3.22** L'objectif de cet exercice est de calculer pour $0 \leqslant p \leqslant 3$, les sommes de Bernouilli

M
somme arithmétique
développer
$a^n - b^n$
séparer
somme télescopique

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p \qquad (n \geqslant 0)$$

1. Pour $n \geqslant 0$, que valent $S_0(n)$ et $S_1(n)$?
2. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ et retrouver $S_1(n)$
3. En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3k^2+3k+1)$ et en déduire $S_2(n)$
4. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2$.

sommer **Exercice 3.23** Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \leqslant i \\ i-j \leqslant p}} (i-j)^2$.

M
changement d'indice
somme de Bernoulli

sommer **Exercice 3.24** Pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(p-1)!}{(p+k)!} = \frac{1}{k \times k!} - \frac{n!}{k(n+k)!}$.

M
récurrence faible
(M)

somme
multiplier **Exercice 3.25** Calculer les sommes et les produits suivants :

M
ln
exp
somme de Bernoulli
Chasles

$$A = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \qquad B = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k \qquad C = \sum_{k=p}^{2p} k^2 \qquad D = \prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{-2k}$$

multiplier **Exercice 3.26** Démontrer que $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$ M récurrence faible

encadrer multiplier **Exercice 3.27** Montrer que $\prod_{0 \leqslant k \leqslant n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$ pour $n \geqslant 0$. M récurrence faible racine équivalence

4. $\mathbb{R}$ et Suites

4.1 $\mathbb{R}$

encadrer

Exercice 4.1.1 Étudier l'existence d'un plus grand et d'un plus petit élément, d'une borne inférieure et d'une borne supérieure pour l'ensemble $A := \left\{(-1)^n(1-\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les déterminer en cas d'existence.

F limite, borne sup

4.2 Suites

encadrer, variations, u_n, sommer

Exercice 4.2.2 Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $2u_{n+1} = u_n + 3$

1. Montrer que u est minorée par 2 et majorée par 3.
2. Etudier la monotonie de u.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer $v_n = \sum_{k=0}^{n-3} u_k$

FM récurrence faible, $u_{n+1} - u_n$, suite arithméti-co-géométrique, somme géométrique

variations

Exercice 4.2.3 Etudier la monotonie des suites

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \qquad w_n = \frac{\ln n}{n} \qquad (n \geqslant 3)$$

FM u_{n+1}/u_n, $u_{n+1} - u_n$, $u_n = f(n)$, tableau de variation

convergence

Exercice 4.2.4 Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{\ln(n)^2 + \sqrt{n^2+1}}{\cos(n!) + n^2}$ lorsque $n \to \infty$.

F factoriser le terme dominant, croissance comparée, opération

convergence

Exercice 4.2.5 Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$ lorsque $n \to \infty$.

F factoriser le terme dominant, croissance comparée, opération

définition, encadrer, variations, convergence

Exercice 4.2.6 Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n + 1} \qquad (n \geqslant 0).$$

1. Montrer que u_n existe et que $u_n > 0$ pour $n \geqslant 0$.
2. a. Etudier la monotonie de u.
   b. Montrer que u converge et déterminer sa limite éventuelle.
3. a. Etablir que $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{3}$ pour $n \geqslant 0$.
   b. En déduire que $u_n \leqslant \frac{u_0}{3^n}$ pour $n \geqslant 0$.
   c. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

FM récurrence faible, u_{n+1}/u_n, monotone, borné, gendarmes

appartenir, parité, convergence

Exercice 4.2.7

1. Pour $n \geqslant 0$, prouver que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$ converge vers 0.

MD $(a+b)^n$, séparer, $\sin(a+b)$

encadrer

Exercice 4.2.8 La suite définie par $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ $(n \geqslant 0)$ est-elle majorée ?

FM monotonie, récurrence, absurde

convergence

Exercice 4.2.9 Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

F gendarmes

convergence

Exercice 4.2.10 Étudier la convergence de la suite définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+4n^2}}{n+3}$ pour $n \geqslant 0$.

F factoriser le terme dominant

encadrer, divergence

Exercice 4.2.11 Soit u la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 1$.
2. Prouver que u diverge.
3. En déduire que u diverge vers $+\infty$.

M minorer, absurde, monotonie

prouver

Exercice 4.2.12 Montrer qu'une suite convergente d'entiers est constante à partir d'un rang N.

M raisonnement epsilonique

Exercice 4.2.13 Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{K}$. Prouver que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k$ converge vers ℓ. MD

Exercice 4.2.14 Démontrer que les suites $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ sont adjacentes FM

traduire **Exercice 4.2.15** Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et u une suite réelle. Traduire en français les propositions :

quantificateur

$$\begin{array}{lllll} \exists \varepsilon > 0, & \exists N \in \mathbb{N}, & \forall n \geqslant N, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon, & \text{(a)} \\ \exists N \in \mathbb{N}, & \forall \varepsilon > 0, & \forall n \geqslant N, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon & \text{(b)} \\ \forall \varepsilon > 0, & \forall n \in \mathbb{N}, & \exists N \in \mathbb{N}, & (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon) & \text{(c)} \end{array}$$

encadrer convergence **Exercice 4.2.16** D

tableau de variation ln somme arithmétique somme de Bernoulli inégalité gendarmes factoriser le terme dominant

1. Pour $x > 0$, établir que $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence et donner la limite de la suite définie par

$$u_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{ka}{n^2}\right) \qquad (n \geqslant 0).$$

convergence **Exercice 4.2.17** Montrer la convergence de la suite u définie par $u_n := \sum_{n \leqslant k \leqslant 2n} \dfrac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$ et prouver que sa limite ℓ vérifie $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$. M

monotone borné $\ell \leqslant \ell'$

convergence **Exercice 4.2.18** Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de terme général MD

partie entière partie fractionnaire inégalité gendarmes séparer majorer

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor, \qquad v_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{n}{n^2 + k}, \qquad w_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)!}$$

encadrer convergence **Exercice 4.2.19** Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}$. MD

inégalité variations absurde

1. Montrer que $u_{n+1}^2 \leqslant 1 + \sqrt{2} u_n$ pour $n \geqslant 0$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ?

convergence **Exercice 4.2.20** Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Prouver que les suites u et v définie par D

$u_{n+1} - u_n$ u_{n+1}/u_n $(a-b)^2$ carré positif limite

$$u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \qquad (n \geqslant 0)$$

convergent vers la même limite.

variations encadrer convergence **Exercice 4.2.21** Soit u la suite définie par M

$u_{n+1} - u_n$ quantité conjuguée somme télescopique encadrer

$$u_0 := -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} := \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}}\right) \qquad (n \geqslant 0).$$

1. Etudier la monotonie de u.
2. Pour $n \geqslant 1$, établir que $u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2}^{-n}$.
3. En déduire que la suite u converge.

convergence **Exercice 4.2.22** Etudier la convergence de la suite u définie par M

$w_n =$ suite géométrique

$$u_1 := 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} := \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}} \qquad (n \geqslant 1).$$

convergence

Exercice 4.2.23 Montrer qu'une suite bornée u vérifiant $2u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ est convergente.

D
$w_n =$
variations

encadrer
convergence

Exercice 4.2.24 Soient u et v les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1. Pour $x > 0$, établir que $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$
2. montrer que les suites u et v admettent la même limite γ, que l'on ne calculera pas

MD
tableau de variation
suites adjacentes
ln

suites adjacentes
convergence

Exercice 4.2.25 Soit u la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que les suites de termes général $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont adjacentes. En déduire la nature de la suite u.

FM
suites adjacentes

suites adjacentes
approximation

Exercice 4.2.26 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

a) Prouver que u_n et v_n sont adjacentes.
b) Notant e leur limite commune, trouver une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

M
Chasles
fraction
suites adjacentes
inégalité

suites adjacentes

Exercice 4.2.27 Montrer que $u_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = u_n(1 + \frac{1}{n})$ sont adjacentes.

FM
u_{n+1}/u_n
fraction
factoriser

suites adjacentes

Exercice 4.2.28 Prouver que $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $T_n = S_n + \dfrac{1}{3n^2}$ sont adjacentes.

M
$u_{n+1} - u_n$
Chasles
fraction

convergence

Exercice 4.2.29 Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$ pour $n \geqslant 0$.
Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

M
monotonie
borné
$\ell \leqslant \ell'$

convergence

Exercice 4.2.30 Étudier la convergence de u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} := \sin(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

M
suite récurrente
$u_{n+1} - u_n$

encadrer
variations
convergence

Exercice 4.2.31 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} := \sqrt{2 + u_n}$ pour $n \geqslant 0$.
1. Prouver que $u_n \in [0,2]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers ℓ à déterminer.
3. En posant $u_n = 2\cos(x_n)$, retrouver le résultat précédent.
4. trouver une constante $a \in [0, 1[$ telle que $|u_{n+1} - 2| \leqslant a\,|u_n - 2|$ pour $n \in \mathbb{N}$ et retrouver le résultat des questions **2** et **3**.

MD
encadrer
suite récurrente
monotone
borné
limite
trigo
suite géométrique
récurrence faible

convergence

Exercice 4.2.32 Etudier la convergence de u définie par $u_0 := 1$ et $u_{n+1} := 1 + \dfrac{2}{u_n}$ $\quad (n \geqslant 1)$.

M
suite récurrente

encadrer
variations
convergence
suite géométrique
u_n
somme

Exercice 4.2.33 Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{1 + 2u_n}$ pour $n \geqslant 0$.
1. Montrer que l'on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que u est croissante et déterminer sa limite
3. Pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$. Montrer que v est une suite géométrique et calculer sa raison
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
5. Pour $n \geqslant 0$ calculer $\frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \cdots + \frac{2}{u_n}$ en fonction de n

MD
suite récurrente
homographie
u_{n+1}/u_n
limite

convergence

Exercice 4.2.34 Étudier la suite donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$ pour $n \geqslant 0$.

D
suite récurrente
homographie

convergence

Exercice 4.2.35 Étudier la suite donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 12}{3u_n - 5}$ pour $n \geqslant 0$.

D
suite récurrente
homographie

ite géométrique
convergence

Exercice 4.2.36 Soient α et β les deux solutions de l'équation $x = \frac{1}{3+x}$ avec $\alpha > \beta$ et soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{1}{3 + u_{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$.

M
suite géométrique
homographie

1. Montrer que la suite z de terme général $z_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique.
2. En déduire que la suite u converge vers α.

définition
encadrer
ite géométrique
u_n
monotonie de u

Exercice 4.2.37 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{4 + u_n}$ pour $n \geqslant 0$

M
suite récurrente
homographie
récurrence faible

1. Montrer que la suite u est bien définie et que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 0$.
2. Montrer que l'on définit une suite géométrique v en posant

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 + u_n} \qquad (n \geqslant 0)$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n
4. Etudier la monotonie de la suite u
   a. Première méthode : étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire la monotonie de u
   b. Deuxième méthode : étudier la monotonie sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+3}{4+x}$. Puis prouver par récurrence que $\mathcal{P}_n : u_n \leqslant u_{n+1}$

encadrer
variations
ite géométrique
u_n

Exercice 4.2.38 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{u_n+2}$ pour $n \geqslant 0$.

M
homographie
suite géométrique

1. Montrer que l'intervalle [0,3] est stable par la fonction $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$
2. Démontrer que $u_n \in [,3]$ pour $n \geqslant 0$.
3. Etudier le sens de variation de u_n
4. Soit v la suite définie par $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
   a. Montrer que v est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n
   b. En déduire u_n en fonction de n

4.3 DMS

Exercice 4.3.39 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites u et v en posant

M
entier

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ v_0 &= b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases} \qquad (n \geqslant 0)$$

1. a. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, montrer que

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

   b. Montrer par récurrence, en utilisant le résultat précédent , que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant b$$

   c. En déduire que les deux suites u et v sont convergentes. On note $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Justifier avec soin que $0 < \ell \leqslant \ell'$.
2. a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2$$

   puis que

$$\ell' - \ell = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\ell'} - \sqrt{\ell}\right)^2.$$

   b. Montrer que si $\ell \neq \ell'$ alors $\sqrt{\ell'} + \sqrt{\ell} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\ell'} - \sqrt{\ell}\right)$
   c. En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que $\ell = \ell'$. On appelle la limite commune des suites u et v la moyenne arithmético-géométrique de a et b.
   d. Que valent les suites u et v quand $a = 0$ et $b > a$? Quelles sont leurs limites ?

e. Que valent les suites u et v quand $a = b$? Quelles sont leurs limites ?

Exercice 4.3.40 On considère une fonction f possédant les trois propriétés :

(P_1) f est définie et continue sur $[-1{,}1]$.

(P_2) f est dérivable sur $]-1{,}1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $-1 < x < 1$.

(P_3) $f(0) = 0$.

1. **Unicité de f.** Soit g une fonction vérifiant les trois propriétés précédentes.
   a. Démontrer que $f - g$ est constante.
   b. En déduire que $f = g$.
2. **Etude de f.**
   a. Démontrer que $f(\sin t) = t$ pour $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
   b. En déduire les valeurs de $f(-1)$ et $f(1)$.
   c. Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de son graphe. Que peut-on dire des tangentes au graphe en $x = \pm 1$?
3. **Etude d'une suite.** On pose $u_0 := \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} := \frac{2}{\pi} f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   a. Pour $n \geqslant 0$, montrer que le nombre u_n est bien défini et qu'il est dans $[0{,}1]$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{\pi}{2}x$. On fera apparaître le point $x = 0$.
   c. En déduire que $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   d. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive.
   e. On admet que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ. Prouver que $\ell = 0$.

Exercice 4.3.41 On considère la suite u définie M

$$u_0 := 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n^2 + u_n \qquad (n \geqslant 0).$$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b. Démontrer que u est une suite croissante.
   c. Prouver que u ne peut pas converger vers une limite finie. Que peut-on en déduire pour le comportement à l'infini de u ?
2. Soit v la suite définie par
$$v_n := \frac{\ln u_n}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
   a. Démontrer que
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
   b. • Montrer que v est une suite croissante.
      • Justifier que l'on a
$$v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{\ln 2}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
      • A l'aide de la somme télescopique $\sum_{n=0}^{k-1}(v_{n+1} - v_n)$, montrer que v est une suite majorée.
      • En conclure que v converge vers une limite $\ell > 0$.
      Dans la suite, on posera $\alpha = \mathrm{e}^{\ell}$.
      • Justifier que l'on a $u_n \leqslant \alpha^{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   c. • Pour $p \geqslant n \geqslant 0$, établir que l'on a
$$v_{p+1} - v_p \leqslant \frac{1}{2^{p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$
      • A l'aide de la somme télescopique $\sum_{p=n}^{k-1}(v_{p+1} - v_p)$, en déduire que
$$v_k - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \qquad (k \geqslant n).$$
      • En fixant n et en faisant tendre k vers l'infini, prouver que
$$u_n \geqslant \alpha^{2^n} - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
   d. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n \alpha^{-2^n}\right) = 1$.

Exercice 4.3.42 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x + 2 - 2\ln(\mathrm{e}^x + 1)$$

et on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. ÉTUDE DE LA FONCION f.
   a. Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que l'on a

   $$f(x) = -x + 2 - 2\ln(\mathrm{e}^{-x} + 1) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer la limite de f quand x tends vers $+\infty$.
   d. Démontrer que la droite D d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ et étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote D.
   e. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et donner le tableau de variation de f.
   f. Déterminer la solution α de l'équation $f(x) = x$.
   g. Montrer que l'on a

   $$f''(x) = -2\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   h. En déduire que

   $$|f'(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e} + 1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

2. CONVERGENCE DE LA SUITE u. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :

   $$f(0) \simeq 0{,}61 \qquad f(1) \simeq 0{,}37 \quad \text{et} \quad \ln(\mathrm{e} - 1) \simeq 0{,}54$$

   a. Montrer par récurence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0{,}1]$.
   b. Montrer par récurrence que

   $$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e} + 1}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   c. En déduire que u converge vers un réel à préciser.

5. Ensembles et applications

5.1 Ensembles

traduire **Exercice 5.1.1** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes et on note : **F**

$$\begin{aligned} A &= \{\text{les deux cartes tirées sont rouges}\} \\ B &= \{\text{les deux cartes tirées sont un valet et un dix}\} \\ C &= \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages}\} \end{aligned}$$

1. Que représentent les ensembles $D = \overline{A}$, $E = A \cap B \cap \overline{C}$ et $F = A \cap B \cap C$?
2. Ecrire à l'aide des ensembles A, B et C les ensembles

$$\begin{aligned} G &= \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouge}\} \\ H &= \{\text{on obtient au plus un personnage rouge}\} \end{aligned}$$

ensemble **Exercice 5.1.2** Pour $n \geqslant 1$, on pose $A_n = [\![1,n]\!]$. **F**

1. Déterminer $\bigcup_{n=1}^{10} A_n$ et $\bigcap_{n=1}^{10} A_n$ puis $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$
2. idem pour $B_n = [n,n+1[$, pour $C_n = [\frac{1}{n}, +\infty[$, pour $D_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et pour $E_n = [-\frac{1}{n}, +\infty[$

ensemble cardinal **Exercice 5.1.3** Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}\big([\![1,4]\!]\big)$ ainsi que son cardinal **F**

inclusion équivalence **Exercice 5.1.4** Soient A et B deux sous-ensembles de E. **FM** MARRE

1. Montrer que $A \cap B \subset A$ puis que $A \cap B \subset B$.
2. Montrer que $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$
3. Montrer que $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B)$ Montrer que $(A \subset B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

équivalence $A = B$ **Exercice 5.1.5** Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. **M** MARRE

1. Montrer que $(A \cup B = A \cap C) \Longleftrightarrow (B \subset A \text{ et } A \subset C)$
2. Si $A \cup B = A \cap C$, $(B \cup C = B \cap A)$ et $(C \cup A = C \cap B)$, en déduire que $A = B = C$.
3. Montrer que $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B)$ Montrer que $(A \subset B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

inclusion **Exercice 5.1.6** Etant donnée une famille $(A_n)_{n \geqslant 1}$ de parties d'un ensemble E et **FM** MARRE ou Chasles

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{et} \qquad C_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad (n \geqslant 1),$$

établir de deux manières différentes que $B_{n+1} \subset B_n$ et que $C_n \subset C_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$

5.2 Applications

injection surjection **Exercice 5.2.7** L'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & 2k+1 \end{array}$ est elle injective ? surjective ? **F** injection contre-exemple ou résoudre $y = f(x)$

injection surjection **Exercice 5.2.8** On pose $f : A \to B$ avec $f(x) = x^2$. Préciser dans les cas suivants les propriétés de f (injective, surjective, bijective, etc...) en justifiant brievement : **F** contre-exemple ou résoudre $y = f(x)$

1.	$A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}$	2.	$A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}$	3.	$A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+$
4.	$A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}^+$	5.	$A = \mathbb{R}^-,\ B = \mathbb{R}^+$	6.	$A = \mathbb{R}^-,\ B = \mathbb{R}^-$

injection surjection **Exercice 5.2.9** Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et soit g sa restriction au départ à $[1, +\infty[$. Montrer que f n'est pas injective puis que g est injective mais pas surjective. **F** contre-exemple ou résoudre $y = f(x)$

antécédent injection surjection composée **Exercice 5.2.10** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$. **F** contre-exemple ou résoudre $y = f(x)$

1. Déterminer $f(0,0)$, $f(1,2)$, $g(1,-1,0)$ et $g(1,1,1)$
2. Si $(0,0)$ admet des antécédents par g, les déterminer. Bonus : même question avec $(1,2)$
3. g est-elle injective ? Montrer alors que g est surjective.
4. Montrer que f est injective.
5. Montrer que $(1,1,2)$ n'a pas d'antécédent par f. Qu'en déduit-on ?
6. Déterminer $f \circ g$ puis $g \circ f$.

injection surjection

Exercice 5.2.11 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,x+z,2x+y+z) \end{array}$

F contre-exemple ou résoudre $y = f(x)$

1. Calculer $f(-1,1,1)$. f est elle injective ?
2. Montrer que f n'est pas surjective. *On pourra remarquer que* $2x+y+z = (x+y)+(x+z)$

$f(x)$

Exercice 5.2.12 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que $f(n) \leqslant n$ pour $n \geqslant 0$. Montrer que $f(n) = n$ pour $n \geqslant 0$. *On pourra commencer par montrer que* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, *puis raisonner par récurrence.*

M récurrence forte

injection surjection

Exercice 5.2.13 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

M MARRE injection surjection

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective
4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective

bijection f^{-1}

Exercice 5.2.14

FM résoudre $y = f(x)$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : \begin{array}{ccc}]a,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-a} \end{array}$ est bijective et déterminer f^{-1}

2. Montrer que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$ est bijective et déterminer g^{-1}

composée

Exercice 5.2.15 Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y,y-x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x+2y) \end{array}$.

FM f^{-1}

1. Déterminer $f \circ g$ puis $g \circ f$.
2. Que peut on en déduire ?

bijection f^{-1}

Exercice 5.2.16 Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives et déterminer leur bijection réciproque :

FM module résoudre $y = f(x)$ résoudre $y = f(x)$

$$f_1 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty] & \to &]\frac{1}{2},1] \\ x & \mapsto & \frac{1+x}{1+2x} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y,x-y) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x+3y) \end{array}$$

impaire

Exercice 5.2.17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection impaire. Montrer que f^{-1} est impaire.

M $x = f^{-1}(y)$

élément bijection

Exercice 5.2.18 On pose $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

M $x = f^{-1}(y)$

1. Représenter E et F dans le plan complexe
2. Pour $z \in E$, montrer que $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ appartient à F.
3. Montrer que f définit une bijection de E dans F et déterminer f^{-1}

définition variations bijection $f(x)$ sommer convergence limite

Exercice 5.2.19 Pout $t > 0$, on pose $f(t) = t + \frac{1}{t}$

M définition (F) tableau de variation résoudre $y = f(x)$ récurrence faible $u_{n+1} - u_n$ somme télescopique

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis dresser le tableau de variations complet de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$. On notera g sa bijection réciproque.

3. Déterminer l'expression de g.

   Soit u la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{f(nu_n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
4. Pour $n \geqslant 1$, montrer que u_n existe et vérifie $u_n \geqslant 1$.
5. Ecrire un programme scilab, qui demande n à l'utilisateur et affiche la valeur de u_n.
6. Montrer que la suite u est croissante. On admettra qu'elle converge vers un réel ℓ.
7. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)$. Mq la suite v converge et déterminer sa limite (en fonction de ℓ).

6. Limite et continuité (locale)

6.1 Suites

convergence

Exercice 6.1.1 Etudier la convergence des suites (u_n) :

F
opérations
factoriser le terme dominant
croissance comparée
quantité conjuguée

1. $u_n = \dfrac{-e^n + 2n}{\ln(n^2) + 2 \times 3^n + n^3}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2 + \ln n}{n + \sqrt{n}}$
3. $u_n = \dfrac{n^5 - \sin n}{n^2}$
4. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \ln n$
5. $u_n = \dfrac{3^{1/n}}{n^3 + 1}$
6. $u_n = \left(\dfrac{4}{e}\right)^n - \ln n$
7. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
8. $u_n = \dfrac{2\cos(n) + (-1)^n \ln n}{n^2}$

convergence

Exercice 6.1.2 Etudier la convergence des suites (u_n) :

F
opérations
factoriser le terme dominant
croissance comparée
quantité conjuguée

1. $u_n = \dfrac{e^n - n}{3e^n + 2}$
2. $u_n = \left(\dfrac{n^2 - 4}{2n^2 + 1}\right)^{2/3}$
3. $u_n = \dfrac{n^5 + \cos(1/n)}{n^2}$
4. $u_n = \left(\dfrac{\cos(n^2 + 1)}{3}\right)^{2n}$
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3k + 1}{n}$
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \cos\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
7. $u_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n}$

encadrer
convergence

Exercice 6.1.3 Soit u la suite définie par $u_n = n + \ln(n)\cos(n)$ pour $n \geqslant 1$.

F
trigo
gendarmes

1. Montrer que $n - \ln(n) \leqslant u_n \leqslant n + \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$
2. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$
3. Que peut on dire du comportement asymptotique de la suite u ?

encadrer
convergence

Exercice 6.1.4

FM
majorer
somme
gendarmes

1. Pour $0 \leqslant k \leqslant n - 2$, montrer que $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.
2. En déduire un encadrement de $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$ pour $n \geqslant 2$.
3. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1$

variations
encadrer
convergence

Exercice 6.1.5 Soit u la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ pour $n \geqslant 1$.

M
$u_{n+1} - u_n$
encadrer
sommer
$\ell \leqslant \ell'$

1. Etudier la monotonie de (u_n)
2. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

variations
résoudre
inclusion
définition
encadrer
monotone
convergence
limite

Exercice 6.1.6 On pose $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et on note u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

M
suite récurrente
récurrence faible
monotone
borné
$\ell = f(\ell)$

1. a. Etudier les variations de f
   b. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$ et préciser les cas d'égalités.
   c. Montrer que l'intervalle [0,1] est stable par f (i.e. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$).
2. a. Montrer que u_n est bien défini et vérifie $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 0$
   b. Montrer que la suite $u_n)$ est monotone
   c. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite

variations
définition
résoudre
divergence

Exercice 6.1.7 On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et on note u la suite vérifiant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

M
tableau de variation
équation polynômiale
suite récurrente
monotone
absurde
$\ell = f(\ell)$

1. a. Etudier les variations de f sur son ensemble de définition
   b. Résoudre l'inéquation $f(x) = x$.
2. a. Etudier le sens de variations de u.
   b. Montrer que la suite diverge
   c. Justifier qu'elle diverge vers $+\infty$.

variations
limite
convergence

Exercice 6.1.8 Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$ pour $n \geqslant 0$.

M
tableau de variation
homographie
suite récurrente
$\ell = f(\ell)$

1. a. Etudier les variations de $f : x \mapsto \frac{5x}{3x+5}$ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que $u_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 0$.
   b. Etudier le sens de variation de (u_n)
2. a. Etudier le sens de variation de u.
   b. Si u converge, déterminer sa limite ℓ
   c. Montrer que la suite u converge vers cette valeur.

suites adjacentes

Exercice 6.1.9 Montrer que l'on définit deux suites adjacentes en posant $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 0$

M
fraction

6.2 Fonctions

convergence

Exercice 6.2.10 Etudier les limites suivantes aux points considérés

M
quantité conjuguée
factoriser le terme dominant
valeur absolue
puissance
croissance comparée
DL^1

a.	$\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	en 0	*b.*	$\dfrac{\sqrt{1+x}-1-x}{x}$	en 0	*c.*	$x+\sqrt{x^2-3x+2}$	en $\pm\infty$
d.	$x\lvert x\rvert - x^2 + x$	en $\pm\infty$	*e.*	$\dfrac{x^2+2\lvert x\rvert}{x}$	en $\begin{smallmatrix}0\\-\infty\end{smallmatrix}$	*f.*	$(1+x)^{1/x}$	en 0^+
g.	$(1+x)^{\ln x}$	en 0^+	*h.*	$\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}}$	en $\begin{smallmatrix}0\\+\infty\end{smallmatrix}$	*i.*	$\dfrac{\ln(1+x)(1+\frac{x}{2})}{x}$	en 0
j.	$\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$	en 0^+	*k.*	$\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$	en $\begin{smallmatrix}0\\+\infty\end{smallmatrix}$	*l.*	$\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$	en 0
m.	$\dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$	en $\begin{smallmatrix}0\\+\infty\end{smallmatrix}$	*n.*	$xe^{1/x}-x$	en 0^+	*o.*	$\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$	en $+\infty$
p.	$4x^2+\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	en 0	*q.*	$x^4e^{-\sqrt{x}}$	en $+\infty$	*r.*	$\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$	en $+\infty$
s.	$x^3-5x^2-e^x$	en $-\infty$	*t.*	$\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$	en 3	*u.*	$\dfrac{\ln x}{x^2-1}$	en 1
v.	$\dfrac{x^n-1}{x-1}$	en 1	*w.*	$x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$	en $+\infty$			

comparer
équivalent

Exercice 6.2.11 On pose $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = e^{-x}$, $f_4(x) = 5^x$, $f_5(x) = \ln x$, $f_6(x) = x^{10}$, $f_7(x) = (\ln x)^{20}$, $f_8(x) = \frac{1}{x}$.

FM
croissance comparée
factoriser le terme dominant

1. Etablir une echelle de compararaison de ces fonctions au voisinage de $+\infty$ (avec des o)
2. Etablir une echelle de compararaison de ces fonctions au voisinage de 0^+ (avec des o)
3. Déterminer un équivalent en $+\infty$, parmi les f_i, des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = x^2 - (\ln x)^{20} \qquad g_2(x) = \sqrt{x} + 2 + e^{-x} + \ln x + x^2 \qquad g_3(x) = \frac{x^2+\sqrt{x^3-1}}{x^3+\ln x}$$
$$g_4(x) = x + 2\sin(x) \qquad g_5(x) = \frac{x^2+3}{e^{-x}(\ln x)^{20}+1}$$

limite

Exercice 6.2.12 Etudier les limites des fonctions suivantes aux points considérés

FM
partie entière
trigo
limite

a. $x^3\lfloor x\rfloor$ en 0 *b.* $\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ en 0 et $+\infty$
c. $\cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin x$ en 0 *d.* $\sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos x}$ en $+\infty$ *e.* $x(2+\sin x)$ en $+\infty$

convergence
encadrer
limite
continuité

Exercice 6.2.13 On pose $\frac{f(x)=x\lfloor 1}{x\rfloor}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

FM
partie entière
gendarmes

1. Simplifier $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Et en $-\infty$?
2. a. Encadrer $f(x)$ pour $x > 0$. En déduire que f admet une limite en 0^+.
   b. La fonction se prolonge t'elle par continuité en 0 ?

équivalent

Exercice 6.2.14 Déterminer un équivalent en $+\infty$ d'une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant

FM
gendarmes

$$x^2+\frac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant x^2+x \qquad (x\geqslant 1).$$

définition
continuité

Exercice 6.2.15

FM
continuité (F)
limite

1. Peut-on prolonger par continuité en $x_0=0$ la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^x & \text{si } x>0\\ \frac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

2. même question pour $x_0=0$ et $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$
3. même question pour $x_0=0$ et $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$
4. même question pour $x_0=\frac{\pi}{2}$ et $f(x)=\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

on commencera par préciser l'ensemble de définition de ces fonctions

définition
continu

Exercice 6.2.16

FM
définition (F)
a^b
croissance comparée

1. On pose $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leqslant 1\\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x>1\end{cases}$
   a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que f est continue en 1.
2. Mêmes questions pour $f(x)=\begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$

limite
branche infinie
définition

Exercice 6.2.17

M
DL

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
   Montrer que
   $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\frac{1}{2}$$
   on admettra que $\ln(1+u)-u\sim_0 -\dfrac{u^2}{2}$
   Qu'en déduit-on sur l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$?
2. Soit f la fonction définie pour $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$
   Déterminer son ensemble de définition puis montrer que
   $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\frac{1}{2}$$
   Qu'en déduit-on sur l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$?

définition
branche infinie
asymptote

Exercice 6.2.18 Déterminer le domaine de définition des fonctions f suivantes puis leur comportement asymptotique aux bornes de leur domaine de définition. En déduire l'allure de C_f au voisinage des infinis.

M
terme dominant
DL[1]
limite

1. $f(x)=\ln(1+e^x+e^{2x})$. Commencer par une étude en $\pm\infty$, puis montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.
2. $f(x)=(x+\ln x)e^{1/x}$. Pour l'étude en $+\infty$, déterminer la limite de $f(x)$, $f(x)/x$ puis $f(x)-x$ en $+\infty$. Interpretation graphique ?
3. $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$. Pour l'étude en $+\infty$, montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$. Qu'en est-il en $-\infty$?

définition
signe
limite
eau de variation
$f(x)\ =\ 0$

Exercice 6.2.19 On pose $f(x)=\frac{\ln x}{(1+x)^2}$

M
définition (F)

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f
2. Préciser le signe de f sur $\mathcal{D}$, ainsi que les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$ et déterminer la fonction u vérifiant

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x)^3} \qquad (x \in \mathcal{D})$$

4. Dresser le tableau de variations complet de u.
5. Montrer que la fonction u s'annule en un unique point sur $\mathcal{D}$, que l'on notera α.
6. Dresser le tableau de variations complet de f (en fonction de α).

7. Dénombrement

7.1 Dénombrer

cardinal **Exercice 7.1.1** On considére l'ensemble $E = \{1,2,3,4\}$. Ecrire méthodiquement :

1. les combinaisons de 3 éléments de E
2. les arrangements de 3 éléments de E
3. les triplets d'éléments de E (ne pas en écrire plus de 21)

F combinaison arrangement n-liste

cardinal **Exercice 7.1.2** Une anagramme est un mot formé des mêmes lettres mais dans un ordre différent. Donner le nombre d'anagrammes des mots : LAPIN, ELEVE, BONBON, ABRACADABRANT.

F dénombrer : arbre combinaison

cardinal **Exercice 7.1.3** On fait 5 tirages successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

1. Nombre de tirages possibles ?
2. Dénombrer alors l'ensemble des tirages contenant
   a. au moins une fois la boule 9
   b. (exactement) deux fois la boule 2
   c. trois fois la boule 3 et une fois la boule 1
3. Nombre de tirages tels que
   a. le second tirage ait donné la boule 1
   b. la seconde boule 1 tirée l'ait été au troisième tirage ?

FM dénombrer : arbre complémentaire

cardinal **Exercice 7.1.4** Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément et on suppose toutes les chaussures différentiables.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent deux chaussures vertes ? deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ? au moins un pied gauche ?
4. Combien reconstituent une paire de chaussures avec un gauche et un droit de même couleur ?

F dénombrer : arbre

Exercice 7.1.5 On tire 3 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes classique (13 hauteurs et 4 couleurs).

1. Nombre de tirages possibles ?
2. éterminer alors le nombre de tirages contenant
   a. trois cartes (exactement) de même hauteur
   b. deux cartes (exactement) de même couleur
   c. deux ou trois cartes de même couleur
   d. au moins un coeur ou un roi

F

Exercice 7.1.6

1. Pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, montrer que $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$.
2. En déduire $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (i+j)$.

cardinal **Exercice 7.1.7**

1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?
2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l'anglais et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

F formule du crible

cardinal **Exercice 7.1.8** On répartit 8 boules numérotées dans quatre sacs numérotés.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
2. Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

MD n-liste dénombrer : surjection

cardinal **Exercice 7.1.9** On forme des nombres de 6 chiffres choisis parmi $1, \ldots, 9$

F n-liste arrangement combinaison

1. Combien y en a t'il ?
2. Combien y en a t'il dont tous les chiffres sont pairs ?
3. Combien y en a t'il dont tous les chiffres sont différents ?
4. Combien y en a t'il dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

cardinal **Exercice 7.1.10** Soit $n \geqslant 1$. On forme des couples (x,y) de $[\![0,n]\!]^2$. **F** n-liste

1. Combien y en a t-il ?
2. Combien y en a t-il vérifiant $x + y = n$?
3. Combien y en a t-il vérifiant $x \neq y$?
4. Combien y en a t-il vérifiant $x \leqslant y$?
5. Combien y en a t-il vérifiant $x < n$?
6. Combien y en a t-il vérifiant $x + y = k$ pour $k \in [\![0,2n]\!]$?

cardinal **Exercice 7.1.11** Dans une urne on place n boules blanche et une seule noire. On tire simultanément k boules. Déterminer successivement le nombre de tirages **F**

1. le nombre de tirages sans boules noires ?
2. le nombre de tirages avec au moins une boule noire ?

Qu'obtenez-vous ?

cardinal **Exercice 7.1.12** Déterminer le nombre de p-listes $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ de $[\![1,n]\!]$ vérifiant **F** combinaison

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p$$

cardinal **Exercice 7.1.13** Soit E un ensemble de cardinal n. **D**

1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $B \subset A$. *Indication : Discuter suivant le nombre d'éléments de A*
2. En déduire le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$
3. En déduire le nombre de triplets (A,B,C) de parties disjointes 2 à 2 de E vérifiant $A \cup B \cup C = E$
4. Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

cardinal **Exercice 7.1.14** Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}*$ et A et B deux parties de E. Calculer en fonction de n, $a = \text{Card}(A)$, $b = \text{Card}(B)$ et $c = \text{Card}(A \cup B)$ le cardinal des ensembles **F** formule de Poincaré complémentaire

$$A \cap B, \quad \overline{A} \cap B, \quad A \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cup \overline{B}, \quad A \cup \overline{B}, \quad \overline{A} \cup B,$$

cardinal **Exercice 7.1.15** On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J **M** permutation n-liste combinaison

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix jetons où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dixjetons où B , A et C apparaissent dans cet ordre ?

cardinal **Exercice 7.1.16** Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées. **F**

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

cardinal **Exercice 7.1.17** Dans un zoo, 8 fruits sont distribués à 13 singes. Combien a-t-il de distributions possibles ? **MD** n-liste arrangement combinaison point barre

1. si les fruits sont différents (pomme, banane, kiwi,...) et
   a. s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
   b. S'il n'y a pas de limite au nombre de fruits que peut avoir un singe
2. mêmes questions si les fruits sont tous identiques (8 bananes)

cardinal **Exercice 7.1.18** F dénombrer : arbre combinaison

1. Combien le mot livre possède-t-il d'anagrammes ? et le mot feuille ? et le mot Missisipi ?
2. Quel est le coefficient de $a^3b^4c^2d$ dans le développement de $(a+b+c+d)^{10}$?

cardinal **Exercice 7.1.19** On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ? D dénombrer : arbre

cardinal **Exercice 7.1.20** Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne. F dénombrer : arbre

1. Nombre de tirages possibles ?
2. Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?
3. Nombre de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
4. Nombre de tirages contenant les trois couleurs ?
5. Contenant exactement deux couleurs ?

cardinal **Exercice 7.1.21** On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres. De combien de façons peut-on procéder si FM

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?

cardinal **Exercice 7.1.22** On dispose de 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules vertes, toutes distinguables. On répartit ces boules dans $n \geqslant 1$ urnes. M n-liste combinaison dénombrer : arbre

1. Nombre de répartitions possibles ?
2. Nombre de répartitions telles que les boules soient dans deux urnes seulement ?
3. Nombre de répartitions telles que la première urne ne contiennent que des boules d'une seule couleur ?

cardinal **Exercice 7.1.23** On forme des mots de 5 lettres en utilisant exactement une fois chaque lettre A, B, C, D et E. F dénombrer : arbre combinaison

1. Combien de mots peut-on former ?
2. Combien de mots peut-on former, qui commencent par A.
3. Combien de mots peut-on former, qui commencent par A et finissent par B ?
4. Combien de mots peut-on former, où le A apparaît avant le B ?

cardinal **Exercice 7.1.24** Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20€ dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1€ et 2€. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil). FM dénombrer : arbre

cardinal **Exercice 7.1.25** Lors d'un dîner, 4 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ? F permutation dénombrer : surjection

cardinal **Exercice 7.1.26** Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$, A et B sont les points de coordonnées respectives (0,0) et (p,q). On appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut ? F combinaison

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur n ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B ?

cardinal **Exercice 7.1.27** Dans le plan, on considère n points $M_1,M_2,\ldots,M_n$ tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à n cotés que l'on peut construire avec ces points ? F cardinal **Exercice 7.1.28** Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes. **F**

1. Combien de jurys différents peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

cardinal **Exercice 7.1.29** Combien y a-t-il de mots de n lettres formé des lettres a et b tels que **F**

1. Il n'y ait jamais deux a ou deux b consécutifs.
2. Il y ait exactement un double a (pas de triple et pas d'autre double).
3. Il y ait exactement deux double a (pas de triple et pas d'autre double).

cardinal **Exercice 7.1.30** Soit $p \geqslant 1$. Combien y a-t-il de solutions entières $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$? **F**

7.2 sommes

sommer **Exercice 7.2.31** Calculer $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$ **M** somme de Bernoulli

sommer **Exercice 7.2.32** Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ **FM** $(a+b)^n$

sommer **Exercice 7.2.33** Calculer $\sum_{k=0}^{n} \lfloor n/2 \rfloor 2^k \binom{n}{2k}$ **MD** $(a+b)^n$

sommer **Exercice 7.2.34** Pour $n \geqslant 2$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}$ **MD** $(a+b)^n$

sommer **Exercice 7.2.35** Soient n et p deux entiers vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que **M** récurrence faible (M)

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

sommer **Exercice 7.2.36** Montrer les formules suivantes : **M** $(a+b)^n$

1. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$.
2. $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.
3. $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

8. Probabilités sur un univers fini

8.1 Probabilité uniforme

probabilité **Exercice 8.1.1** On lance un dé équilibré quatre fois de suite. **F** univers loi uniforme

1. Préciser l'univers associé à cette expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois le même numéro ?

probabilité **Exercice 8.1.2** On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires, toutes différentiables. Calculer de deux façons différentes la probabilité d'obtenir trois boules blanches **F** loi uniforme

probabilité **Exercice 8.1.3** Une urne contient 9 boules distinctes : 2 vertes, 3 blanches et 4 rouges. On tire au hasard 4 boules de l'urne **M** loi uniforme

1. Les tirages se font successivement et sans remise .
   a. Préciser l'univers associé à cette expérience, ainsi que son cardinal.
   b. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune verte ?
   c. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules d'une même couleur ?
2. Mêmes questions lorsque le tirage est simultané.
3. Mêmes questions lorsque les tirages sont successifs et avec remise

probabilité **Exercice 8.1.4** On tire 6 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. **F**

1. Préciser l'univers associé à cette expérience, ainsi que son cardinal.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ? exactement 2 as ? 3 piques ? 2 as ou 3 piques ?

probabilité **Exercice 8.1.5** On dispose d'une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. **F**

1. On pose $A_1 =$« le 1$^{\text{er}}$ tirage donne la boule numérotée 1 ». Calculer $P(A_1)$.
2. Plus généralement, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $A_k =$« le $k^{\text{ième}}$ tirage donne la boule numérotée k ». Calculer $P(A_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

probabilité **Exercice 8.1.6** A l'époque des probabilités encore balbultiantes, le chevalier de Méré avait fait 2 paris dans une correspondance avec Pascal. **M** loi uniforme

1. Pari 1. Si l'on jette 4 fois un dé à 6 faces, il est plus probable d'obtenir au moins un 6 que de ne pas en obtenir.
2. Pari 2. Si l'on jette 24 fois deux dés à 6 faces, il est plus probable d'obtenir au moins un double 6 que de ne pas en obtenir.

Etudier dans chacun des cas si Méré avait tort ou raison.

VAR **Exercice 8.1.7** Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules avec remise. Soit X le plus petit numéro obtenu et soit Y le plus grand numéro obtenu au cours de ces n tirages. **F**

1. a. Calculer $P(Y \leqslant k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$. En déduire la loi de Y
   b. Calculer $P(X \geqslant k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$. En déduire la loi de X
2. Calculer la loi de Y, mais en effectuant un tirage simultané de n boules.

probabilité **Exercice 8.1.8** *Le paradoxe du Duc de Toscane.* Au début du 17e siècle, un jeu de dés en vogue à la Cour consistait à lancer 3 dés et à voir les chiffres qui en résultaient. Or le Duc de Toscane observa que la somme des dés valant 10 avait tendance à sortir plus souvent que la somme des dés valant 9, alors qu'il y a autant de possibilités d'écrire la somme 9 que la somme 10 : **F**

$$\begin{array}{llllllll} 9 & = 1+2+6 & = 1+3+5 & = 4+4+2 & = 2+2+5 & = 2+3+4 & = 3+3+3 \\ 10 & = 1+3+6 & = 1+4+5 & = 2+2+6 & = 2+3+5 & = 2+4+4 & = 3+3+4 \end{array}$$

Pouvez-vous résoudre ce paradoxe ? (N.B. Galilée l'avait levé en 1620)

8.2 événements

événement **Exercice 8.2.9** On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Soit A, B, C trois événements. Ecrire à l'aide des opérations ensemblistes les événements suivants : parmi A, B, C

F opération ensemblliste

1. l'un au moins des événements est réalisé
2. A et B se réalisent mais pas C
3. un seul des événements est réalisé
4. au moins l'un des événements n'est pas réalisé.

univers traduire probabilité **Exercice 8.2.10** On lance deux fois un dé.

F opération ensemblliste

1. Préciser l'univers associé à cette expérience ainsi que son cardinal.
2. Traduire en français l'événement $A = (1;1), (2;2), ..., (6;6)$
3. Déterminer dans Ω l'événement $B =$« la somme des deux numéros est inférieure ou égale à 4 ».
4. Calculer la probabilité de A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

événement **Exercice 8.2.11** On lance $n \geqslant 2$ fois une pièce et on introduit l'événement $P_i =$« le $i^{\text{ième}}$ lancer a donné pile » pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Exprimer en fonction des P_i, les événements suivants :

F opération ensemblliste

1. $A =$« n'obtenir que des piles »
2. $B =$« obtenir exactement un pile »
3. $C =$« obtenir au moins un pile »
4. $D =$« obtenir au plus un pile »
5. $E =$« obtenir le 1^{er} pile au $3^{\text{ième}}$ lancer »

On pourra commencer par prendre $n = 4$

8.3 probabilités

probabilité **Exercice 8.3.12** On lance $n \geqslant 2$ fois de suite un dé équilibré dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2, 3 et 3. On note p_n la probabilité que les trois chiffres $\{1, 2, 3\}$ apparaissent chacun au moins une fois au cours de ces n lancers. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on pose $A_i =$« le numéro i n'apparaîît pas durant ces n lancers ».

F

1. Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, puis montrer que $p_n = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

probabilité **Exercice 8.3.13** On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules noires et 3 rouges. Pour $k \in [\![1,8]\!]$, on introduit les événements $E_k =$« la première boule noire est obtenue au $k^{\text{ième}}$ tirage », et $R_k =$« le $k^{\text{ième}}$ tirage donne une rouge ».

F

1. Décrire les événements $E_1, \ldots, E_4$ à l'aide des événements R_k
2. En déduire les probabilités des événements $E_1, \ldots, E_4$. Que valent $P(E_k)$ pour $k \geqslant 5$?

probabilité **Exercice 8.3.14** On tire une à une, et sans remise, toutes les boules d'une urne, qui contient n boules rouges et n boules vertes. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage, on ait un changement de couleur ?

F conditionnement

probabilité **Exercice 8.3.15** Soit $n \geqslant 1$. Un sac contient initialement j bonbons jaunes et r bonbons roses. On effectue n tirages successsifs d'un bonbon de ce sac selon le protocole suivant :

F

- si on tire un bonbon rose, on le remet dans le sac avant le prochain tirage
- si on tire un bonbon jaune, on a le droit de le manger

1. Quelle est la probabilité de manger au moins un bonbon jaune ?
2. Quelle est la probabilité de manger exactement un bonbon jaune ?
3. Sachant qu'on a mangé un seul bonbon jaune, quelle est la probabilité qu'on ait tiré un bonbon jaune en dernier ?

probabilité **Exercice 8.3.16**

F

- Une urne U_1 contient 2 boules rouges, 3 boules bleues et 5 boules vertes.
- Une urne U_2 contient 4 boules rouges et 5 boules bleues
- Une urne U_3 contient 3 boules bleues et 6 boules vertes

On tire au hasard une boule de U_1 que l'on place dans U_2 ; puis on tire au hasard une boule de U_2 que l'on place dans U_3 pour enfin tirer au hasard une boule de U_3 que l'on met dans U_1 . Quelle est la probabilité que la composition de l'urne U_1 n'ait pas changé à l'issue de ces manipulations ?

probabilité **Exercice 8.3.17** On lance $n \geqslant 1$ fois de suite un dé équilibré et on note p_n la probabilité que la somme des nombres obtenus soit paire. Déterminer par récurrence p_n pour $n \geqslant 1$. **F**

probabilité **Exercice 8.3.18** Une puce évolue sur trois cases A, B et C de façon aléatoire selon la règle suivante : **F**

- à l'instant 0, la puce se trouve sur la case A
- lorsque la puce se trouve sur une certaine case à un instant donné, elle se déplace à l'instant suivant, sur l'une quelconque des autres cases de façon équiprobable

On note A_n (resp. B_n et C_n) les événements : « à l'instant n, la puce est sur la case A (resp. B et C) » et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer a_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
2. Justifier alors que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 0$.
3. En déduire l'expression de a_n en fonction de n et sa limite en $+\infty$. Surpris ?

probabilité **Exercice 8.3.19** On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes : **F**

- si l'appareil fonctionne au temps $n \geqslant 0$, il a la probabilité $a \in]0,1[$ d'être en panne au temps $n+1$.
- si l'appareil est en panne au temps $n \geqslant 0$, il a la probabilité $b \in]0,1[$ d'être en panne au temps $n+1$.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Pour $n \geqslant 0$, établir une relation entre p_{n+1} et p_n
2. Pour $n \geqslant 0$, en déduire p_n en fonction de n et de p_0. La suite (p_n) converge-t-elle ?

probabilité **Exercice 8.3.20** Une boule est tirée au hasard dans une urne continant r boules rouges et n boules noires. On note sa couleur puis on la remet dans l'urne avec $d \geqslant 1$ boules supplémentaires de la même couleur. On répète plusieurs fois le procédé et l'on note $R_k =$« la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge » pour $k \geqslant 1$. **F**

1. Calculer $P(R_1)$ puis montrer que $P(R_2) = P(R_1)$
2. Si la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été rouge ?
3. *plus dur.* Pour $k \geqslant 2$, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été rouge sachant que les $k-1$ boules suivantes sont rouges ?

probabilité **Exercice 8.3.21** On considère n urnes numérotées de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$. Pout $1 \leqslant k \leqslant n$, l'irne k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche si l'on choisit une urne au hasard puis une boule de cette urne ? **F**

probabilité **Exercice 8.3.22** On dispose de deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité $p_1 \in]0,1[$ et la pièce 2 donne pile avec une probabilité $p_2 \in]0,1[$. Au premier lancer, on choisit une pièce au hasard et on la lance. Puis on effectue une suite de lancers comme suit : **F**

- si un lancer donne pile, on garde la même piece pour le lancer suivant
- s'il donne face, on change de pice pour le lancer suivant.

Pour $n \geqslant 1$, on note $U_n =$« le $n^{\text{ième}}$ lancer s'effectue avec la pièce 1 » et on pose $u_n = P(U_n)$.

1. a. Pour $n \geqslant 1$, calculer la probabilité de ne jamais lancer la pièce 2 au cours des n premiers tirages
   b. Calculer la probabilité de jeter pour la première fois la pièce 2 au $n^{\text{ième}}$ lancer. *séparer $n = 1$ et $n \geqslant 2$*
2. a. Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   b. En déduire u_n pour $n \geqslant 1$.
3. Quelle est la probabilité r_n d'obtenir pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ? Calculer la limite de la suite (r_n)

probabilité **Exercice 8.3.23** On lance une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu deux piles successifs au cours des n premiers lancers et on pose $P_k =$« le $k^{\text{ième}}$ lancer donne pile » **F**

1. Calculer p_1, p_2, p_3
2. Montrer que $\{P_1 \cap P_2, P_1 \cap \overline{P_2}, \overline{P_1}\}$ est un système complet d'événements

3. A l'aide de la formule des probabilités totales, trouver une relation entre p_n et p_{n-2} pour $n \geqslant 3$
4. Déterminer alors p_n en fonction de n. Quelle est la limite de (p_n) ?

probabilité **Exercice 8.3.24** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ? **F**

1. $A =$« tirer un roi » et $B =$« tirer un rouge ».
2. $A =$« tirer une dame » et $B =$« tirer une figure ».
3.

probabilité **Exercice 8.3.25** On lance $n \geqslant 1$ fois une pièce équilibrée. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus un pile. **F**

probabilité **Exercice 8.3.26** Une étude statistique a montré que sur 100 naissances, 49 bébés sont des filles et 51 sont des garçons. On suppose que les événements « accoucher d'un garçon » et « accoucher d'une fille » sont indépendants. Lucie a eu 4 bébés. **F**

1. a. Calculer la probabilité que Lucie ait eu autant de garçons que de filles.
   b. Sachant que le premier bébé de Lucie est une fille, quelle est la probabilité qu'elle ait eu un seul garçon ?
2. L'événement « le premier bébé est une fille » est-il indépendant de l'événement « Lucie a exactement 2 garçons » ?
3. Sachant que Sophie a eu 2 garçons et 2 filles et que son premier bébé est une fille, calculer la probabilité que son deuxième bébé soit une fille.

probabilité **Exercice 8.3.27** Une urne A contient 3 boules blanches et 5 boules rouges et une urne B contient 7 boules blanches et 4 boules rouges. Un joueur lance un déet choisit l'urne A s'il obient 1, 2, 3 ou 4 et l'urne B sinon. Puis il tire, avec remise, 3 fois une boule dans l'urne choisie. **F**

1. Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges ?
2. Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'urne A ?

9. Systèmes linéaires

système linéaire

Exercice 9.1 Résoudre les systèmes suivants : F

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 7x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} 3x - 6y - 6z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + 4y + 6z = 0 \\ 6x - 12y - 12z = 0 \end{cases}$$

système linéaire

Exercice 9.2 Résoudre les systèmes suivants F

$$a)\ \begin{cases} -3x + y + z + t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} -x + 3y - t = 0 \\ 2x - y + 2z + 2t = 0 \\ 5y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \end{cases}$$

système linéaire

Exercice 9.3 Résoudre le système $\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 2t = 0 \\ 5x + y + z - 2t = 0 \end{cases}$ MD

compatibilité
système linéaire

Exercice 9.4 A quelles conditions portant sur les paramètres a, b, c et d, les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Le cas échéant, finir la résolution des systèmes. F

$$a)\ \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \\ -3x + y + 3z = c \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} 3x - 3y - 2z = a \\ -4x + 4y + 3z = b \\ 2x - 2y - z = c \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} -2x - 3y + 3z = a \\ x + 2y - z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ 4x + 2y - z = c \\ x - 7z = d \end{cases}$$

compatibilité
système linéaire

Exercice 9.5 Discuter et résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes F

$$a)\ \begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m+1 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

10. Espaces vectoriels (introduction)

espace vectoriel **Exercice 10.1** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? **F** sous-espace contre-exemple

$$F_1 = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\} \qquad F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} \qquad F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$$
$$F_4 = \{(x,-x,2x) : x \in \mathbb{R}\} \qquad F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$$

espace vectoriel **Exercice 10.2** On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les ensembles suivants sont ils des espaces vectoriels ? **M** sous-espace

$$A = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad (n \geqslant 0)\} \qquad B = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_0 = u_3 = 0\}$$
$$C = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est géométrique}\} \qquad D = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est bornée}\}$$
$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ converge vers } 0\} \qquad F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est convergente}\}$$

espace vectoriel **Exercice 10.3** On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont ils des espaces vectoriels ? **F** sous-espace

$$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ paire}\} \qquad B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(2) = f(5) = 0\}$$
$$C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ continue}\} \qquad D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : u \text{ croissante}\}$$

endance linéaire Vect **Exercice 10.4** Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $i = (1,-1,2)$ et $j = (1,1,-1)$ **F** élimination

1. Montrer que les vecteurs $u = (3,1,0)$, $v = (-1,-3,4)$ et $w = (1,-5,8)$ sont des combinaisons linéaires de i et j
2. Qu'en est-il des vecteurs $U = (4,1,0)$, $V = (10,-4,11)$ et $W = (10,-2,9)$?
3. Plus généralement, déterminer $\text{Vect}(i,j)$. *En déterminer une équation cartésienne ?*

dans un Vect **Exercice 10.5** dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (-4,4,3)$, $v = (-3,2,1)$, $s = (-1,2,2)$ et $t = (-1,6,7)$ **F** double inclusion ou dimension

1. Montrer que $u \in \text{Vect}(s,t)$ et $v \in \text{Vect}(s,t)$. En déduire que $\text{Vect}(u,v) \subset \text{Vect}(s,t)$
2. Montrer que $\text{Vect}(u,v) = \text{Vect}(s,t)$

dans un Vect **Exercice 10.6** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $x = (1,2,1)$, $y = (1,0,1)$ et $z = (k,2,3)$. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $z \in \text{Vect}(x,y)$. **F**

endance linéaire **Exercice 10.7** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le vecteur $u = (4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est il combinaison linéaire des vecteurs $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $S = X^3$? Plus généralement, décrire $\text{Vect}(Q,R,S)$. **F** base

endance linéaire **Exercice 10.8** Soit $u = (1,1,-1)$, $v = (2,1,3)$ et $w = (0,-1,5)$. La famille (u,v,w) est-elle liée dans $\mathbb{R}^3$? Auquel cas, trouver une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs. **F** rang

endance linéaire **Exercice 10.9** Déterminer l'ensemble des réels k tels que la famille $\big((1,k,2),(-1,8,k),(1,2,1)\big)$ soit une liée dans $\mathbb{R}^3$. **F** rang

endance linéaire **Exercice 10.10** Les familles suivantes sont-elles libres dans l'espace vectoriel indiqué ? **FM**

1. $\mathcal{F}_1 = \big((2^n)_{n\in\mathbb{N}},(3^n)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. $\mathcal{F}_2 = \big(x \mapsto x, x \mapsto |x|\big)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. $\mathcal{F}_3 = \big(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(x)^3\big)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

base coordonnées **Exercice 10.11** **F** rang ou système linéaire

1. Montrer de deux manières différentes que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1,1,0)$, $v = (1,2,1)$, et $w = (2,3,2)$. Déterminer alors les coordonnées du vecteur x $= (0,\ 1,\ -2)$ dans cette base. Quelle est la méthode la plus rapide ?
2. Même question avec $U = (0,1,1)$, $V = (2,0,-1)$, $W = (2,1,1)$, et $X = (1,-2,-1)$.

espace vectoriel
base

Exercice 10.12 Montrer que l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ 4x+y &= 0 \end{cases}$ forme un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

F
système linéaire
Vect

espace vectoriel
base

Exercice 10.13 Montrer que l'ensemble des solutions des systèmes suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base

F
système linéaire
Vect

$$a)\ \left\{ 2x+y-z=0 \right. \qquad b)\ \begin{cases} 2x & & -3z & +t & =0 \\ x & +y & +z & -t & =0 \\ & -2y & -5z & +3t & =0 \\ 3x & +y & -2z & & =0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x & +2y & -z & =0 \\ -2x & -3y & +3z & =0 \\ x & +y & -2z & =0 \end{cases}$$

Choisir l'option la plus rapide.

base
Vect

Exercice 10.14

F
rang

1. Déterminer une base de $\text{Vect}\big((1,2,-1),(3,-1,2),(4,1,1),(2,-3,3)\big)$
2. Déterminer une base de $\text{Vect}\big((3,1),(1,1),(-2,-2),(2,0)\big)$

base

Exercice 10.15

F

1. Déterminer une base de $\mathbb{R}$, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de $\mathbb{C}$, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

base

Exercice 10.16

F

1. Déterminer une base de $\mathbb{R}$, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de $\mathbb{C}$, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

base

Exercice 10.17 Déterminer une base de $\text{Vect}\big((n^2)_{n\in\mathbb{N}},(2n+1)_{n\in\mathbb{N}},(3^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

F
libre

libre

Exercice 10.18

F
libre : définition

1. Montrer que $(1,X-1,(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et décomposer $P=3X^2+2X+1$ dans cette base
2. Montrer que la famille $\big(x\mapsto cosx, x\mapsto sinx, x\mapsto cos(x)sin(x)\big)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Montrer que la famille $\big((n3^n)_{n\in\mathbb{N}},(3^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

base
dimension
dans un Vect

Exercice 10.19

F
rang

1. Les vecteurs $u=(1,2,3)$ et $v=(3,2,1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Quelle est la dimension de $F=\text{Vect}(u,v)$?
3. Le vecteur $w=(1,4,7)$ appartient-il à F ? Si oui, quele est sa décomposition dans la base (u,v) de F .
4. Même question avec le vecteur $t=(-1,6,9)$

Exercice 10.20

F

1. A partir de la famille $\mathcal{A}=\big((1,1,1),(1,2,3)\big)$ construire une base de $\mathbb{R}^3$
2. idem pour $\mathcal{B}=\big((1,1,1),(-1,2,0)\big)$
3. idem pour $\mathcal{C}=\big((1,0,1),(-1,3,1),(1,2,3),(0,0,1)\big)$

11. Etude globale des fonctions

dérivabilité
dérivée

Exercice 11.1 Dériver les fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition et de dérivation

F
dérivabilité (F)

$$f : x \mapsto (1+\ln x)^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}+2x} \qquad g : x \mapsto \cos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$h : x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(\sin x) \qquad i : x \mapsto \sqrt{\tfrac{x}{x^2+5}}$$

Exercice 11.2 Déterminer la monotonie des fonctions suivantes (on proposera plusieurs méthodes) :

FM

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} \qquad g(x) = \sqrt{x^2+x+1} \qquad h(x) = \ln\left(x^2+1\right)\sqrt{x}$$

parité

Exercice 11.3

F

1. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ est paire.
2. Montrer que la fonction $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est impaire.
3. Montrer que la fonction $h(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

périodique
signe
encadrer

Exercice 11.4

M

1. Montrer que la fonction $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique puis la représenter graphiquement.
2. Soit $f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$
   a. Montrer que f est positive et bornée (trouver le meilleur majorant)
   b. Montrer que f est périodique puis préciser $f(\mathbb{R})$.
3. Que dire de la fonction $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?
4. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ est majorée sur $]0,+\infty[$. Est ce encore vrai sur $\mathbb{R}^*$?

étude de $f(x)$

Exercice 11.5 Etudier les fonctions suivantes :

FM

$$f : x \mapsto \sqrt{2-\ln x} \qquad g : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}} \qquad h : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$
$$i : x \mapsto \sqrt{x-\sqrt{x}} \qquad j : x \mapsto \tfrac{x}{x-\ln x}$$

étude de $f(x)$
variation

Exercice 11.6 Etudier la fonction $f : x \mapsto 1-(x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.
En déduire les variations de $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-\mathrm{e}^{-2x}}$.

F
tableau de variation

étude de $f(x)$
parité
eau de variation

Exercice 11.7 Etude complète de $f(x) = x+2-2\ln(\mathrm{e}^x+1)$. Parité, tableau de variation, limites, asymptotes et position relative, allure de la courbe.

FM

constante

Exercice 11.8 Montrer q'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, croissante et périodique, est nécéssairement constante sur $\mathbb{R}$.

FM

11.1 continuité

définition
continuité

Exercice 11.1.9 Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la continuité des fonctions suivantes

F
définition (F)
continuité (F)

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ \mathrm{e} & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\setminus\{1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ x & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

continuité **Exercice 11.1.10** Déterminer l'ensemble de définition, la continuité et les éventuels prolongements par continuité pour

F
définition (F)
continuité (F)

$$a)\quad f(x)=\frac{2-x}{\sqrt{x-2}}\qquad b)\quad g(x)=\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\qquad c)\quad h(x)=x^x$$

continuité **Exercice 11.1.11** Etudier les fonctions suivantes au point précisé

F
limite

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}\quad \text{étude en 1}\qquad b)\quad f(x)=\frac{|x|}{x}\quad \text{étude en 0}$$

continuité **Exercice 11.1.12** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, continue, telle que $f(0)=f(1)$

F
valeur intermédiaire

1. Montrer qu'il existe $x[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$.
2. Plus généralement, pour $n\in\mathbb{N}^*$ prouver l'existence de $x_n\in[0,1-\frac{1}{n}$ tel que $f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$. On pourra poser $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$ et montrer que $\sum_{k=0}^{n-1}g(k/n)=0$

borné **Exercice 11.1.13** Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$

F
continuité
limite
raisonnement epsilo-nique

existence
situer
Exercice 11.1.14 Montrer qu'il existe un unique réel x strictement positif tel que $\ln x=\mathrm{e}^{-x}$. Vérifier alors que $1\leqslant x\leqslant 3$.

F
tableau de variation
valeur intermédiaire

bijection
eau de variation
Exercice 11.1.15 Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de I sur un intervalle à préciser. Donner alors le tableau de variations de la réciproque puis déterminer la.

F

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\quad\text{avec } I=[-\tfrac{1}{2},+\infty[\qquad g(x)=\frac{2x^2+x+2}{x^2+1}\quad\text{avec } I=[1,+\infty[$$

$$h(x)=\frac{x}{1+|x|}\quad\text{avec } I=\mathbb{R}$$

eau de variation
bijection
Exercice 11.1.16 Soit f la fonction définie par $f(x)=x\ln x$

F

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. a. Montrer qu'il existe une fonction g définie sur $I=[-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ vérifiant $x=g(x)\ln\big(g(x)\big)$ pour $x\in I$.
   b. Justifier que la fonction g est unique.
3. Dresser le tableau de variations complet de g, puis tracer sur un même graphique, les courbes de f et de g.

existence
unicité
monotonie
convergence
Exercice 11.1.17 Soit $\alpha>0$ et soit f la fonction définie par $f(x)=x^{\alpha+1}+x^\alpha$ pour $x>0$

F
tableau de variation
suite implicite

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^{\alpha+1}+x^\alpha=n$ admet une unique solution x_n dans $]0,+\infty[$
2. Etudier la monotonie de la suite (x_n) ainsi que sa convergence

existence
unicité
encadrer
convergence
signe
monotonie
Exercice 11.1.18 Pour $n\geqslant 2$, on pose $f_n(x)=x^n+1-nx$ pour $x\in\mathbb{R}$.

F
suite implicite
gendarmes

1. Pour $n\geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n+1=nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. On note x_n cette solution. Que vaut x_2 ?
2. Pour $n\geqslant 2$ montrer que $\frac{1}{n}\leqslant x_n\leqslant\frac{2}{n}$ En déduire que la suite (x_n) converge.
3. Déterminer la limite de la suite (nx_n). En déduire un équivalent de x_n Pour $n\geqslant 2$, étudier le signe de $f_{n-1}-f_n$ sur $[0,1]$ et en déduire que $f_n(x_{n+1})\geqslant 0$. Déterminer alors la monotonie de la suite (x_n)

eau de variation
existence
unicité
encadrer
monotonie
convergence
Exercice 11.1.19 **Edhec E 97.** Pour $n\geqslant 3$, on pose $f_n(x)=x-n\ln x$ pour $x\geqslant 0$.

F
suite implicite

1. Etudier f_n et dresser son tableau de variation
2. En déduire l'existence de deux solutions u_n et v_n de l'équation $f_n(x)=0$, avec $0<u_n<n<v_n$.
3. Montrer que $1<u_n<\mathrm{e}$.
4. Montrer que $f_n(u_{n+1})=\ln(u_{n+1})$ pour $n\geqslant 3$. En déduire que (u_n) est décroissante et converge
5. Pour $n\geqslant 3$ montrer que $0\leqslant\ln u_n\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n}$. En déduire la limite de la suite (u_n)

12. Dérivation

définition
continuité
dérivabilité

Exercice 12.1 Etudier la continuité et la dérivabilité sur leur ensemble de définition de

F
définition (F)
continuité (F)
dérivabilité (F)

$$a(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad b(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2x^2}-1}{x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$c(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}} & \text{si } x\neq -1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad d(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

dérivée

Exercice 12.2 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

1. Lorsque f est paire, montrer que f' est impaire
2. Lorsque f est impaire, montrer que f' est paire

F
dérivabilité

définition
continuité
dérivabilité

Exercice 12.3 On pose $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f

F
définition (F)
continuité (F)
dérivabilité (F)
tableau de signe

$\mathcal{C}^1$

Exercice 12.4 T$\mathcal{C}^1$ (F) Montrer que la fonction définie par $f(x)=x|x|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

F

définition
continuité
dérivabilité
dérivée

Exercice 12.5 On pose $f(x)=\big|\ln(x)\big|$

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition
2. Etudier la dérivabilité de f, puis calculer sa dérivée là où elle est dérivable.

F
analyse de calcul
taux d'accroissement

définition
continuité
dérivabilité
dérivée

Exercice 12.6 Déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont définies $\surd$ puis dérivables et calculer leur dérivée.

F
a^b
ln
racine
tableau de signe

$$f(x)=(1+x^2)^x \qquad g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad h(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2} \qquad k(x)=(x^2-x^3)^{1/3}$$

impair
continu
dérivable
dérivée
eau de variation

Exercice 12.7 On pose $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{\frac{-3}{|x|}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

F

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{-3}{|x|}}\left(1+\dfrac{3}{|x|}\right)\quad (x\neq 0)$
4. Montrer que f est dérivable en 0
5. Dresser le tableau de variations complet de la f

f^{-1}
eau de variation
dérivabilité
dérivée
$f(x)$

Exercice 12.8 Pour $x>0$, on pose $f(x)=\mathrm{e}^{1+\frac{2}{x}}$

F
résoudre $y=f(x)$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de $g=f^{-1}$
2. Justifier la dérivabilité de g sur son ensemble de définition, et calculer $g'(\mathrm{e}^3)$ et $g'(\mathrm{e}^5)$
3. déterminer g et restrouver les résultat des questions précédentes.

f^{-1}
eau de variation
dérivée

Exercice 12.9 Pour $0<x<1$, on pose $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-x$

F

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0{,}1[$ sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de $g=f^{-1}$
2. Déterminer $f'(\ln(2)-\frac{1}{3})$ et $g'(-\frac{1}{2})$

f^{-1}
dérivable
dérivée

Exercice 12.10 Pour $x>0$, on pose $f(x)=x+\ln x$

F
$(f^{-1})'$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0{,}1[$ sur un intervalle à préciser
2. Montrer que $g=f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$g'(y) = \frac{g(y)}{g(y)+1} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

majoration
bijection
f^{-1}
eau de variation
dérivabilité
dérivée

Exercice 12.11 **F** $(f^{-1})'$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|\sin(x)| \leqslant |x|$
2. Prouver que $f : x \mapsto \sin(x)$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle à déterminer.
3. Dresser le tableau de variation de $g = f^{-1}$. Déterminer alors l'ensemble de dérivabilité de g puis dessiner sur un même graphique l'allure de la courbe de f et de g. *Utiliser 1) pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à la droite* : $y = x$
4. Calculer la dérivée de g
   a. Pour $-1 < x < 1$, montrer que $\cos\big(g(x)\big)^2 = 1 - x^2$
   b. Pour $-1 < x < 1$ montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

existence

Exercice 12.12 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $\mathrm{e}^{-a} f(a) = \mathrm{e}^{-b} f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ telle que $f'(c) = f(c)$. **F** Rolle

continu
dérivable
existence

Exercice 12.13 Soit f une fonction continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pose $F(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x} - 1) & \text{si } 0_L ex \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **F** Rolle

1. Montrer que F est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$
2. Montrer que F' s'annule sur $]0,1[$
3. En déduire qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

encadrer

Exercice 12.14 A l'aide de l'inégalité des accroissements finis **F** $\leqslant$: accroissements finis

1. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, montrer que $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant xe$
2. Pour $x \geqslant 0$, montrer que $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(x) \leqslant x$. Qu'en est il si $-1 < x < 0$?

dérivabilité

Exercice 12.15 **F**

1. Pour $k \geqslant 2$, appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1,k]$ à $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$
2. En déduire que l'on définit une suite convergente en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad (n \geqslant 1)$

dérivabilité

Exercice 12.16 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. **F**

1. Pour $k \geqslant 1$, montrer que $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$
2. a. Pour $n \geqslant 1$, en déduire que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant u_n$
   b. Montrer alors que la suite u converge. La limite de cette suite est appelée constante d'Euler et est notée γ.
3. *Variante.* Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes et retrouver la conclusion du 2b

dérivabilité

Exercice 12.17 On veut déterminer une valeur approchée de l'unique solution négative de l'équation (E) : $\mathrm{e}^x = 3 + 2x$. **F**

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}^-$ puis justifier que $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 3}{2}$
   a. Résoudre l'équation $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}^-$ (point fixe)
   b. Pour $x \leqslant 0$, justifier que $g(x) \leqslant 0$ et $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. On introduit la suite u définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n \leqslant 0$.
   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$
   c. En déduire que u converge vers α
   d. Ecrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-9} près

dérivabilité **Exercice 12.18** Soit l'équation (E) : $x^3 - 3x + 1 = 0$ **F**

1. Montrer que l'équation (E) admet exactement trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.
2. Approximation de β
   a. Justifier que $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ puis vérifier que β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3+1}{3} = x$.
   b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{x^3+1}{3}$.
   Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, montrer que $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{2}$ et $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   c. Soit u la suite définiue par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   Pour $n \geqslant 0$, montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   d. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leqslant 4^{\frac{-n}{2}}$
   e. En déduire que la suite u converge vers β.
   f. Ecrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de β à 10^{-5} près.

13. Matrices

matrice

Exercice 13.1 Déterminez BA, CB, AB, $BC-2A$, BD, $CB-D$, $D^{\mathrm{t}}B$ et $(D-\mathrm{I}_2)C$ pour **F**

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&-1&1\\2&-4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&3\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$$

matrice

Exercice 13.2 Si possible, déterminez BAC, $C(B-2A)$, A^2-CB et $(A-\mathrm{I}_3)^3$ pour **F**

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

matrice

Exercice 13.3 Calculez les matrices **F**

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\0&-3\\-1&1\end{pmatrix}\qquad\qquad\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

matrice
inversible
A^{-1}

Exercice 13.4 Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ vérifie $A^2-2A-3\mathrm{I}_4=0$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} **F** $P(A)=0$

matrice
inversible
A^{-1}

Exercice 13.5 On considère la matrice $J=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\-2&1&2&-1\\2&-1&-1&0\\3&-2&-2&0\end{pmatrix}$ **F** récurrence forte $P(A)=0$

1. Calculer J^2, J^3, J^4. Pour $k\geqslant 4$, que peut on en déduire pour J^k ?
2. Développer et simplifier l'expression $(\mathrm{I}_4+J)(\mathrm{I}_4-J+J^2-J^3)$
3. En déduire que la matrice (I_4+J) est inversible et expliciter son inverse

matrice
inversible
A^{-1}
diagonalisation
A^n

Exercice 13.6 Soient $A=\begin{pmatrix}1&&1\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ **F** $AB=\mathrm{I}_n$ récurrence forte

1. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}
2. Calculer la matrice $D=P^{-1}AP$
3. Pour $n\in\mathbb{N}$, montrer que $D^n=P^{-1}A^nP$ et en déduire A^n

matrice
inversible
A^{-1}
récurrence
suite constante
suite arithméti-co-géométrique
u_n

Exercice 13.7 Soit $M=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$. **F** $P(A)=0$

1. a. Vérifier que $(M-\mathrm{I}_3)(M+3\mathrm{I}_3)=0$. Exprimer M^2 en fonction de M et I_3.
   b. En déduire que M est inversible et calculer son inverse.
2. Soient u et v les suites définies par $u_0=0$, $v_0=1$ et $\begin{cases}u_{n+1}= & -2u_n+v_n\\ v_{n+1}= & 3u_n\end{cases}$
   Montrer par récurrence que $M^n=u_nM+v_n\mathrm{I}_3$ pour $n\geqslant 0$
3. Montrer qu'on définit une suite constante en posant$s_n=u_n+v_n$ pour $n\geqslant 0$. En déduire que u est une suite arithmético-géométrique. Calculer u_n en fonction de n
4. Exprimer v_n puis M^n en fonction de n

$AB = BA$ **Exercice 13.8** Déterminer toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **F** (a_{ij}) système linéaire

linéaire **Exercice 13.9** Déterminer le rang des matrices suivantes **F**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

linéaire **Exercice 13.10** Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrice lignes non-nulles U et V de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = {}^{\mathrm{t}}UV$. **F**

matrice **Exercice 13.11** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ **F**

1. Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, ${}^{\mathrm{t}}(AB)$ et ${}^{\mathrm{t}}B{}^{\mathrm{t}}A$ (vérifier l'égalité)
2. Calculer $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$
3. Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

matrice **Exercice 13.12** Lorsque c'est possible, calculer les produits AB et BA pour **F**

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = {}^{\mathrm{t}}A$

matrice **Exercice 13.13** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier **F**

$$S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B) \quad \text{et} \quad T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$$

matrice **Exercice 13.14** Déterminer toutes les matrices triangulaires supérieures $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $T^2 = \mathrm{I}_2$ **F**

matrice **Exercice 13.15** **F**

1. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A pour

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit D la matrice diagonale d'ordre n, de coefficients diagonaux : 1,2,...,n.
   Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D

A^n **Exercice 13.16** Soit $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer J^n. **F**

Exercice 13.17 **F** absurde

1. Soient A et B deux matrices non nulles vérifiant $AB = 0$. Montrer que ni A, ni B ne sont inversibles.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $C^2 + C = 0$ et en déduire que C n'est pas inversible.

matrice inversible A^{-1}

Exercice 13.18 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **F** $P(A) = 0$

1. Montrer que $A^3 - A^2 - A + \mathrm{I} = 0$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}
2. Que vaut $(A^2)^{-1}$? *On attend 2+ méthodes*

A^n

Exercice 13.19 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **F**

1. Vérifier que $(A - \mathrm{I}_4)^2 = 0$
2. Montrer que A est inversible et expliciter la matrice A^{-1}
3. En remarquant que $A = (A - \mathrm{I}_4) + \mathrm{I}_4$, calculer A^n pour $n \geqslant 2$.
   La formule est-elle encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$? pour $n = -1$?

A^n

Exercice 13.20 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2\mathrm{I}_3$ **F** binôme de Newton

Montrer que $B^2 = 3B$. Par récurrence, en déduire que $A^n = 2^n \mathrm{I}_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Comment aurait on pu faire autrement ?

matrice

Exercice 13.21 **F**

1. Pour $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 = 0$, montrer que $(\mathrm{I}_p + X)^n = \mathrm{I}_p + nX$ pour $n \geqslant 1$.
2. Pour $XY\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $Y^2 = Y$, montrer que $(\mathrm{I}_p + Y)^n = \mathrm{I}_p + (2^n - 1)Y$ pour $n \geqslant 1$.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n et B^n pour $n \geqslant 1$.

existence A^n u_n

Exercice 13.22 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **F** récurrence forte

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il esiste un unique $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$
2. Reconnaitre la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

matrice inversible A^{-1} récurrence A^n u_n

Exercice 13.23 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **F**

1. Vérifier que $A^2 = A + 2\mathrm{I}$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe deux uniques nombres réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n \mathrm{I}$.
   On précisera les relations de récurrences entre u_{n+1}, v_{n+1} et u_n et v_n.
3. On pose $a_n = 2u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$. Reconnaitre les suites (a_n) et (b_n). Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire u_n et v_n puis A^n en fonction de n

atrice nilpotente $AB = BA$

Exercice 13.24 Une matrice M est dite « nilpotente » s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$. **M** $(a+b)^n$

Soient A et B deux matrices qui commutent.

1. Si A est nilpotente, montrer que AB l'est aussi
2. Si A et B sont nilpotentes, montrer que $A + B$ l'est aussi.

inversible A^{-1}

Exercice 13.25 Soient $n \geqslant 2$ et $A\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **F** somme télescopique $P(A) = 0$ $AB = \mathrm{I}_n$

1. Montrer que $\mathrm{I} - A^n = (\mathrm{I} - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k$
2. On suppose que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$, i.e. que A est nilpotente d'indice n.
   a. Montrer que A n'est pas inversible
   b. En utilisant 1), montrer que $\mathrm{I} - A$ est inversible et exprimer son inverse en fontion de A.

matrice

Exercice 13.26 **F**

1. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles
2. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$X^2 = A$
$AB = BA$
~~inversible~~

Exercice 13.27 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et on note S l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$. **F**

1. On suppose que S est non vide et on considère $M \in S$
   a. Montrer sans utiliser les coefficients de A que $AM = MA$
   b. La matrice A est-elle inversible ? Montrer alors que M n'est pas inversible.
   c. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déduire des deux questions précédentes que $a = c = d = 0$.
2. Montrer que S est vide

matrice
uite géométrique
atrice nilpotente
A^n
u_n

Exercice 13.28 Soient u et v les suites définies par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et vérifiant **F**
$(a+b)^n$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad (n \geqslant 0).$$

1. Montrer qu'il existe une matrice A versifiant $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 0$. En déduire que l'on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \qquad (n \geqslant 0)$$

2. Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = 5\mathrm{I}_2 + J$ où J est une matrice à déterminer qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour $n \geqslant 0$
3. Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

diagonalisation
A^n
u_n

Exercice 13.29 On considère la suite u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et **F**

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \qquad (n \geqslant 0).$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $D = P^{-1}AP$? En déduire D^n
2. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $D^n = P^{-1}A^nP$ et en déduire A^n.
3. a. Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ pour $n \geqslant 0$ et en déduire X_n en fonction de A^n et X_0.
   b. Déterminer la valeur de u_n en fonction de n

matrice

Exercice 13.30 Soient $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ **F**

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Déterminer alors la matrice D telle que $M = PDP^{-1}$
2. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire M^n.

3. Dans un club de vacances, un enfant choisit chaque jour une activité parmi « jeu de ballon », « planche à voile » ou « catamaran » selon les règles suivantes :
   a. Le premier jour, l'enfant choisit au hasard
   b. si la veille il a choisi le jeu de ballon, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou change pour la planche à voile (resp. catamaran) avec probabilité $\frac{1}{4}$.
   c. si la veille il a choisi la planche à voile, il reste fidèle à ce sport avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou change pour le ballon avec probabilité $\frac{2}{3}$
   d. si la veille il a choisi le catamaran, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ou change pour la planche à voile (resp. le jeu de ballon) avec probabilité $\frac{1}{4}$ (resp. $\frac{1}{2}$)

   Pour $n \geqslant 0$, On note b_n (resp. v_n, c_n) la probabilité que l'enfant choisisse le ballon (resp. planche à voile, resp. catamaran) le jour n. Enfin, on pose $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   a. Déterminer X_1
   b. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $X_{n+1} = MX_n$ pour $n \geqslant 1$.
   c. A l'aide de la question 2), déterminer alors b_n , v_n et c_n pour $n \geqslant 2$ et calculer leur limite.

matrice **Exercice 13.31** Un feu bicolore, passe au vert lorsqu'il est rouge avec la probabilité $p \in]0,1[$ et passe au rouge lorsqu'il est vert avec la probabilité $q \in]0,1[$. Pour $n \geqslant 0$, on note r_n (resp. v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (resp. au vert) à l'instant n. **F**

1. Pour $n \geqslant 0$, justifier que $\begin{cases} r_{n+1} & = (1-p)r_n + qv_n \\ v_{n+1} & = pr_n + (1-q)v_n \end{cases}$
2. En déduire l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et montrer que
$$\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \qquad (n \geqslant 0).$$
3. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} \mathrm{I} & = B + C \\ A & = B + (1-p-q)C \end{cases}$
4. Vérifier que $BC = 0 = CB$
5. Pour $n \geqslant 0$, exprimer A^n en fonction de B, C et n
6. Pour $n \geqslant 1$, en déduire r_n et v_n en fonxction de n, r_0 et v_0 puis leur limite eventuelle.

espace vectoriel base **Exercice 13.32** Montrer que l'on définit des espaces vectoriels, dont on donnera une base, en posant **F** Vect

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \qquad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : x + y = 0 \right\}$$
$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = 2b + c \right\}$$

matrice **Exercice 13.33** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ **F**

1. Montrer que E est un espace vectoriel
2. Déterminer une base de E pour $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. mêmes questions pour $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = 0\}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

matrice **Exercice 13.34** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **F**

Montrer que (A,B,C,D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis décomposer $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

matrice **Exercice 13.35** Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par **F**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

14. VAR et lois usuelles (univers fini)

VAR **Exercice 14.1** On jette deux fois de suite un dé non truqué. On introduit la VAR X égale au plus grand des numéros obtenus ainsi que la VAR S qui est égale à la somme des numéros pairs obtenus, si on obtient au moins un numéro pair, et à 0 sinon. F univers univers image fonction de répartition loi

1. Déterminer Ω, $\text{Card}(\Omega)$, $X(\Omega)$ et $S(\Omega)$
2. Déterminer la loi de S. En déduire sa fonction de répartition, et la dessiner.
3. Déterminer la fonction de répartition de X et la dessiner. En déduire la loi de X.

probabilité **Exercice 14.2** F

1. Une urne contient n boules rouges et m boules blanches. En calculant de deux manières différentes le nombre de tirage de k boules de l'urne, montrer que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k} \qquad \text{(Formule de Vandermonde)}$$

2. En déduire $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$
3. Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois « pile ». *On pourra introduire deux variables aléatoires ....*

loi $E(X)$ $V(X)$ **Exercice 14.3** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6 et 8. Déterminer la loi de X sachant que F

$$P(X<6) = \frac{1}{4}, \qquad P(X>6) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X=2) = P(X=4).$$

Calculer alors $E(X)$ et $V(X)$

Exercice 14.4 Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise 5 boules. Soit B (resp. N) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues. F

1. Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.
2. Trouver une relation liant B et N . En déduire la loi de N ainsi que son espérance.

Que deviennent ces résultats lorsque les tirages se font avec remise ?

Exercice 14.5 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Expliciter la loi de X et son espérance. F

Exercice 14.6 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une VAR à valeurs dans $[\![1,10]\!]$ vérifiant F

$$P(X=k) = \alpha k \qquad (1 \leqslant k \leqslant 10).$$

1. Déterminer α
2. Déterminer l'espérance et la variance de X
3. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = X + 1$

Exercice 14.7 On dispose de $n \geqslant 1$ boites. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la boite B_k contient k jetons numérotés de 1 à k. On choisit au hasard une boite puis on tire un jeton. On note X la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de X. F

Exercice 14.8 On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche. F

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X, et en déduire sans calcul la loi de Z.

Exercice 14.9 On jette $n \geqslant 1$ fois une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Soit X la VAR égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ sinon. **F**

1. Déterminer la loi de X et vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(X=k) = 1$
2. Pour $x \neq 1$, rappeler $\sum_{k=0}^{n} x^k$ et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \qquad (x \neq 1)$$

   En déduire l'espérance de X

Exercice 14.10 Un joueur mise $s \geqslant 2$ euros puis tire successivement et avec remise des boules d'une urne, contenant $\frac{1}{3}$ de boules blanches et $\frac{2}{3}$ de boules noires. Chaque tirage enlève 1 euro de la mise. Le jeu s'arrête dans deux cas : **F**
- lorsque la somme restant dans la mise est nulle
- lorsqu'il tire une boule blanche, auquel cas le joueur perçoit alors le triple de la somme restant dans la mise

On introduit la VAR X égale au nombre de tirages effectués par le joueur, et la VAR T égale à la somme perçue par le joueur.
1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer E(X). On pourra reprendre la formule de l'exercice 14.9.
3. Exprimer T en fonction de X. Quel est le gain relatif moyen du joueur (mise incluse) ?

Exercice 14.11 **Variante courte Edhec E 2005.** Un mobile se déplace sur un axe : **F**
- A l'instant 0, il est à l'abscisse 0
- Si le mobile est à l'abscisse k, à l'instant suivant, il sera à l'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ et en 0 sinon.

On appelle X_n la variable égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.
1. Donner la loi de X_0 et de X_1
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
3. Pout $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que $P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k-1$.
4. Pour $n \geqslant 1$, en déduire que $E(X_n) = pE_{X_{n-1}} + p$ puis déterminer $E(X_n)$ en fonction de n et p.

Exercice 14.12 Tracer la fonction de répartition **F**
1. de la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$
2. de la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{4})$

Exercice 14.13 **F** **traduire**
1. Un cycliste rencontre 5 feux de circulation sur le boulevard de Strasbourg. La probabilité qu'un feu soit vert est de $\frac{1}{2}$, et ce indépendamment des autres feux. On note X le nombre de feux verts pour le cycliste. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère. Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne :
   a. un seul gaucher
   b. au moins deux gauchers
3. Un parking souterrain contient 20 scooters à 3 roues, 20 motos et 20 voitures. On choisit un véhicule au hasard, et on note X le nombre de roues de ce véhicule. Loi de X, espérance, et variance.
4. Dans un magasin de matériel informatique, chaque boite de CD a la probabilité $\frac{49}{1000}$ de contenir au moins un CD défectueux et ce indépendamment des autres boites. Régulièrement, un client achète n boites de CD. S'il constate qu'un CD est défectueux, il rapporte toute la boite au magasin. Comment choisir n, pour qu'en moyenne, il ait au plus une boite à rapporter ?

Exercice 14.14 Pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, déterminer et reconnaitre la loi de $Y = n - X$ **F**

Exercice 14.15 Pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, calculer $E\left(2^X\right)$ et $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$. **F**

Exercice 14.16 Les résultats de la VAR $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ sont affichés par un compteur détraqué : **F**
1. lorsque $X \neq 0$, le compteur affiche la bonne valeur
2. sinon, il affiche un nombre au hasard entre 1 et n

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur
1. Déterminer la loi de Y
2. Montrer que $E(Y) \geqslant E(X)$. Aurait-on pu deviner ce résultat ?

Exercice 14.17 Une puce se déplace sur un axe : initialement à l'origine, elle se déplace d'une unité sur la droite avec probabilité $p \in]0,1[$, ou de deux unités sur la droite avec probabilité $1-p$. On note X_n sa position après n sauts, et Y_n le nombre de sauts d'une unité parmi ces n sauts. **F**
1. Déterminer la loi de Y_n puis trouver une relation entre X_n et Y_n.
2. Donner sans calcul l'espérance et la variance de X_n. bonus : trouver la loi de X_n.

Exercice 14.18 M demande F en mariage. Sa réponse est transmise à I_1, qui la transmet à I_2 (en la niant pour blaguer avec une probabilité $p \in]0,1[$), qui la transmet de même à I_3 et ainsi de suite jusqu'à I_n qui la transmet à M. Blaguer se fait indépendamment des uns des autres. **F**
1. Calcul préliminaire : déterminer $\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. On introduit la variable aléatoire X_n qui compte le nombre de messages contraires. Déterminer la loi de X_n . En déduire la probabilité p_n que la réponse transmise à B soit la bonne.
3. Déterminer la limite de (p_n)

Exercice 14.19 Soit X une VAR telle que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Montrer que **F**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$$

Partir de $E(X)$ et exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k)$ et $P(X > k-1)$

15. Applications linéaires

linéaire

Exercice 15.1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ? **F**

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,x+z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2xyy,x-y) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+3y \end{array}$$

linéaire Ker Im injection surjection

Exercice 15.2 Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer une base de leur noyau et de leur image. Préciser si elles sont injectives, surjectives ou bijectives **F** rang

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z,y+z,x+2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y-z,y-2z) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,0) \end{array}$$

linéaire $f(x)$ antécédent injection surjection Ker Im

Exercice 15.3 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$, $(-7,4,1)$. **F** rang

1. Pour $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, déterminer $f(v)$
2. Donner les antécédents par f de $u=(-1,-1,8)$ et de $v=(-2,1,3)$. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de f

existence

Exercice 15.4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'il existe un unique $a\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $f(x)=ax$ pour $x\in\mathbb{R}$. **F** analyse-synthèse

linéaire

Exercice 15.5 Soit $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $g(1,1,1)=(0,1,1)$, $g(1,2,3)=(1,1,1)$ et $g(0,1,1)=(1,2,3)$. **F**

1. Montrer que la famille $\big((1,1,1),(1,2,3),(0,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^{\,3}$ et déterminer les coordonnées de $x=(x,y,z)$ dans cette base
2. Justifier que g est uniquement définie par les données de l'exercice.
3. g est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

linéaire

Exercice 15.6 On pose $M=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ et $f(A)=AM-MA$ pour $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **F**

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que A est inversible. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.
3. On suppose que f est surjective. Montrer que A est inversible

linéaire

Exercice 15.7 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f(M)=AM$ pour $A\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **F**

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que A est inversible. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.
3. On suppose que f est surjective. Montrer que A est inversible

linéaire

Exercice 15.8 A une suite $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est associée la suite U vérifiant $U_n=u_{n+1}-2u_n$ pour $n\geqslant 0$ **F**

1. a. Déterminer la suite U associée à la suite u donnée par $u_n=n$ pour $n\geqslant 0$
   b. Déterminer la suite U associée à la suite u donnée par $u_n=3\times 2^n+1$ pour $n\geqslant 0$
2. Montrer que l'application $f:u\mapsto U$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le noyau de f. On en précisera une base.
4. Montrer que f est surjectif

linéaire

Exercice 15.9 A une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, on associe l'application $T(f):x\mapsto f(x+1)-f(x)$ **F**

1. Déterminer l'application $T(f)$ associée à la fonction f donnée par $f(x)=ax+b$ pour $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que $T:f\mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
3. Déterminer le noyau de T. On en précisera une base
4. Montrer que T est bijectif

linéaire **Exercice 15.10** soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **F**

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa réciproque f^{-1}
2. Donner l'expression de $f \circ f$.

linéaire **Exercice 15.11** soient E, F, G, trois $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires **F** MARRE

1. Montrer que $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$
2. Monter que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$

linéaire **Exercice 15.12** **Extrait d'EML S 2014.** A chaque application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on associe une application $T(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant **F**

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue et que

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right)$$

2. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
3. Est-ce-que T est surjectif ?
4. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est paire, montrer que $T(f)$ est paire.
5. Calculer $T(s)$ pour l'appllication $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $s(x) = \sin(\pi x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   L'application T est-elle bijective ?

15.1 Matrices d'application linéaire

$\mathcal{M}at(f)$ **Exercice 15.1.13** Donner les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques des espaces concernés **F**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y, x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y, z+t) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (x,2x,x) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2x-z \end{array}$$

$\mathcal{M}at(f)$ **Exercice 15.1.14** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire, définie par $f(x,y) = (4x-6y, x-y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **FM**

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2. Idem avec la base $\big((1,1),(1,-1)\big)$ au départ et la base canonique à l'arrivée
3. Idem avec la base canonique au départ et la base $\big((1,1),(1,-1)\big)$ à l'arrivée
4. Idem avec la base $\big((2,1),(3,1)\big)$ au départ et à l'arrivée

$f(x)$ Ker Im base $\mathcal{M}at(f)$ **Exercice 15.1.15** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **M**

1. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$ de deux façons différentes
2. Déterminer le noyau de f de deux façons différentes puis l'image de f. La première question était-elle nécessaire ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

endo $\mathcal{M}at(f)$ Ker Im **Exercice 15.1.16** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM - MA$ **FM**

1. Montrer que $f : M \mapsto f(M)$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Déterminer la matrice B de f dans la mase canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. En déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Ker
Im

Exercice 15.1.17 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **FM**

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à M.
2. Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer le noyau et l'image de l'application $g \in \mathcal{L}(E)$ dont M est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.
3. mêmes questions avec $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

endo
$\mathcal{M}at(f)$
auto
Ker
Im

Exercice 15.1.18 Soit $n \geqslant 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$. **FM** rang

1. Vérifier que $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Φ est-elle un automorphisme ? Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

existence
base
$\mathcal{M}at(f)$
nilpotence

Exercice 15.1.19 Soit E un EV de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. **M** MARRE

1. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$ soit une base de E
2. Ecrire la matrice de f dans cette base
3. Généraliser ce résultat lorsque E admet une base $(e_1, \ldots, e_n)$ avec $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

$\mathcal{M}at(f)$
base
coordonnées
f^n

Exercice 15.1.20 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cannoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **FM** matrice (\) A^n

1. soient $\vec{i} = (-2,1,0)$, $\vec{j} = (-1,1,-1)$ et $\vec{k} = (0,0,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées d'unvecteur $\vec{v} = (a,b,c)$ quelconque dans cette base.
2. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{B}$. Que remarquez-vous ?
3. Donner la matrice de f^n dans cette base $\mathcal{B}$. En déduire l'expression de f^n pour $n \geqslant 1$.

$E = F \oplus G$
base
projecteur
$\mathcal{M}at(f)$

Exercice 15.1.21 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1,3,0)\big)$ **M**

1. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et préciser une base adaptée à cette somme directe.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Donner la matrice de p dans cette base.
3. Déterminer l'expression de p, puis donner la matrice de p dans la base canonique.

linéaire

Exercice 15.1.22 **ESCP E 96 adapté.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. **F**
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note Φ_a l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\Phi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \qquad \Phi_a(\vec{j}) = -\vec{i} + (a-3)\vec{j} + (a-1)\vec{j} \quad \text{ et } \quad \Phi_a(\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + a\vec{k}$$

1. Ecrire la matrice de Φ_a dans la base $\mathcal{B}$
2. Montrer que Φ_0 est un automorphisme et déterminer la matrice de sa réciproque dans $\mathcal{B}$.
3. a. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Φ_a est un automorphisme.
   b. Pour chaque valeur de a, déterminer le noyau de Φ_a.
   c. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ appartient à l'image de Φ_a
4. Montrer que les vecteurs $\vec{I} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{J} = 2\vec{i} + 4\vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{k}$ forment une base de E et déterminer la matrice de Φ_1 dans cette base.

16. Intégration (sur un segment)

$\int$ **Exercice 16.1** Calculer les intégrales

F — $\int x^\alpha \mathrm{d}x$, $u = x+a$, $u = ax+b$, $u'f(u)$

$$A = \int_0^1 2x^5 \mathrm{d}x \qquad B = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad C = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \qquad D = \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$$
$$E = \int_0^1 \sqrt{x+1}\mathrm{d}x \qquad F = \int_1^2 (2x+3)^7 \mathrm{d}x \qquad G = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \qquad H = \int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$\int$ **Exercice 16.2** Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence

FM — $u'f(u)$, $\int x^\alpha \mathrm{d}x$, $+1-1$, Chasles

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x, \qquad J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x,$$
$$L = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}, \qquad M = \int_1^4 \sqrt{x}\left(x - 2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x, \qquad N = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x+1},$$
$$P = \int_{-1}^1 \left|x^2 - x\right|\mathrm{d}x, \qquad Q = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad R = \int_0^1 \max\left(x, \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x$$

primitive **Exercice 16.3** Déterminer les primitives sur les intervalles où elles existent pour

FM — $+1-1$, ipp, $u = ax+b$, élément simple

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad g(x) = x\sqrt{3-x}, \qquad h(x) = \frac{3}{x(x-1)}$$

$\int$ cdv **Exercice 16.4** Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué

M — élément simple, $+1-1$

$$I = \int_0^{10} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+2)(x^2+1)} \quad \text{cdv } y = x^2 \qquad J = \int_0^{10} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \quad \text{cdv } y = \mathrm{e}^x$$
$$K = \int_{\frac{1}{2}}^2 \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \quad \text{cdv } y = \tfrac{1}{x} \qquad L = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} \quad \text{cdv } y = \tfrac{x}{x+1}$$
$$M = \int_0^1 \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x \quad \text{cdv } y = 1+\mathrm{e}^x \qquad N = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x \quad \text{cdv } y = \cos(x)$$

$\int$ **Exercice 16.5** Calculer les intégrales suivantes

M — ipp, cdv, double ipp

$$I = \int_1^2 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{-2} x^2\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x, \qquad K = \int_1^9 x^3\ln(x)\mathrm{d}x, \qquad L = \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\mathrm{d}x,$$
$$M = \int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x, \qquad N = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x, \qquad P = \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^x\cos(4x)\mathrm{d}x$$

positivité : $\int$ **Exercice 16.6** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)^3\mathrm{d}x \geqslant 0$. Comment montrer l'inégalité stricte ?

M — $\int$ nulle

$\int$ inégalité : $\int$ diverger $+\infty$ **Exercice 16.7**

M — somme télescopique

1. Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$
2. Pour $k \geqslant 2$, montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \leqslant \frac{1}{k\ln k}$
3. Montrer que l'on définit une suite S divergeant vers $+\infty$ en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k}$ pour $n \geqslant 2$.

$\int$ encadrer limite **Exercice 16.8** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$ vérifie $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

FM — inégalité : $\int$, gendarmes

somme
$\int$
$|\int|$
limite

Exercice 16.9

M
somme géométrique
gendarmes

1. Montrer que $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-x)^n}{1+x}$ pour $n \geqslant 1$ et $x \neq 1$;
2. Pour $n \geqslant 1$, en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2 - u_n$ pour $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
3. Montrer alors que $\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

monotonie
inégalité : $\int$
relation
limite

Exercice 16.10

M
$u_{n+1} - u_n$
gendarmes
ipp

1. Déterminer la monotonie de la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$.
2. Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 0$. En déduire la limite de (I_n).
3. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ vérifie $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}I_{n+2}$
4. En déduire la limite de J_n puis celle de nJ_n.

$\int$
inégalité : $\int$
limite
relation

Exercice 16.11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

M

1. Calculer I_0 et I_1
2. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$ En déduire la limite de (I_n)
3. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$
4. Pour $n \geqslant 0$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Montrer que $I_n = \mathrm{e} - S_n$ puis déterminer la limite de (S_n).

élément simple
$\int$
relation
décroissant
encadrer

Exercice 16.12 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \mathrm{d}x}{1-x^2}$

M
$\int x^\alpha \mathrm{d}x$
gendarmes

1.
   a. Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. En déduire u_0
   b. Calculer u_1
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. En déduire u_2 et u_3.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante
4. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{2(n+1)2^{n+1}}$. Conclusion ?

$\int$
décroissant
convergence
relation
u_n

Exercice 16.13 *Intégrales de Wallis.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \mathrm{d}x$.

MD
minorer
récurrence faible

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
4. Pour $n \geqslant 0$, montrer qlors que $W_n = \dfrac{(2,)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
5. Montrer que la suite définie par $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ pour $n \geqslant 0$ est constante. Déterminer sa valeur.
6. En déduire l'expression de W_{2n+1} pour $n \geqslant 0$

limite
$\int$

Exercice 16.14

MD
borné
inégalité : $\int$
gendarmes
ipp

1. Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$.
2. Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$.

fonction : $\int$
définition
signe
parité
$\mathcal{C}^1$
eau de variation

Exercice 16.15 Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$

FM
$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F et préciser son signe.
2. Etudier la parité de F
3. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, dresser son tableau de variations et retrouver son signe.

fonction : $\int$ — définition — impair — signe — $\mathcal{C}^1$ — dérivée — eau de variation

Exercice 16.16 **Escp E 89.** On pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

M — inégalité : $\int$ — $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

1. a. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$
   b. Montrer que g est une fonction impaire
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
2. a. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
   c. Pour $x > 0$, montrer que $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$. En déduire les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

fonction : $\int$ — continuité

Exercice 16.17 Montrer que la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur. *Proposer* 3 *méthodes*

M — $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ — DL[1]

minorer — $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 16.18

FM — tableau de variation ou cas

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer alors que $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

fonction : $\int$ — définition — signe — $\mathcal{C}^1$ — dérivée — variations — encadrer — limite

Exercice 16.19

MD — $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t$
2. Trouver le signe de f selon x
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}$ pour $x > 0$
4. En déduire les variations de f
5. Pour $x > 0$, montrer que $\mathrm{e}^{-x^4}\ln x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\ln x$. *On séparera les cas $x < 1$ et $x \geqslant 1$.*
6. En déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$.

fonction : $\int$ — définition — décroissant — limite — $\mathcal{C}^1$ — dérivée

Exercice 16.20

MD — cdv — $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\mathrm{d}t$
2. Montrer que F est décroissante sur $]0,+\infty[$
3. Etudier la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty$ et que $F'(x) + F(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

fonction : $\int$ — eau de variation — existence — unicité — variations — dérivabilité

Exercice 16.21

M — $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ — bijection — f^{-1}

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int_0^{g(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Etudier les variations de g ainsi que sa dérivabilité.

existence

Exercice 16.22 Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, établir l'existence de $c \in [0,1]$ vérifiant $f(c) = c$.

M — Rolle

linéaire

Exercice 16.23 **Extrait d'EML S 2014.** A chaque application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on associe une application $T(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

F

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue et que

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right)$$

2. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
3. Est-ce-que T est surjectif ?
4. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est paire, montrer que $T(f)$ est paire.
5. Calculer $T(s)$ pour l'appllication $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $s(x) = \sin(\pi x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. L'application T est-elle bijective ?

16.1 Intégrales à un paramètre

Exercice 16.1.24 On pose $F(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t} \mathrm{d}t$ **F**

1. Déterminer l'ensemble de définition de F et préciser le signe de F sur
2. Justifier que F est dérivable sur et dresser son tableau de variations.
3. Calculer la limite de F en 0
4. Etudier le signe de $F(x) - \ln x$ pour $x \geqslant 1$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Exercice 16.1.25 On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$ **F**

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est impaire
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$. Qu'en est-il en 0 ?

Exercice 16.1.26 On pose $g(x) = \int_0^x \sqrt{x^2 + t^2} \mathrm{d}t$ **F**

1. Pourquoi les méthodes des exercices **16.1.24** et **16.1.25** ne s'appliquent-elles plus ici pour trouver le tableau de variation de g ?
2. Déterminer l'ensemble de définition de g
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer, à l'aide d'un changement de variable, que $g(x) = cx|x|$ avec $c = \int_0^1 \sqrt{1 + y^2} \mathrm{d}y$
4. En déduire que g est continue puis dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variations complet de g.

16.2 Sommes de Riemann

convergence
limite

Exercice 16.2.27 Etablir la convergence des suites suivantes et déterminer leur limite **M**

somme de Riemann

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}, \qquad w_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 16.2.28 Soit $k \geqslant 2$ un entier. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par **D**

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$$

Exercice 16.2.29 Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par **M**

$$\forall n \geqslant 1, \qquad v_n := \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1} \right)$$

17. Nombres complexes

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.1** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants. **F**

$$a = (3+2i)(-1-i) \qquad b = \frac{5-i}{2+3i} \qquad c = \frac{7+i}{1-i} + \frac{7-i}{1+i} \qquad d = (5+3i)^2 \qquad e = i^{2020}$$

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.2** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$. Donner la forme exponentielle des nombres complexes **F**

$$1+i\sqrt{3} \qquad (1+i)^n \quad c = 1 - \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} \qquad \frac{2}{1+i} \qquad (1+i\sqrt{3})^n \qquad 1+\mathrm{e}^{i\vartheta} \qquad 1-\mathrm{e}^{i\vartheta}$$

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.3** Calculer $\dfrac{1+i}{1-i}$, $(\sqrt{3}+i)^5$, $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$ et $\dfrac{1+i\tan(x)}{1-i\tan(x)}$ pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. **F**

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.4** Résoudre les équations complexes d'inconnue z suivantes **F**

$$a) \quad z + \frac{9}{z} \in \mathbb{R} \qquad b) \quad \left|\frac{z-2}{iz+3}\right| = 1 \qquad c) \quad |z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$$

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.5** Résoudre les équations complexes d'inconnue z suivantes **F**

$$a) \quad z^4 = i \qquad b) \quad z^3 = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} \qquad c) \quad z^7 = \frac{1+i}{2} \qquad d) \quad z^n = 1 - i\sqrt{3} \qquad e) \quad z^n = \bar{z}$$

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.6** **F** **angle moitié**

1. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{ix} = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$
3. Trouver la forme algébrique de E_n
4. Donner les expressions factorisés de $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.7** **F**

1. Ecrire la forme algébrique de $(\mathrm{e}^{ib}+1)^n$ pour $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(a+kb)}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.8** Simplifier $(1+j)^5$ et $\dfrac{1}{(1+j)^4}$ ou $j = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ **F** **linéarisation**

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.9** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ pour $n \geqslant 1$ **F** **linéarisation**

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.10** Ecrire $\sin(x)^3 \times \cos(c)$ en donction de $\sin(4x)$ et $\sin(2x)$ **F** **linéarisation**

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.11** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = 1 + i\sqrt{3}$ **F** **linéarisation**

$\mathbb{C}$ **Exercice 17.12** Ecrire $\cos(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$. De même, écrire $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\sin(x)$. **F** **linéarisation**

18. Polynômes

analyse-synthèse

Exercice 18.1 Pour $n \geqslant 2$, déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes F

$$P = (X+1)^{2n} - X^{2n-1}(X+2n) \qquad Q = \prod_{k=0}^{n}(2X-k) \qquad R = (X+3)^n - (X+2)^n$$

Exercice 18.2 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $2P = XP'$ F

analyse-synthèse **Exercice 18.3** Le but est de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant F

$$(*) \quad P(X^2) = (X^2+1)P.$$

1. Quelques exemples :
   a. Le polynôme $P = X^3 + X + 1$ est-il solution ?
   b. Le polynôme nul est-il solution ?
   c. Montrer qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution
2. Analyse du problème : soit $P \neq 0$ un polynôme vérifiant $(*)$
   a. En posant $n = \deg(P)$ déterminer la seule valeur de n possible
   b. En déduire alors tous les candidats
3. Synthèse du problème : déterminer toutes les solutions.

division euclidienne **Exercice 18.4** Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$ F

$$X^3+1 \text{ par } X^2+X+1 \qquad 4X^4+X^3-2X^2-5 \text{ par } 2X^2+X+1$$

reste euclidien **Exercice 18.5** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de FM

$$X^n \text{ par } X^2-3X+2 \qquad X^n \text{ par } (X-1)^2$$
$$(X-1)^n + (X+1)^n - 1 \text{ par } X^2-1 \qquad X^{2n}+2X^n+1 \text{ par } X^2+1$$

dérivée somme **Exercice 18.6** Calculer de deux manières la dérivée du polynôme $P = (X+1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ FM $(a+b)^n$

simplifier **Exercice 18.7** Sans développer, montrer que le polynôme $P = (X-3)^2 - 2(X-2)^2 + (X-1)^2 - 2$ est le polynôme nul F racines

constant **Exercice 18.8** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant. *Poser* $Q = P - P(0)$ *et montrer que* $Q = 0$ M analyse-synthèse récurrence faible

Exercice 18.9 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^2 P = 0$. FM racines base contre-exemple

1. Montrer que $P = 0$ de deux façons différentes
2. Ce résultat reste-t-il vrai pour les fonctions ?

Exercice 18.10 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $P = 0$ et $Q = 0$. F

Exercice 18.11 F

1. Montrer que -1 est racine triple de $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Préciser l'ordre de multiplicité de la racine 1 pour

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1 \qquad Q = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$$

résoudre **Exercice 18.12** Déterminer l'unique polynôme P à coefficients réels vérifiant les propriétés : F analyse-synthèse

- Le degré de P est 5
- Son coefficient dominant est 3

- 1 est racine double de P
- 2 et $3+2i$ sont racines simples de P

Exercice 18.13 **F**

1. Montrer que X^2+2X-3 divise X^3+X^2-5X+3 dans $\mathbb{R}[X]$. Proposer 3 méthodes. Quelle est la plus simple ?
2. Même question avec X^2-3X+2 et $X^4-4X^3+6X^2-5X+2$
3. Même question avec $(X-1)^2$ et $2X^3-X^2-4X+3$.

Exercice 18.14 **F**

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4+3X^3-14X^2+22X-12$ sachant que $i+1$ en est racine.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme X^4+1.

coeff-racine **Exercice 18.15** Soient a et b deux nombres complexes. On pose **F**

$$P=(X-a)(X-b)=X^2-sX+p.$$

1. Déterminer s et p en fonction de a et b (relation coefficients-racines)
2. Prouver que les solutions du système $\begin{cases} x+y &= s \\ x\times y &= p \end{cases}$ sont les couples de racines de P
3. Résoudre le système $\begin{cases} x+y &= -1 \\ x\times y &= -6 \end{cases}$

Exercice 18.16 Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_1=1+X$ et **F**

$$P_n=1+\frac{X}{1!}+\frac{X(X+1)}{2!}+\ldots+\frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!} \qquad (n\geqslant 2)$$

1. A l'aide de la définition, écrire les polynômes P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n
3. Factoriser les polynôme P_3 et P_3.
4. Pour $n\geqslant 1$, montrer que $P_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+k)$

Exercice 18.17 *Polynômes de Tchebycheff.* Soit (P_n) la suite de polynômes définis par **F**

$$P_0=1, \qquad P_1=X \quad \text{et} \quad P_{n+2}=2XP_{n+1}-P_n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Pour $n\geqslant 1$, déterminer le coefficient dominant de P_n et son degré. Qu'en est-il pour $n=0$?
3. Etudier la parité de P_n
4. a. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$
   b. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, montrer alors que $P_n(\cos x)=\cos(nx)$
   c. En déduire les racines de P_n ainsi que sa forme factorisée

Exercice 18.18 *Polynômes d'interpolation de Lagrange.* **F** analyse-synthèse

1. Déterminer l'unique polynôme de degré 3 tel que $P(1)=0$, $P(2)=0$, $P(3)=0$ et $P(4)=1$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n+1$ nombres réels distincts deux à deux a_0, ..., a_n.
   a. Déterminer l'unique polynôme de degré n, noté L_0 vérifiant
   $$L_0(a_0)=1 \qquad \text{et} \qquad L_0(a_k)=0 \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$
   b. Plus généralement, determiner l'unique polynôme de degré n, noté L_k, vérifiant
   $$L_k(a_k)=1 \qquad \text{et} \qquad L_k(a_j)=0 \qquad (j\neq k)$$
   c. soient $n+1$ nombres réels $b_0,\ldots,b_n$. Montrer que l'unique polynôme P de degré inférieur à n vérifiant $P(a_k)=b_k$ pour $0\leqslant k\leqslant n$ est le polynôme
   $$P=\sum_{k=0}^{n}b_kL_k$$

Exercice 18.19 F

1. Pout $P \in \mathbb{R}[X]$ déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction de celui de P
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^2$.
3. En déduire l'expressionde $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

18.1 Espaces vectoriels et polynômes

espace vectoriel

Exercice 18.1.20 Montrer que les deux ensembles suivants sont des espaces vectoriels

F
sous-espace

$$F_1 = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P(1) = P(2) = 0\right\}$$

espace vectoriel

Exercice 18.1.21 Quel est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ contenant $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = 3\}$?

F
Vect

endance linéaire
Vect

Exercice 18.1.22 Dans $\mathbb{R}[X]$, le vecteur $P = 3X^3 - 2X^2 - 4X$ est il combinaison linéaire des vecteurs $Q = 1$, $R = (X+1)^2$ et $S = X^3$? Plus généralement, décrire $\text{Vect}(Q,R,S)$.

F
base

endance linéaire

Exercice 18.1.23 Dans $\mathbb{R}[X]$, les familles suivantes sont-elles libres ?

FM
rang

1. $\mathcal{F}_1 = \left(3X, X^2 - 1, X^3\right)$
2. $\mathcal{F}_2 = \left(X+1, X-1\right)$
3. $\mathcal{F}_3 = \left(X^2 - 1, 21X^2 + 1, X^2 + X\right)$

espace vectoriel
base

Exercice 18.1.24 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

F
Vect

$$E_1 = \{bX^2 + aX - a : (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \qquad E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P'(0)\}$$
$$E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \qquad E_4 = \text{Vect}(2X+1, X+3, 4X+7)$$

continuité

Exercice 18.1.25 Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

F
valeur intermédiaire
limite

base
coordonnées

Exercice 18.1.26 Montrer que $\mathcal{B} = \left(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et décomposer le vecteur $P = 1 + X + X^2 + X^3$ dans cette base.

F
échelonné en degré

linéaire
Im
Ker

Exercice 18.1.27 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $f(P) = \left(P(0), P'(0), P''(0)\right)$.

F

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ est linéaire
2. Déterminer une base de l'image de f. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer une base du noyau de f

linéaire

Exercice 18.1.28 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $f(P) = 2P - XP'$

F

1. Montrer que f est linéaire
2. Déterminer le noyau de f. est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de f. est-elle surjective ?
4. Mêmes questions avec $\mathbb{R}_n[X]$ à la place de $\mathbb{R}_3[X]$.

linéaire

Exercice 18.1.29 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ linéaire avec $f(1,0,0) = (X+1)^2$, $f(0,1,0) = X^2 + 1$ et $f(0,0,1) = X^2$

F

1. Montrer que la famille $\left((X+1)^2, X^2+1, X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Qu'en déduit-on à propos de f ? Préciser alors le noyau et l'image de f.

linéaire

Exercice 18.1.30 Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$

F

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base du noyau de f, puis une base de l'image de f.
3. Mêmes questions avec $\mathbb{R}_n[X]$ remplaçant $\mathbb{R}_2[X]$.

linéaire **Exercice 18.1.31** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$ **F**

1. Vérifier que $f : P \mapsto f(p)$ et $g : P \mapsto g(P)$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que $g \circ f - f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$
3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $g \circ f^n - f^n \circ g = nf^{n-1}$

linéaire **Exercice 18.1.32** Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = P - P'$ **F**

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer $\Phi(X^k)$
3. Déterminer une base de l'image de Φ
4. Déterminer le noyau de Φ

linéaire **Exercice 18.1.33** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Phi(P) = (X^2 - 1)P$ et $u(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$ **F**

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \Phi(P) \end{array}$ et $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+2}[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & u(P) \end{array}$ sont linéaires
2. Montrer que Φ est injective
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}(u)$
4. Montrer que u est surjective

endo $\mathcal{M}at(f)$ auto **Exercice 18.1.34** Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = XP'$ **FM** rang

1. Vérifier que $f : P \mapsto f(P)$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puis écrire sa matrice dans la base canonique.
2. f est-elle un automorphisme ? Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ puis $\mathrm{Ker}\, f$.

endo $\mathcal{M}at(f)$ **Exercice 18.1.35** Soit $n \geqslant 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = ((X^2 - 1)P)''$ **FM** matrice

1. Vérifier que $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\Phi(1) = 2$ et $\Phi(X) = 6X$.
3. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Qu'en déduit-on sur Φ ?

linéaire f^{-1} **Exercice 18.1.36** Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = \big(P(0), P'(0), P(1)\big)$ **FM** $\mathcal{M}at(f)$ A^{-1}

1. Montrer que $f : P \mapsto f(P)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, à l'aide de la représentation matricielle, une expression de f^{-1}. Comment aurait-on pu faire sinon ?

18.2 DM

compatibilité système linéaire **Exercice 18.2.37** Discuter et résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes **F**

$$a) \begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

19. Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 19.1 Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension de $F = \text{Vect}\big((1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\big)$ F

Exercice 19.2 Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, déterminer la dimension de $F = \text{Vect}\big(x \mapsto \mathrm{e}^{2x}, x \mapsto x^2\mathrm{e}^{2x}\big)$ F

Exercice 19.3 F

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
2. Même question avec l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3. Même question avec l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 19.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $F_\alpha = \{x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\mathrm{e}^{-\alpha x} : (P,Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2\}$ est un espace vectoriel de dimension finie. En déterminere une base et la dimension F

Exercice 19.5 Montrer que $\big(X^k(X-1)^{n-k}\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. F

Exercice 19.6 F

1. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer la dimension
2. Plus généralement, montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(1) = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer la dimension

existence base

Exercice 19.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ M MARRE

1. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$
2. Vérifier alors que la famille $\big(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ est une base de E

Exercice 19.8 On pose $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(0) = P(4) = 0\}$ et $Q = X(X-4)$ F

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$
2. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $f(P) = PQ$
   a. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, montrer que $f(P) \in E$
   b. Montrer que $f : P \mapsto f(P)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E
3. En déduire (sans calculs) une base de E ainsi que sa dimension.
4. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$
   a. Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto \Delta(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
   b. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P
   c. Déterminer le noyau et l'image de Δ
   d. Etablir que $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$

Exercice 19.9 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1,0,-1)$, $v = (-1,2,1)$ et $w = (3,-4,-3)$. Déterminer le rang de la famille (u,v,w) ainsi qu'une base du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. F

Exercice 19.10 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y,z) = (x+y, y+2z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ F

1. Montrer que f est linéaire puis que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$
2. Vérifier que $(2,-2,1) \in \text{Ker}\, f$. En déduire $\text{Ker}\, f$

Exercice 19.11 Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (X^2-1)P'$ F

1. Justifier que $f : P \mapsto f(P)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f, son rang, ainsi qu'une base de l'image

Exercice 19.12 Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (X^2-1)P' - (1X+1)P$ F

1. Justifier que $f : P \mapsto f(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le rang de f. Qu'en déduit-on ?

Exercice 19.13 Polynômes de Lagrange. **F**

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $f(P) = \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$

1. Montrer que $f : P \mapsto f(P)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et en déterminer le noyau
2. Pour $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(i) = a_n$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$
3. Pour $0 \leqslant j \leqslant n$, on note L_j l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$L_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

4. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
5. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Exercice 19.14 Soit $n \geqslant 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = 2(X-1)P' + 3X^2P''$ **F**

1. Vérifier que $f : P \mapsto f(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ déterminer $f(X^k$
3. Déterminer une base de l'image de f
4. Déterminer une base dunoyau de f

Exercice 19.15 Soit $n \geqslant 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = nXP - X^2P'$ **F**

1. Vérifier que $f : P \mapsto f(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ déterminer $f(X^k$
3. Déterminer une base de l'image de f
4. Déterminer une base du noyau de f

Exercice 19.16 Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P - P'$. Montrer $f : P \mapsto f(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. **F**

Exercice 19.17 Indiquer le plus rapidement possible si les applications linéaires suivantes sont des isomorphismes. **F**

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(a,b) = a + (a-b)X + (a+b)X^2$
2. $f : \mathbb{R}3 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(a,b,c) = a + b + (a+b)X + (a+b+c)X^2$
3. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = \big(P(0), P'(0), P''(0)\big)$

Exercice 19.18 Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(X+1) - P(X)$ **F**

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$
3. En déduire le rang de f. Comment aurait-on pu faire sinon ?
4. pour $n \geqslant 1$, montrer que $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

Exercice 19.19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. **F**

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}(f^n)$ pour $n \geqslant 1$
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f^n) \subset \cdots \subset \operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ pour $n \geqslant 1$
3. En déduire que la suite des rangs $(\operatorname{rg}(f^n))_{n \geqslant 1}$ est constante à partir d'un certain rang. Qu'en est-il pour la suite des noyaux et des images ?

Exercice 19.20 Soient f et g deux endomorphismes de E de dimension finie. **F**

1. Montrer que $\operatorname{rg}(f \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f)$.
2. Comparer alors $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g)$ et $\dim \operatorname{Ker}(f)$

20. Espaces vectoriels : sommes et supplémentaires

$E = F + G$ **Exercice 20.1** soient $E = \text{Vect}\big((1,0,1),(-1,0,1)\big)$ et $F = \text{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$. Montrer que $E + F = \mathbb{R}^3$. La somme est-elle directe ? **F**

$E = F + G$ **Exercice 20.2** soient $E = \text{Vect}\big(X-1, X+2\big)$ et $F = \text{Vect}\big(X, X^2\big)$. Montrer que $E+F = \mathbb{R}_2[X]$. La somme est-elle directe ? **F**

$E + F$ **Exercice 20.3** Soients $\vec{u} = (1,0,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,-1,0)$, $\vec{w} = (1,1,1,1)$, et $\vec{s} = (0,0,1,0)$ et $\vec{t} = (1,1,0,-1)$. On pose $F = \text{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x},\vec{y})$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$? **F**

supplémentaire **Exercice 20.4** Déterminer un supplémentaire de $\text{Vect}\big((1,0,0),(1,2,3)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$. **F**

$E + F$ **Exercice 20.5** Montrer que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 4z = 0\}$ et $F = \text{Vect}\big((1,0,0)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On précisera une base adaptée à cette somme directe **F**

$E + F$ **Exercice 20.6** Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ est un espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, puis déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$. On précisera une base adaptée à cette somme directe. **F**

$E + F$ **Exercice 20.7** **F**

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^{\mathrm{t}}M = M\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^{\mathrm{t}}M = -M\}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Donner la décomposition de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette somme directe.

$E + F$ **Exercice 20.8** Pour $n \geqslant 2$, montrer que $E = \{(x1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $F = \{(\lambda,\cdots,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. **F**

$E + F$ **Exercice 20.9** **F**

1. Montrer que $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ impaire}\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Décomposer les fonctions $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$ dans cette somme directe.

$E + F$ **Exercice 20.10** *Généralisation à 3 espaces.* **F**
Soient $E = \text{Vect}\big((1,1,1),(-1,1,-1)\big)$, $F = \text{Vect}\big((1,3,1)\big)$ et $G = \text{Vect}\big((1,1,-1)\big)$.

1. Montrer que $E + F + G = \mathbb{R}^3$
2. Montrer que $E \cap F \cap G = \{0\}$. A t-on $E \oplus F \oplus G = \mathbb{R}^3$?

$E + F$ **Exercice 20.11** On pose $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$, $F = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$. Montrer que $E \oplus F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **F**

$E + F$ **Exercice 20.12** Soit $f\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x + 2y - z, x + z, y - z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **F**

1. Déterminer le noyau puis une base de l'image de f.
2. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Mêmes questions avec $f(x,y,z) = (x + y - 2z, x + 2y - 3z, x - y)$.

$E + F$ **Exercice 20.13** Soit $f\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x, y + z, y + z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **F**

1. Prouver que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

$E+F$ **Exercice 20.14** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que **F** MARRE

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \iff \begin{cases} \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2) \\ \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \end{cases}$$

$E+F$ **Exercice 20.15** Soit $n \geqslant 2$. Montrer que les ensembles suivants sont des hyperplans de $\mathbb{R}_n[X]$ **F**

$$H_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P'(1) = 0\} \qquad H_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$$

projecteur **Exercice 20.16** **F**

1. Montrer que $F = \operatorname{Vect}\big((1{,}0{,}0), (1{,}1{,}1)\big)$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1{,}2{,}0)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'expression du projecteur sur F parallèlement à G
3. Mêmes questions avec $F = \operatorname{Vect}\big((1{,}0{,}0), (1{,}1{,}0)\big)$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1{,}1{,}1)\big)$.

$E+F$ **Exercice 20.17** **F**

1. Montrer que la formule $f(x{,}y{,}z) = (x{,}y{,}0)$ définit un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera le support et la direction
2. Même question pour $f(x{,}y{,}z) = (x+z{,}y+z{,}0)$

$E+F$ **Exercice 20.18** Soient p et q deux projecteurs, vérifiant $p \circ q = q \circ p$, d'un espace vectoriel E **F**

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E
2. Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(q)$

$E+F$ **Exercice 20.19** **Escp E 99.** Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **F**

1. a. Calculer J^2. En déduire que J est inversible et déterminer J^{-1}
   b. Montrer que l'application $S : M \mapsto JMJ$ définit un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est son automorphisme réciproque ?
2. Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : S(M) = M\}$ et :$G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : S(M) = -M\}$
   a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose d'une manière unique sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in F$ et $M_- \in G$. Qu'en déduit-on ?
   c. Déterminer les matrices A_+ et A_-
3. a. Montrer que le produit de deux matrices de F appartient aussi à F. Que peut-on dire du produit de deux éléments de G ?
   b. Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_-

$E+F$ **Exercice 20.20** **Esc S 99.** Soit E un espace vectoriel, et u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0 \quad (*)$. **F** MARRE

On pose $v = u - \mathrm{Id}_E$ et $w = u - 2\mathrm{Id}_E$

1. Identifier $v - w$. En déduire que $E = \operatorname{Im}(v) + \operatorname{Im}(w)$.
2. Identifier $v \circ w$ et $w \circ v$. En déduire que $\operatorname{Im}(w) \subset \operatorname{Ker}(v)$ et $\Im(v) \subset \operatorname{Ker}(w)$.
3. Montrer alors que $E = \operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Ker}(w)$

$E+F$ **Exercice 20.21** **HEC E 93.** On note $F = \{f \in \mathcal{C}2(\mathbb{R}) : f'' - 3f' + 2f = 0\}$ et $F_0 = \{f \in F : f(0) = f'(0) = 0\}$. **F**

1. Montrer que F et F_0 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$
2. Montrer que $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $h : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ forment une famille libre d'éléments de F.
3. Soit f un élément de F.
   a. Montrer qu'il existe un unique couple $(a{,}b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - ag - bh$ soit dans F_0
   b. Montrer que les fonctions $j : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(f'(x) - 2f(x)\right)$ et $k : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}\left(f'(x) - f(x)\right)$ sont constantes
   c. Déduire du résultat précédent que si $f \in F_0$, alors $f = 0$
   d. Montrer que g, h est une base de F.
4. Montrer que l'on définit un isomorphisme $\Phi : F \to \mathbb{R}^2$ en posant $\Phi(f) = \big(f(0), f'(0)\big)$ pour $f \in F$.

21. Etude asymptotique des suites

équivalent

Exercice 21.1 Si possible, déterminer un équivalent puis une limite au point considéré des fonctions suivantes **F**

$$a(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+x} \text{ en } 0 \text{ et } +\infty \quad b(x)=\sin\frac{\pi}{x} \text{ en } +\infty \quad c(x)=\ln(x^2)-xs \text{ en } +\infty$$

$$d(x)=\frac{(x+1)^x-1}{x} \text{ en } 0 \quad e(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ en } 0 \quad f(x)=\sin(x)\ln(x) \text{ en } 0$$

$$g(x)=x\ln(1+x)-(x+1)\ln(x) \text{ en } +\infty \quad h(x)=\lfloor x\rfloor \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \text{ en } +\infty \quad i(x)=\frac{\ln\left(\cos(x)^2\right)}{x^2} \text{ en } 0$$

équivalent

Exercice 21.2 **F**

1. Déterminer un équivalent de $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$
2. Déterminer un équivalent de $v_n=(n+1)^p-n^p$ pour $p\geqslant 2$.
3. Déterminer un équivalent de $w_n=2n-\ln(n)$

suite implicite
équivalent

Exercice 21.3 **F**

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ montrer que l'équation $x+\ln(x)=n$ admet une unique solution $x_n\in]0,+\infty[$. Préciser x_1
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante
3. Pour $n\geqslant 1$, montrer que $n-\ln(n)\leqslant x_n\leqslant n$
4. Déterminer un équivalent simple de (x_n)

suite implicite
équivalent

Exercice 21.4 **F**

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ montrer que l'équation $x^5+nx-1=n$ admet une unique solution $x_n\in]0,+\infty[$.
2. Pour $n\geqslant 0$, montrer que $0<x_n<\frac{1}{n}$. qu'en déduit-on ?
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n)
4. Déterminer un équivalent simple de (u_n) définie par $u_n=\frac{1}{n}-x_n$ pour $n\geqslant 1$.

équivalent

Exercice 21.5 Pour $n\geqslant 1$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ **F**

1. Pour $n\geqslant 1$, montrer que $0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n+1}$. qu'en déduit-on ?
2. Pour $n\geqslant 1$, montrer que $I_n=\frac{1}{(n+1)e}+\frac{I_{n+1}}{n+1}$
3. Pour $n\geqslant 1$, en déduire que $0\leqslant I_n-\frac{1}{(n+1)e}\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
4. Déterminer un équivalent simple de I_n

développements limités

Exercice 21.6 Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes **F**

$$f(x)=\ln(1+x)\cos(x) \quad g(x)=\sin(2x) \quad h(x)=xe^{2x+1}$$

$$i(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad f(x)=\frac{e^x}{1+x} \quad f(x)=\operatorname{Arctan}(x)$$

développements limités

Exercice 21.7 En utilisant un développement limité à un ordre convenable, donner un équivalent simple en 0 de **F**

$$f(x)=e^x-\cos(x)-\sin(x) \qquad g(x)=\ln(1+x)-x \qquad h(x)=e^{x+1}-(1+x)^e-e+1$$

développements limités

Exercice 21.8 Déterminer les limites suivantes en 0 **F**

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \qquad \frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)} \qquad \frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2} \qquad \frac{e^x-1-\sin(x)}{\cos(x)-1} \qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} \qquad -\frac{1}{x^2}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}$$

développements limités

Exercice 21.9 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive vérifiant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=0$. Montrer que **F**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-a_n}=1$$

développements limités **Exercice 21.10** Pour f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, éterminer la limite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{x^2}$ F

développements limités **Exercice 21.11** **Inspiré d'EML 85.** On pose $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ F

1. Justifier que la fontion f est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

développements limités **Exercice 21.12** **EML 87 adapté.** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=\begin{cases}\frac{(1+x)^n\ln(1+x)}{x(2+x)} & \text{si } x\neq 0\\ \frac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$ F

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f_0
2. Préciser alors la position locale de la courbe de f_0 par rapport à sa tangente en 0.
3. Mêmes questions afec f_n pour $n\geqslant 1$.

développements limités **Exercice 21.13** A l'aide d'un DL, étudier le comportement au voisinage de 0, préciser la tangente éventuelle ainsi que la position par rapport à la tangente, pour F

$$f(x==\frac{1}{\sqrt{1+x}}\qquad\qquad g(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Exercice 21.14 Montrer que $\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\mathrm{e}^{k^2}\sim\mathrm{e}^{n^2}$. M

Exercice 21.15 a)Etablir une condition nécéssaire et suffisante sur deux suites u_n et v_n pour que $\mathrm{e}^{u_n}\sim\mathrm{e}^{v_n}$. F
b) trouver deux suites $u_n\nsim v_n$ telles que $\mathrm{e}^{u_n}\sim\mathrm{e}^{v_n}$ et deux suites $u'_n\sim v'_n$ telles que $\mathrm{e}^{u'_n}\nsim\mathrm{e}^{v'_n}$.

21.1 DM

Exercice 21.1.16 Pour $n\geqslant 1$, on pose

$$u_n=\frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$$

1. Démontrer que l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\qquad(n\geqslant 1).$$

2. Déterminer le sens de variation de la suite u.
3. Démontrer que l'on a

$$u_n\leqslant\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\qquad(n\geqslant 1).$$

4. En déduire que la liste u converge vers une limite ℓ strictement positive.
5. En admettant que $\ell=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, déterminer un équivalent lorsque $n\to+\infty$ du $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan défini par

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

22. Séries numériques

série **Exercice 22.1** Donner la nature et éventuellement la somme des séries de terme général **F** somme télescopique

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \qquad v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad w_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

série **Exercice 22.2** Déterminer la nature des séries suivantes **F**

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{2n^2}{n^3-1} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^2}{n^4} \qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{5}{4^n\ln n} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1\right)$$
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{nn^{\frac{1}{n}}} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{\pi}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n-\sin n}{n^3}$$

série **Exercice 22.3** Soit $x\in\mathbb{R}$. Justifier la convergence et calculer la somme des séries **F**

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(n-1)}{6^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+1}{4^n} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n n}{2^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n(n+1)}{5^n}$$
$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{nx^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 2}ne^{-n} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(n+2)!} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}$$

série **Exercice 22.4** Pour $k\in\mathbb{N}$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, justifier la convergence et calculer la somme des séries **F**

$$\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}\frac{a^k b^{n-k}}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}\frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+n+1}{n!}$$

série **Exercice 22.5** **MD**

1. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ monter que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ converge et donner sa somme
2. Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{4^n}{(2n)!}$

série **Exercice 22.6** Soit u la suite définie par la donnée de $u_0\in]0,1[$ et par la relation $u_{n+1}=u_n-u_n^2$ pour $n\geqslant 0$. **F**

1. Pour $n\geqslant 0$, montrer que $0_Leu_n<1$. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite
2. Montrer que ls série $\sum_{n\geqslant 0}u_n^2$ converge et dalculer s asomme en fonction de u_0.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}({}_l n(u_n)-\ln(u_{n+1}))$?
4. Déterminer un équivalent de $\ln(u_n)-\ln(u_{n+1}$. En déduire la nature de la série ${}_{n\geqslant 0}u_n$

série **Exercice 22.7** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. **F**

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes
2. Que peut-on en déduire sur la série de terme général $(-1)^n a_n$?
3.
   a. Etudier la nature de la série $\sum\frac{(-1)^n}{\ln n}$

   b. Etudier la nature de la série $\sum\frac{1+n(-1)^n}{n^2}$

série **Exercice 22.8** **F** $\sum\leqslant\int$

1. Pour $k \geqslant 2$, montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \leqslant \frac{1}{k \ln k}$.
2. Pour $n \geqslant 2$, en déduire que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geqslant \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln 2)$
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$

série **Exercice 22.9** F

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$
2. On introduit $E = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geqslant 0} a_n^2 \text{ converge}\right\}$
   a. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{\sqrt{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E
   b. Pour $(a,b) \in E^2$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge absolument
   c. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles

série **Exercice 22.10** Dans tout l'exercice, x désigne un nombre réel de $[0,1[$. F

1. a. Pour $t \in [0,x]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} t^k - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^n}{1-t}$
   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left|\displaystyle\int_0^x -\frac{t^n \mathrm{d}t}{1-t}\right| \leqslant \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{n+1}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \ln(1-x)\right| \leqslant \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{n+1}$
3. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et déterminer sa somme.

série **Exercice 22.11** **Inspiré d'Edhec S 2006.** Soit u la suite définie par $u_1 = 1_F2$ et par $u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$ pour $n \geqslant 0$. F

1. Montrer que la suite u converge
2. a. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$
   b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ et préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)$.
3. En déduire la limite de $\ln(u_n)$ puis celle de u_n quand n tends vers $+\infty$.
4. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2N}{n}}$ puis en déduire que $\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right)$

série **Exercice 22.12** **Esc S 2007.** Pour $n \geqslant 1$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$ F

1. Montrer que la suite (J_n) est décroissante et converge. On note ℓ sa limite
2. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\dfrac{J_n}{3n} = \dfrac{1}{3n2^n} + (J_n - J_{n+1})$
3. Le but de cette question est d'établir que $\ell = 0$
   a. Montrer que les séries de terme général $J_n - J_{n+1}$ et $\frac{1}{3n2^n}$ sont convergentes
   b. On suppose que $\ell \neq 0$. Donner un équivalent de $\frac{J_n}{3n}$. Quelle est alors la nature de la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$?
   c. Conclure

série **Exercice 22.13** **inspiré d'Edhec S 2013.** Montrons dans deux cas particuliers que si $a_n > 0$ pour $n \geqslant 1$ avec convergence de $\sum \frac{1}{a_n}$, alors la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge et vérifie F

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = n(n+1)$.
   a. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme
   b. Pour $n \geqslant 1$, déterminer u_n en fonction de n

c. Etablir la convergence de la série de terme général u_n, donner sa somme, puis l'inégalité demandée.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = n!$.

2. a. Ecrire une fonction scilab dont l'en-tête est **function y=fact(n)** et qui renvoie n!. En déduire un script scilab qui calcule et affiche u_n lorsque n est un entier entré par l'utilisateur.
   b. Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$
   c. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$
   d. En déduire la convergence de la série de terme général u_n, puis l'égalité demandée

série **Exercice 22.14** Soit u la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n}$ pour $n \geqslant 1$ **F**

1. Pour $n \geqslant 1$, montrer que u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$
   a. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$
   b. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$
   c. En déduire que la suite u converge vers un réel ℓ, que l'on ne déterminera pas.
3. a. Pour $k \geqslant 2$, montrer que $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$
   b. Pour $2 \leqslant p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire que

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

   c. Pour $n \geqslant 3$, en déduire que $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$. Montrer alors que $\ell \in [2{,}3]$.
   d. Pour $p \geqslant 2$, montrer que $0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$
   e. En déduire une fonction Scilab qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

série **Exercice 22.15** Etudier la nature des séries de terme général défini par **F**

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} - 1 - \frac{2}{n} \qquad v_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad w_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1$$

développements limités **Exercice 22.16** **Ecricom S 2016.** Pour $n \geqslant 1$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} - \ln(n)$ **F**

1. Donner un DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x}$
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$
3. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, puis que la suite (u_n) converge.

Exercice 22.17 Soit $u_0 \in]0, \pi/2[$ et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_{n+1} := \sin u_n$ pour $n \geqslant 0$. **D**

a) Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle tends vers 0.

b) En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^3$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$.

c) Trouver un nombre $\alpha > 0$ et une constante $\beta > 0$ tels que

$$\frac{1}{(u_n)^\alpha} - \frac{1}{(u_{n+1})^\alpha} \sim \beta \qquad (n \to \infty).$$

d) En sommant la relation précédente, trouver un équivalent simple de la suite u_n lorsque $n \to \infty$.

23. Espaces probabilisés et VAR (univers quelconque)

23.1 Espace probabilisé infini

probabilité **Exercice 23.1.1** Déterminer $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ pour **F**

1. $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$
2. $A_n = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$

probabilité **Exercice 23.1.2** soit $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$ et $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d,e\}, \Omega\}$. **F**

1. Vérifier que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,d,e\}, \{a,c,d,e\}, \Omega\}$ sont des tribus
2. Construire la tribu engendrée par $\{a\}$ et $\{b,c\}$, i.e. la plus petite tribu contenant ces ensembles.

probabilité **Exercice 23.1.3** On effectue une infinité de lancers d'une pièce avec la probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile. On introduit$B =$« n'avoir aucun pile » ainsi que $A_n =$« ne pas avoir de pile durant les n premiers lancers » pour $n \geqslant 1$. Déterminer $P(A_n)$ pour $n \geqslant 1$ et en déduire $P(B)$ **F**

probabilité **Exercice 23.1.4** On effectue des tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules vertes, en proportion $v \in]0,1[$ et rouges, en proportion $r \in]0,1[$. On veut montrer qu'on obtient presque sûrement une boule rouge en un nombre fini de tirages. **F**

1. Méthode 1 : pour $n \geq 1$, calculer la probabilité de $C_n =$« on a obtenu la première boule rouge en moins de n tirages ». Conclure
2. Méthode 2 : pour $n \geq 1$, calculer la probabilité de $D_n =$« on a obtenu la première boule rouge au $n^{\text{ième}}$ tirage ». Conclure.

probabilité **Exercice 23.1.5** On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée et on pose $A_n =$« au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile » pour $n \geqslant 2$. **F**

1. Déterminer $P(A_n)$ pour $n \geq 2$. Est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile ?
2. Variante : prendre une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir face est $p \neq 1/2$. Montrer alors que

$$P(A_n) = \frac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1} \qquad (n \geqslant 2)$$

   Dans ce cas, est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile ?

probabilité **Exercice 23.1.6** Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7 et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrète dès que l'un des deux gagne. **F**

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un total de 6 (resp. 7) en lançant 2 dés.
2. Déterminer la probabilité des événements: B_n (resp. A_n) « B (resp. A) gagne à son n ie lancer » pour $n \geq 1$
3. Décrire les événements G (resp. F) « B (resp. A) gagne » à l'aide des événements précédents. En déduire la probabilité de succès de B (resp. A). Y-a-til toujours un gagnant ? Le jeu est-il équilibré ?

probabilité **Exercice 23.1.7** Une puce évolue sur trois cases A,B et C. A l'instant 0, la puce se trouve sur la case A, puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces cases selon la règle suivante. **F**

- Si la puce se trouve en A ou B, elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant suivant
- Si la puce se trouve en C, elle y restera l'instant suivant

On note A_n , resp B_n , C_n l'événement : « la puce se trouve en A (resp. B, C) à l'instant n » et on note a_n , b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Etablir une relation de récurrence entre a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} et a_n , b_n , c_n.
2. Remarquer que la suite $(a_n + b_n)$ est géométrique et déduire la valeur de c_n en fonction de n. bonus : déterminer les expressions de b_n et a_n en fonction de n.

3. Calculer la probabilité de l'événement $E =$« la puce atteint la case C »
4. Sachant que la puce est en C à l'instant $n+1$, calculer la probabilité qu'elle y ait été pour la première fois à l'instant n

probabilité **Exercice 23.1.8** Un jeu consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré AGBP à l'aide d'un dé. A chaque tour, le jeton est déplacé, dans le sens trigonométrique , du nombre de sommets donné par un jet de dé. Le jeu se poursuit jusqu'à tomber sur G (Gain), ou jusqu'à tomber sur P (Perte). Lors de sa partie, le joueur J part du sommet A. Soit les évts : V=« J gagne » et B_1=« J va en B à l'issue de son premier lancer ». Lors de sa partie, le joueur J' part du sommet B : on notera V' et B_1' les événements correspondants. F
1. Déterminer un s.c.e adapté au jeu (du joueur J) qui contient B_1.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à ce s.c.e., démontrer que $P(V) = \dfrac{2}{5}\big(1+P(V')\big)$.
3. Démontrer de même que $P(V') = \dfrac{1}{5}\big(1+2P(V)\big)$. En déduire $P(V)$ et $P(V')$. Quel est le bon choix de départ ?

probabilité **Exercice 23.1.9** On considère une infinité d'urnes numérotées. Pour $n \geqslant 1$, la probabilité de choisir l'urne n est égale à $\frac{1}{2^n}$ or l'urne numéro n est composée boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ? F

23.2 VAR discrète

loi **Exercice 23.2.10** On considère deux urnes : l'urne 1 contient deux boules noires et deux boules blanches, et l'urne 2 contient 3 boules noires et 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, puis on extrait successivement et sans remise 3 boules. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Loi de Y ? F

loi **Exercice 23.2.11** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X=k) = \alpha 3^{-k}$ pour $k \geqslant 1$. F
1. Déterminer α pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4. On pose la variable $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

loi **Exercice 23.2.12** Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives 1, 2, ... Pour $n \geqslant 1$, on suppose que la probabilité de succès à la hauteur n est $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. F
1. Justifier soigneusement que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis montrer que $P(X=k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ pour $k \geqslant 1$. Vérifier alors que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. bonus : Etudier la variance de X

loi **Exercice 23.2.13** Une urne contient des boules blanches en proportion $b > 0$ et vertes en proportion $v > 1$ avec $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues. F
1. a. Déterminer la loi de X
   b. Montrer que X admet une especrance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} - 1$
   c. Montrer que X admet une variance et la calculer
2. a. Déterminer $Y(\Omega)$ puis $P(Y=k)$ pour $k \geqslant 2$.
   b. En déduire la loi de Y

loi **Exercice 23.2.14** Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note X la variable égale au numéro du tirage final, si un tel tirage existe, et égale à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue. F
1. Donner sans calcul $X(\Omega)$ puis déterminer $P(X=n)$ pour $n \geqslant 1$.

2. Montrer que ue $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)=1$. En déduire $P(X=0)$. Conclusion ?

loi **Exercice 23.2.15** On lance de manière indépendante une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0{,}1[$, jusqu'à l'obtention du premier pile. On note X le nombre de lancers nécessaires et Y le nombre de "face" obtenus. F

1. Reconnaître la loi de X, et rappeler son espérance et sa variance.
2. Exprimer Y en fonction de X. En déduire son espérance et sa variance, puis sa loi.

loi de Poisson $E(X)$ **Exercice 23.2.16** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\vartheta)$. Montrer que $Y=\frac{1}{X+1}$ admet une espérance et la calculer. F

loi **Exercice 23.2.17** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $0<p<1$. Montrer que $P(X>k)=(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer alors la propriété d'absence de mémoire F

$$P_{(X>\ell)}(X>k+\ell)=P(X>k) \qquad (k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}).$$

loi **Exercice 23.2.18** Deux joueurs A et B lancent une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$ jusqu'à l'obtention d'un pile. On note X_A (resp. X_B) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (resp. B). F

1. Donner la loi de X_A et de X_B ainsi que leur espérance et leur variance
2. Calculer $P(X_A=X_B)$
3. Pour $k \geqslant 1$, calculer $P(X_B \geqslant K)$. En déduire $P(X_b \geqslant X_A)$.

loi **Exercice 23.2.19** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $4P(X=n+2)=5P(X=n+1)-P(X=n)$ pour $n \geqslant 1$ Montrer que X suit une loi usuelle. En déduire la valeur de son espérance et de sa variance. F récurrence linéaire

loi **Exercice 23.2.20** Soit $p \in]0{,}1[$. On suppose que la fonction de répartition F d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}*$ vérifie $F(n)=1-(1-p)^n$ pour $n \geqslant 0$. Donner la loi de X. En déduire son espérance et sa variance. F

loi **Exercice 23.2.21** Une princesse est retenue prisonnière dans un chateau. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant trois portes. Il en ouvre une au hasard. F

- S'il ouvre la première porte, un dragon apparait et le dévore.
- S'il ouvre la deuxième, il délivre la princesse.
- S'il ouvre la troisième, une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie ce qu'il a fait et est remis à la porte du chateau.

Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré par le dragon.

1. Calculer la probabilité de l'événement $D_k=$« il délivre la princesse au $k^{\text{ième}}$ essai »
2. Calculer la probabilité de l'événement $D=$« il délivre la princesse »
3. On note T le nombre de tentatives du prince. Donner la loi de T ainsi que son espérance

loi **Exercice 23.2.22** **Loi binomiale négative.** On effectue une infinité de lancers de dé indépendants et on appelle succès l'obtention d'un 6. Pour $n \geqslant 1$, on note X_n le temps d'attente du $n^{\text{ième}}$ succès, c'est-à-dire le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention du $n^{\text{ième}}$ succès F

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ puis décrire $(X_n=n)$ et $(X_n=n+1)$. Que vaut $P(X_n=n)$ et $P(X_n=n+1)$
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, décrire $(X_n=n+k)$ en précisant le nombre d'issues. En déduire la loi de X_n.
3. Pour $n \geqslant 0$, en déduire que la série $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ converge et que sa somme vaut 5^n.

loi **Exercice 23.2.23** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ F

1. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)-nP(X>n)$.
2. On suppose que X admet une espérance

   a. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $0 \leqslant nP(X>n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$. En déduire la limite de $nP(X>n)$

b. Déduire du 1) que la série de terme général $P(X > k)$ converge et que sa somme vaut $E(X)$

3. Réciproquement, on suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(X > n)$ converge

   a. En étudiant la suite des sommes partielles, montrer que X admet une espérance

   b. En déduire l'égalité des sommes $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$

loi **Exercice 23.2.24** Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n\,°\,1$ en une heure. **F**

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet $n\,°\,1$?
3. Calculer $P_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour $k > n$?
4. Déterminer $X(\Omega)$ puis justifier que $P(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X_1 = k)P(N = n)$ pour $k \in \mathbb{N}$
5. Calculer alors cette somme pour en déduire la loi de X_1, puis son espérance et sa variance.

loi **Exercice 23.2.25** On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0.2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y la variable égale au nombre de colis en bon état. On a donc $X + Y = N$. **F**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$
2. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre 1
3. En suivant une méthode similaire, déterminer la loi de Y

loi **Exercice 23.2.26** On jette $n \geqslant 1$ fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la var égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n + 1$ sinon. **F**

1. Déterminer la loi de X et vérifier que $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$.
2. Pour $x \neq 1$, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

24. Applications linéaires II

linéaire f^{-1} **Exercice 24.1** Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = \big(P(0), P'(0), P(1)\big)$ **FM** $\mathcal{M}at(f)$ A^{-1}

1. Montrer que $f : P \mapsto f(P)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, à l'aide de la représentation matricielle, une expression de f^{-1}. Comment aurait-on pu faire sinon ?

linéaire **Exercice 24.2** **Edhec ast1 2003.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 1. **F**

1. Montrer que f satisfait une et une seule des deux propriétés suivantes :

$$(A) \qquad \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3 \qquad\qquad (B) \qquad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

2. On suppose que f satisfait la propriété (A). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f admet la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Que vaut alors f^2 ?
3. On suppose que f satisfait la propriété (B). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f admet la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut alors f^2 ?

25. Dérivées successives

26. Intégration sur un intervalle

Exercice 26.1 Soit $\alpha > 1$. Nature et calcul en cas de convergence de **F**

$$a)\ \int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\mathrm{d}x \qquad d)\ \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}$$

$$e)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} \qquad f)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}\mathrm{d}x \qquad g)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad h)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha}$$

Exercice 26.2 Soit $\alpha > 1$. Nature et calcul en cas de convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$ **F**

Exercice 26.3 Nature des intégrales **F**

$$a)\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)\mathrm{d}x}{x+\mathrm{e}^{-x}} \qquad d)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$e)\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x \qquad g)\ \int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x \qquad h)\ \int_0^1 \big(\ln(x+1) - \ln x\big)\mathrm{d}x$$

$$i)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}\mathrm{d}x \qquad j)\ \int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x$$

Exercice 26.4 **F**

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ converge et vaut 1
2. Nature et calcul de $\int_0^1 x^\alpha \ln(x)\mathrm{d}x$ pour $\alpha > -1$

Exercice 26.5 A l'aide du changement de variable proposé, nature et calcul (en cas de convergence) pour **F** **cdv**

$$a)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x}} \quad \text{cdv: } y = \mathrm{e}^x \qquad b)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} \quad \text{cdv: } x = t^2 \qquad c)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \quad \text{cdv: } u = \mathrm{e}^x$$

Exercice 26.6 soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ **F**

1. Etudier la parité de f
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ puis préciser sa valeur
3. Que peut-on en déduire sur $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

Exercice 26.7 Pour $x \geqslant 0$, calculer $\int_{-x}^{x} \sin(t)\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{d}t$? **F**

Exercice 26.8 **F**

1. Pour $x \geqslant 1$, montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$
2. Endéduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$
3. Montrer de même que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\mathrm{d}t$ converge
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $|\sin t| \geqslant \sin(t)^2$ puis que $|\sin t| \geqslant \frac{1-\cos(2t)}{2}$
5. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument

Exercice 26.9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ **F**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale I_n converge
2. Calculer I_0 et I_1.

3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n
4. En déduire la valeur de I_n en fonction de n
5. Montrer la convergence et préciser la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx$

Exercice 26.10 Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ **F**

1. Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'intégrale I_n converge
2. Calculer I_1
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et convergente.
4. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$
5. Pour $n \geqslant 1$, en déduire que $I_n = \dfrac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2} \times ((n-1)!)^2}$

Exercice 26.11 **Inspiré d'Edhec E 2004.** Le but est de calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$ **F**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$ puis calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente
3. a. Montrer que $0 \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
   b. Donner la limite de la suite (u_n)
4. a. Pour $n \geqslant 2$, justifier la convergence de $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$
   b. Pour $n \geqslant 2$, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}$ puis conclure

Exercice 26.12 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ **F**

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 26.13 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ **F** ipp

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
3. Pour $t \geqslant 1$, montrer que $0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$. En déduire la limite de f en $+\infty$
4. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 26.14 **F**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t) dt$ converge et calculer sa valeur
2. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?
3. a. Pour $0 < t < 1$, et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$
   b. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^2} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1-t} \ln(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   c. En déduire qu'il existe une fonction f, prolongeable par continuité sur [0,1] telle que
   $$\left| I + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^2} \right| \leqslant \int_0^1 |f(t)| t^n dt \qquad (n \geqslant 0)$$
   d. Montrer qu'il existe un nombre réel M tel que $\int_0^1 |f(t)| t^n dt \leqslant \frac{M}{n+1}$ pojur $n \geqslant 0$.
   e. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge et exprimer sa somme en fonction de I

27. VAR à densité et lois usuelles

Exercice 27.1 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles définissent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant une densité associée. Existence et calcul de l'espérance. **F**

$$F_1(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x_L e 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad F_2(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 27.2 Parmi les fonctions suivantes définies sur R, lesquelles sont des densités d'une variable aléatoire à densité ? Déterminer le cas échéant la fonction de répartition associée. Existence et calcul de l'espérance. **F**

$$f_1(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R} \qquad f_3(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_6(x) = 1 + \sin x \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 27.3 On pose $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ **F**

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité. On introduit alors une variable aléatoire X de densité f (on dit que X suit la loi de Cauchy).
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance

Exercice 27.4 soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x\sqrt{x}} & x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **F**

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 27.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **F**

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X
2. Déterminer la fonction de répartition associée
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$ et on admet que Y est bien une variable aléatoire.
   a. Déterminer la fonction de répartition notée G de Y
   b. Montrer alors que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y
   c. Mêmes questions avec $Z = X^2$

Exercice 27.6 Même énoncé que 27.5 pour $Y = lnX$ et $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **F**

Exercice 27.7 **EML E 96.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **F**

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, notée X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On admet que $Y = |X|$ est bien une variable aléatoire.
   a. Déterminer la fonction de répartition de G de Y
   b. Montrer alors que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 27.8 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+1} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **F**

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X
2. Déterminer la fonction de répartition de X et son espérance, si elle existe
3. On admet que $Y = \frac{1}{X}$ et $\frac{N=\lfloor 1}{X\rfloor = \lfloor Y \rfloor}$ sont des variables aléatoires.
   a. Vérifier que Y est bien une variable à densité et préciser une densité. Y admet-elle une espérance ?
   b. Déterminer la loi de N. N admet-elle une espérance ?

Exercice 27.9 F

1. Rappeler une densité f de $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big(]-1{,}1[\big)$, sa fonction de répartition F , ainsi que la valeur de son espérance.
2.
   a. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+X}{1-X} \right)$ réalise une bijection de $]-1{,}1[sur\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations de g^{-1}
   b. Déterminer g^{-1} . En déduire la fonction de répartition de $Z = g(X)$.
   c. Vérifier que Z est une variable à densité, et préciser une densité de Z

Exercice 27.10 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0{,}1]\big)$. F

1. Pour $\lambda > 0$, reconnaître la loi de $T = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X)$.
2. En scilab, à l'aide de la syntaxe rand(), simuler une loi exponentielle de paramètre 5

Exercice 27.11 Soit $X \hookrightarrow E(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On admet que $T = X^2$ et $U = \lfloor X \rfloor + 1$ sont des VAR. F

1. Rappeler une densité de X, sa fonction de répartition, ainsi que la valeur de son espérance.
2. Vérifier que T est bien une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
3. Reconnaître la loi de U. En déduire son espérance.
4.

Exercice 27.12 **Edhec E 2008.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ F

1. Vérifier que f peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. On note F sa fonction de répartition, qu'on ne calculera pas.
2. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   a. Exprimer la fonction de répartition G de Y en fonction de F.
   b. En déduire que Y est une variable à densité, et exprimer sa densité en fonction de f.
   c. Reconnaître la loi de Y.

Exercice 27.13 **Edhec E 2010.** F

1. Même énoncé que 27.12 avec $Y = \ln\big(|X|\big)$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. déterminer F

Exercice 27.14 **Eml E 2006.** Soit F la fonction définie par $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ F

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ converge. On admettra qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.
2. Vérifier que F est une fonction de répartition d'une variable à densité X. Déterminer une densité de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Montrer que X^2 suit une loi exponentielle, dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance de X^2.

Exercice 27.15 F

1. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0{,}1)$, alors $P\big(|X| \leqslant x\big) = 2\Phi(x) - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(x-1)^2} \mathrm{d}x$ à l'aide de Φ.

3. Même question avec $\displaystyle\int_2^{2+\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-x^2+4x-2}\mathrm{d}x$
4. Reprendre l'intégrale de l'exercice 27.14, et montrer qu'elle vaut effectivement $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice 27.16 Soit $Y = X^2$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ F
1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2. En déduire que Y est bien une variable à densité et préciser une densité.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Exercice 27.17 **Loi lognormale** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On admet que $Y = \mathrm{e}^X$ est une variable aléatoire. F cdv
1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2. En déduire que Y est bien une variable à densité, et préciser une densité.
3. Montrer que Y admet une espérance et la calculer

27.1 Modélisation

Exercice 27.1.18 Suite à un problème de réseau, un client contacte le service après-vente de son opérateur. Un conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance entre 14h et 15h. On suppose enfin, que ce technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau donné. F
1. Quelle est la probabilité que le client patiente moins de 30 minutes ? entre 10 et 30 minutes ? On pourra commencer par introduire une variable aléatoire .... et deviner sa loi !
2. Donner une syntaxe scilab qui permet de simuler l'heure où le technicien appelle le client.

Exercice 27.1.19 Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre restreint de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la loi de la durée de vie de ce composant, en années, est la loi exponentielle de paramètre 1/4. F
1. Rappeler une densité de cette loi, ainsi que son espérance et sa fonction de répartition.
2. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de quatre ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne sans défaillance au moins 6 ans, sachant qu'il a déjà fonctionné 5 ans ?
4. Pendant combien de temps, 50
5. Donner la période de garantie optimum pour remplacer moins de 15

Exercice 27.1.20 La taille en cm d'un homme (en France) suit une loi normale de paramètres m = 176cm et σ = 7cm. F
1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
2. Un fabricant de vêtements pour hommes souhaite utiliser cette loi pour produire son stock.
   a. Déterminer le réel a, tel que l'intervalle [m − a, m + a] contienne en moyenne 90 hommes.
   b. bonus : Le fabricant en déduit 4 tailles S, M , L et XL correspondant respectivement aux intervalles $[m-a,m-\frac{a}{2}]$, $[m-\frac{a}{2},m]$, $[m,m+\frac{a}{2}]$ et $[m+\frac{a}{2},m+a]$. Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

Exercice 27.1.21 On suppose que la distance X en mètres parcourues par un javelot lancé par un athlète A suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que : F
- exactement 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- exactement 25% des javelots atteignent moins de 50 mètres.

Déterminer alors les paramètres de la loi normale de X. Quelle est la longueur moyenne parcourue par un javelot ?

28. Formules de Taylor

29. Extrema
Techniques et Stratégies

Partie 30. Techniques : Advanced mathematical warfare

1 (Traduire du français aux maths ou inversement) **4.2.15**, **5.1.1**, **8.2.10**, **14.13**

2 (quantificateur) **2.1.2**, **2.1.3**, **2.1.4**, **2.1.5**, **2.1.6**, **4.2.15**

30.1 Raisonnements logiques

3 (Infirmation par contre-exemple) **5.2.7**, **5.2.8**, **5.2.9**, **5.2.10**, **5.2.11**, **10.1**, **18.9**

4 (Implication) **2.1.1**, **2.1.2**, **2.1.5**, **2.1.6**, **2.2.9**, **2.2.12**

On suppose $\mathcal{P}$, puis on montre $\mathcal{Q}$

Supposons $\mathcal{P}$. Montrons $\mathcal{Q}$ ...

5 (Inclusion) **5.1.4**, **5.1.6**, **6.1.6**

On suppose prend $x \in A$, puis on montre que $x \in B$

Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$ ...

6 (Double Implication)

On prouve $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$

- Montrons que $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ...
- Montrons que $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ ...

A fortiori, on a $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$

7 (Raisonnement direct)

$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \mathcal{Z}$

Comme $\mathcal{P}$, on a ... donc $\mathcal{Q}$ est vraie, de sorte que ... et en conclusion $\mathcal{Z}$ est vraie

Remarques :

- les liens logiques du raisonnement doivent être matérialisés à l'aide de mots français correctement employés : comme, car, par conséquent, puisque, donc, or, en conclusion, a fortiori, on a, on en déduit que, implique que, découle de, ...
- l'utilisation inadéquate d'un mot ou des symbôles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ pour matérialiser un lien logique du raisonnement est sanctionnée

8 (Raisonnement par contraposée) **2.1.5**, **2.2.10**

Pour démontrer que $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, on montre que $\overline{\mathcal{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}}$

Supposons que $\mathcal{Q}$ soit fausse. Alors, ... donc $\mathcal{P}$ est fausse.
Par contraposition, on conclut que $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$

9 (Raisonnement par équivalences) **1.1.5**, **1.1.6**, **1.1.7**, **1.1.8**

$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\Longleftrightarrow \mathcal{Q} \text{ car } \ldots \\ &\Longleftrightarrow \quad \vdots \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{Z} \text{ car } \ldots \end{aligned}$$

10 (Raisonnement par l'absurde) **2.2.7**, **2.2.8**, **4.2.8**, **4.2.11**, **4.2.19**, **6.1.7**, **13.17**

On suppose la négation de $\mathcal{P}$, on en déduit une proposition qui ne peut être vraie (contradiction). On conclut alors que $\mathcal{P}$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}$ soit fausse.
Alors ... et donc la propriété vraie $\mathcal{Q}$ est fausse, ce qui est absurde.
En conclusion, $\mathcal{P}$ est vraie

11 (Raisonnement par analyse-synthèse) **15.4**, **18.3**, **18.8**, **18.12**, **18.18**
12 (Partitioner en cas disjoints) **1.1.6**, **1.1.7**, **1.1.8**, **2.2.11**, **16.18**
Pour établir une proposition $\mathcal{P}_x$ pour $x \in C_1 \cup \cdots \cup C_n$

- Lorsque $x \in C_1$, ... donc $\mathcal{P}_x$ est vraie
- ...
- Lorsque $x \in C_n$, ... donc $\mathcal{P}_x$ est vraie

En conclusion, $\mathcal{P}_x$ est vraie pour $x \in C_1 \cup \cdots \cup C_n$.

13 (Raisonnement epsilonnique) **4.2.12**, **11.1.13**
14 (Méthode Automatique de Résolution et de Rédaction Efficace) **2.2.9**, **2.2.10**, **2.2.12**, **5.1.4**, **5.1.5**, **5.1.6**, **5.2.13**, **15.11**, **15.1.19**, **19.7**, **20.14**, **20.20**
Les objectifs complexes sont, autant que possible, divisés en objectifs plus simples, prouvés ensuite

30.2 Récurrences

4.2.8, **13.7**, **13.23**

On déduit des (une infinité de) propositions , d'une initialisation et d'un procédé de transmission.
Remarques :

- La manière correcte d'initialiser une récurrence, se déduit de la transmission utilisée.
- La récurrence doit être adaptée aux besoins (récurrence finie ? transmission ? départ de 0 ? ...)

Trouver le schema de récurrence adapté
La relation utilisée pour transmettre l'information détermine le schema le plus efficace

1. $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}$: récurrence faible (u_{n+1} ne dépend que du rang précédent)
2. $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1}$: récurrence à 2 pas (u_{n+2} dépend des deux rangs précédents)
3. $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$: récurrence forte (u_{n+1} dépend de tous les rangs précédents)

15 (Récurrence faible) **2.2.13**, **3.1**, **3.2**, **3.3**, **3.4**, **3.8**, **3.9**, **3.10**, **3.11**, **3.12**, **3.13**, **3.14**, **3.15**, **3.26**, **3.27**, **4.2.2**, **4.2.6**, **4.2.31**, **4.2.37**, **5.2.19**, **6.1.6**, **16.13**, **18.8**
Schema de récurrence : $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Pour $n \geqslant 0$, prouvons par récurrence la proposition
$\mathcal{P}_n$: ...

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car ...
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour **un** entier $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  ... donc P_{n+1} est vraie

En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geqslant 0$

16 (Récurrence faible (avancée)) **3.24**, **7.2.35**
17 (Récurrence à deux pas) **3.5**, **3.6**, **3.7**
Schema de récurrence : $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et ($\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$) $\Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Pour $n \geqslant 0$, prouvons par récurrence la proposition
$\mathcal{P}_n$: ...

- $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vrais car ...
- Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ pour **un** entier $n \geqslant 1$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  ... donc P_{n+1} est vraie

En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geqslant 0$

18 (Récurrence forte) **5.2.12**, **13.5**, **13.6**, **13.22**
Schema de récurrence : $\mathcal{P}_0$, $(\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Pour $n \geqslant 0$, prouvons par récurrence la proposition
$\mathcal{P}_n$: ...
- $\mathcal{P}_0$ est vraie car ...
- Supposons $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ pour **un** entier $n \geqslant 0$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  ... donc P_{n+1} est vraie

En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geqslant 0$

19 (Récurrence finie)
Schema de récurrence : $\mathcal{P}_0$, $(n < N \text{ et } \mathcal{P}_n) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Pour $0 \leqslant n \leqslant N$, prouvons par récurrence la proposition
$\mathcal{P}_n$: ...
- $\mathcal{P}_0$ est vraie car ...
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour **un** entier $n \in [\![0,N[\![$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$
  ... donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $0 \leqslant n \leqslant N$

30.3 Existence
1.2.19, **11.1.14**, **11.1.17**, **11.1.18**, **11.1.19**, **12.12**, **12.13**, **13.22**, **15.4**, **15.1.19**, **16.21**, **16.22**, **19.7**
20 (Théorème de Rolle) **12.12**, **12.13**, **16.22**
30.4 Unicité
11.1.17, **11.1.18**, **11.1.19**, **16.21**

30.5 Situer
11.1.14
21 (Appartenir) **4.2.7**
30.6 Images et antécédents

22 (Antécédents) **5.2.10**, **15.3**
23 (Images)
24 (Application)
25 (Ensemble image)
26 (Ensemble image réciproque)
27 (Résoudre l'équation $y = f(x)$) **5.2.7**, **5.2.8**, **5.2.9**, **5.2.10**, **5.2.11**, **5.2.14**, **5.2.16**, **5.2.16**, **5.2.19**, **12.8**
Fixer $y \in F$ et déterminer tous les $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$, en procédant par équivalences.

Soit $y \in F$. Comme, $y = f(x) \iff \cdots \iff \left| \begin{array}{l} x = \cdots \\ x \in \cdots \end{array} \right.$ alors f ...

▷ f est surjective s'il y a toujours au moins une solution $x \in E$
▷ f est injective s'il y a toujours au plus une solution $x \in E$
▷ f est est bijective s'il y a toujours exactement une solution $x \in E$. La résolution donne alors également une formule pour la bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ car

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \qquad (x \in E, y \in F)$$

Utile pour:
- déterminer si f est injective, surjective, bijective
- trouver une formule pour une bijection réciproque
- déterminer les antécédents, les images réciproques par f

Nécessite : l'équation $y = f(x)$ soit être soluble
équivalences,résoudre
repose sur...

28 (Injection) **5.2.7**, **5.2.7**, **5.2.8**, **5.2.9**, **5.2.10**, **5.2.11**, **5.2.13**, **5.2.13**, **15.2**, **15.3**
29 (Surjection) **5.2.7**, **5.2.8**, **5.2.9**, **5.2.10**, **5.2.11**, **5.2.13**, **5.2.13**, **15.2**, **15.3**

30.6.1 Bijection

5.2.14, **5.2.16**, **5.2.18**, **5.2.19**, **11.1.15**, **12.11**, **16.21**

30 (Bijection réciproque) **5.2.14**, **5.2.15**, **5.2.16**, **12.8**, **12.9**, **12.10**, **12.11**, **16.21**, **18.1.36**, **18.1.36**
31 (Dériver une bijection réciproque) **12.10**, **12.11**
32 (Transférer les propriétés de f sur f^{-1}, en posant $x = f^{-1}(y)$) **5.2.17**, **5.2.18**

30.7 Transformer une expression

2.1.6

30.7.1 Calcul

33 (Entiers) **4.2.38**
34 (Fractions) **1.1.1**, **3.10**, **3.11**, **4.2.26**, **4.2.27**, **4.2.28**, **6.1.9**
35 (Dérivation)
36 (négation) **2.1.5**, **2.1.6**
37 (contraposition)
38 ($a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$) **6.2.16**, **12.6**

30.7.2 Identités fondamentales

39 (Identité remarquable $(a-b)^2$) **4.2.20**
40 (Identité remarquable $(a+b)^2$)
41 (Identité remarquable $a^2 - b^2$)
42 ($a^n - b^n$) **3.22**
43 (Binôme de Newton $(a+b)^n$) **4.2.7**, **7.2.32**, **7.2.33**, **7.2.34**, **7.2.36**, **13.24**, **13.28**, **18.6**

30.7.3 Trigonométrie

4.2.31, **6.1.3**, **6.2.12**
44 ($\cos(a+b)$)
45 ($\sin(a+b)$) **4.2.7**
46 ($\tan(a+b)$)
47 ($\cos(2x)$)
48 ($\sin(2x)$)

30.7.4 Rassembler en un seul élément

49 (Mettre sous le même dénominateur) **1.1.7**, **1.3.25**
Mettre sous le même dénominateur

$$\boxed{\frac{a}{c} + \cdots + \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{u}{u} + \cdots + \frac{b}{d} \times \frac{v}{v} = \frac{au + \cdots + bv}{ppcm} \quad \text{avec} \quad ppcm = cu = \cdots = dv}$$

Remarque : on utilisera systématiquement le plus petit commun multiple (ppcm) de c, ..., d au lieu d'appliquer sans réfléchir la formule $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$ pour ensuite réduire la fraction obtenue.

30.7.5 Séparer en plusieurs parties plus simples

3.17, **3.18**, **3.21**, **3.22**, **4.2.7**, **4.2.18**

30.7.6 Simplifier une expression

1.1.1, **1.1.2**, **1.1.3**, **1.1.4**, **18.7**

30.7.7 Développer une expression

3.21, **3.22**

30.7.8 Factoriser une expression

4.2.27

30.7.9 Techniques diverses
50 (Traduire une somme avec $\sum$ ou $+\ldots+$) 3.16
sortir des termes d'une somme

ecrire une somme à l'aide du symbôle $\sum$
51 (Changement d'indice (CDI)) 3.23
Changement d'indice du type $k = \ell + c$

Il résulte du changement d'indice $k = \ell + c$ que
$$\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{\ell=a'}^{b'} v_\ell$$

1. Choisir c pour que la formule $k = \ell + c$ donne à u_k l'apparence souhaitée $u_k = v_\ell$
2. Ecrire une nouvelle somme avec le nouvel indice ℓ et l'apparence souhaitée
3. utiliser la formule $k = \ell + c$ pour transformer les indices de départ a et d'arrivée b portant sur k en indices de départ $a' = a - c$ et $b' = b - c$ portant sur ℓ

Changement d'indice du type $k = c - \ell$
On fait pareil en échangeant les indices de départ $b' = c - b$ et d'arrivée $a' = c - a$ portant sur ℓ

Il résulte du changement d'indice $k = c - \ell$
$$\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{\ell=b'}^{a'} v_\ell$$

52 (quantité conjuguée) 1.1.4, 4.2.21, 6.1.1, 6.1.2, 6.2.10 53 (($\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$) = ($\overline{\mathcal{P}}$ or $\mathcal{Q}$))

Factoriser une expression avec des racines

$$\boxed{\sqrt{a} - \sqrt{b} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}$$

Etudier le signe, en présance de racines

$$\boxed{\sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ est de même signe que } a - b}$$

Forme algébrique d'un inverse de nombre complexe

$$\boxed{\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}}$$

54 (Changement d'apparence $+1 - 1$) 16.2, 16.3, 16.4
30.8 Résoudre
1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8, 1.2.18, 2.2.11, 2.2.13, 6.1.6, 6.1.7, 18.12

30.8.1 Systèmes linéaires
9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 10.11, 10.12, 10.13, 13.8, 9.5
55 (Système d'équations) 1.2.15, 3.19, 3.20
56 (compatibilité) 9.4, 9.5, 9.5
30.8.2 Equations Polynômiales
1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8
57 (Changement d'inconnue) 1.1.5

58 (Mise sous forme canonique) **1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8, 1.2.16, 1.2.17**
Mettre sous forme canonique

$$\begin{aligned} aX^2+bX+c &= a\times\left(X^2+uX+v\right) \\ &= a\times\left[\left(X+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{\boxed{\text{nombre}}}{4}\right] \\ &= a\times\left[\left(X+\frac{u}{2}\right)^2-\frac{\Delta'}{4}\right] \\ &= a\times\left[\left(X+\frac{u}{2}\right)^2-\frac{\omega^2}{4}\right] \\ &= a\times\left(X+\frac{u-\omega}{2}\right)\left(X+\frac{u+\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

1. Factoriser a
2. Utiliser l'identité remarquable $X^2+uX=(X+\frac{u}{2})^2-\frac{u^4}{4}$ et simplifier pour obtenir $\boxed{\text{nombre}}$
3. faire apparaitre un signe négatif $\boxed{\text{nombre}}=-\Delta'$
4. Ecrire que $\Delta'=\omega^2$ en utilisant une racine carrée ω de Δ' (se rappeler que $i^2=-1$).
5. factoriser en utilisant l'identité remarquable $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Remarques, on a :
- $u=\frac{b}{a}$ et $u=\frac{c}{a}$
- $\Delta'=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2}$ indique le nombre de racines réelles :
  - Si $\Delta\neq 0$, les racines sont $\frac{-u+\omega}{2}$ et $\frac{-u-\omega}{2}$.
    Elles valent $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta>0$ et $\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ si $\Delta<0$.
  - Si $\Delta=0$, $\frac{-u}{2}=\frac{-b}{2a}$ est racine double.

30.8.3 Equations Trigonométriques

30.8.4 Equations Matricielle

59 (Poser une matrice) **13.8**

60 (Racine carrée matricielle) **13.27**

61 (Commuter) **13.8, 13.24, 13.27**

30.8.5 Equations fonctionnelles

62 (Changement de fonction inconnue)

30.8.6 Equations portant sur des suites

63 (Changement de suite inconnue) **4.2.22, 4.2.23**

30.8.7 Inéquations

64 (Inéquations)

30.9 Polynômes

30.10 Matrices

65 (Matrice diagonale) **15.1.20**

66 (Matrice triangulaire supérieure) **18.1.35**

30.11 Inversibilité

67 (Relation matricielle polynômiale) **13.4, 13.5, 13.7, 13.18, 13.25**

30.11.1 Matrice inversible

13.4, 13.5, 13.6, 13.7, 13.18, 13.23, 13.25

68 (Matrice inverse) **13.4, 13.5, 13.6, 13.7, 13.18, 13.23, 13.25, 18.1.36, 18.1.36**

69 (Matrice inverse (définition)) **13.6, 13.25**

70 (Matrice non inversible) **13.27**

71 (Matrice puissance) **13.6, 13.16, 13.19, 13.20, 13.22, 13.23, 13.28, 13.29, 15.1.20**

72 (Matrice nilpotente) **13.24, 13.28**

30.12 Diagonalisation

13.6, 13.29

73 (Matrice diagonalisable)

30.13 Espaces vectoriels

10.1, 10.2, 10.3, 10.12, 10.13, 13.32, 18.1.20, 18.1.21, 18.1.24

74 (Sous-epace vectoriel) **10.1, 10.2, 10.3, 18.1.20**

75 (Espace engendré) **10.4, 10.12, 10.13, 10.14, 13.32, 18.1.21, 18.1.22, 18.1.24**

76 (Appartenir à un Vect) **10.5, 10.6, 10.19**

77 (Equation cartésienne) **10.4**

30.14 Familles libres ou liées
10.4, **10.7**, **10.8**, **10.9**, **10.10**, **18.1.22**, **18.1.23**

30.14.1 Famille libre
10.17, **10.18**
78 (Un vecteur non nul)
79 (Deux vecteurs non colinéaires)
80 (Famille de même rang que son cardinal (fini))
81 (Famille de polynômes échelonnés en degré) **18.1.26**
30.14.2 Famille liée

30.14.3 Familles génératrices

82 (Famille de même rang que la dimension (finie))
30.14.4 Bases
10.7, **10.11**, **10.12**, **10.13**, **10.14**, **10.15**, **10.15**, **10.17**, **10.19**, **13.32**, **15.1.15**, **15.1.19**, **15.1.20**, **15.1.21**, **18.9**, **18.1.22**, **18.1.24**, **18.1.26**, **19.7**
83 (Coordonnées dans une base) **10.11**, **15.1.20**, **18.1.26**
84 (Utilisation du rang) **10.8**, **10.9**, **10.11**, **10.14**, **10.19**, **15.2**, **15.3**, **15.1.18**, **18.1.23**, **18.1.34**
30.14.5 Sommes d'espaces vectoriels
85 ($E = F \oplus G$) **15.1.21**
30.14.6 Dimension
10.5, **10.19**

30.15 Applications linéaires
86 (Application linéaire) **13.9**, **13.10**, **15.1**, **15.2**, **15.3**, **15.5**, **15.6**, **15.7**, **15.8**, **15.9**, **15.10**, **15.11**, **15.12**, **15.1.22**, **15.12**, **18.1.27**, **18.1.28**, **18.1.29**, **18.1.30**, **18.1.31**, **18.1.32**, **18.1.33**, **18.1.36**, **18.1.36**, **24.2**
87 (Noyau) **15.2**, **15.3**, **15.1.15**, **15.1.16**, **15.1.17**, **15.1.18**, **18.1.27**
88 (Image) **15.2**, **15.3**, **15.1.15**, **15.1.16**, **15.1.17**, **15.1.18**, **18.1.27**
89 (Matrice d'une application linéaire) **15.1.13**, **15.1.14**, **15.1.15**, **15.1.16**, **15.1.18**, **15.1.19**, **15.1.20**, **15.1.21**, **18.1.34**, **18.1.35**, **18.1.36**, **18.1.36**
Pour obtenir la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $\mathcal{B} = (b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $\mathcal{C} = (c_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$
1. Dessiner une matrice
2. Facultatif : sur la droite, écrire les vecteurs c_i de la base d'arrivée $\mathcal{C}$
3. Facultatif : Sur le haut, écrire l'image $f(b_j)$ par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$
4. Calculer $f(b_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$: Il y a autant de colonnes que de vecteurs au départ
5. exprimer $f(b_j)$ en fonction des c_i avec l'intuition ou, en desespoir de cause, en résolvant le système
$$f(b_j) = x_1 c_1 + \ldots x_p c_m$$
6. Reporter les coefficients c_1, ..., c_m obtenus pour la colonne j dans la matrice

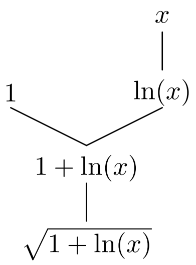
90 (projecteur) **15.1.21**, **20.16**
30.16 Fonctions de référence
91 (Logarithme $\ln x$**)** **1.1.3**, **1.2.22**, **3.7**, **3.25**, **4.2.16**, **4.2.24**, **12.6**
92 (Exponentielle e^x**)** **3.25**
93 (Puissance a^n**)** **1.1.2**, **1.1.7**, **6.2.10**
94 (Racine $\sqrt{x}$**)** **1.1.4**, **1.1.6**, **1.1.7**, **1.1.8**, **3.27**, **12.6**
95 (valeur absolue $|x|$**)** **1.1.6**, **1.1.7**, **1.1.8**, **6.2.10**
96 (Partie entière $\lfloor x \rfloor$**)** **4.2.18**, **6.2.12**, **6.2.13**
97 (Partie fractionnaire $\{x\}$**)** **4.2.18**
98 (Cosinus $\cos x$**)**
99 (Sinus $\sin x$**)**
100 (Tangente $\tan x$**)**
101 (Arctangente $\mathrm{Arctan}\, x$**)**
102 (Fonction homographique $\frac{ax+b}{cx+d}$**)** **4.2.33**, **4.2.34**, **4.2.35**, **4.2.36**, **4.2.37**, **4.2.38**, **6.1.8**
103 (module) **5.2.16**
30.17 Etude de régularité

104 (Analyse de calcul) **12.5**

Analyser un calcul

Au brouillon, décomposer l'expression $f(x)$ en un arbre d'étapes élémentaires.

$$f(x)=\sqrt{1+\ln(x)} \quad \xleftrightarrow{\textbf{analyse}}$$



(A)

Les contraintes sont

$$\left|\begin{array}{lll} \overbrace{x>0}^{\ln} \text{ et } \overbrace{1+\ln(x)\geqslant 0}^{\sqrt{\cdot}} & \text{définition, continuité} \\ \underbrace{x>0}_{\ln} \text{ et } \underbrace{1+\ln(x)>0}_{\sqrt{\cdot}} & \text{dérivable, } \mathcal{C}^1, \text{ ...} \end{array}\right.$$

30.17.1 Définition

1.1.10, **3.1**, **3.2**, **3.7**, **4.2.6**, **4.2.37**, **5.2.19**, **6.1.6**, **6.1.7**, **6.2.15**, **6.2.16**, **6.2.17**, **6.2.18**, **6.2.19**, **11.1.9**, **12.1**, **12.3**, **12.5**, **12.6**, **16.15**, **16.16**, **16.19**, **16.20**

105 (La base : via l'analyse (A)) **1.1.10**, **5.2.19**, **6.2.16**, **6.2.19**, **11.1.9**, **11.1.10**, **12.1**, **12.3**

Déterminer un ensemble de définition

$$\begin{array}{ll} \text{Comme } x\in\mathcal{D}f & \Longleftrightarrow \boxed{C_1} \text{ et } \ldots \text{ et } \boxed{C_n} \\ & \Longleftrightarrow \ldots \\ & \Longleftrightarrow x\in E, \\ \text{nous concluons que } \mathcal{D}f=E. & \end{array}$$

1. Déterminer les contraintes C_1, ..., C_n pour la définition de $f(x)$ à l'aide de l'analyse (A).
2. Résoudre le système constitué par ces contraintes
3. L'ensemble de définition $\mathcal{D}f$ est l'ensemble solution E du système de ces contraintes

30.17.2 Continuité

1.3.25, **6.2.13**, **6.2.15**, **11.1.9**, **11.1.10**, **11.1.11**, **11.1.12**, **11.1.13**, **12.1**, **12.3**, **12.5**, **12.6**, **16.17**, **18.1.25**

106 (Continuité dans le cas simple) **6.2.15**, **11.1.9**, **11.1.10**, **12.1**, **12.3**

Continuité de f est $\boxed{\textit{continue}}$ sur E (cas simple)

1. Déterminer les contraintes C_1, ..., C_n pour la continuité de $f(x)$ à l'aide de l'analyse (A).
2. Etablir les continuités des etapes élémentaires du haut de l'arbre à sa racine, à l'aide de la résolution des contraintes

Continuité d'une composée

Comme f est continue sur I, $\underline{\text{à valeurs dans } J}$, et comme g est continue sur J, la composée $g\circ f$ est continu sur I

Continuité d'un quotient

Comme f et g sont continues sur I et $\underline{\text{comme } g(x)\neq 0 \text{ pour } x\in I}$, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I

107 (Continu) **6.2.16**, **12.7**, **12.13**

30.17.3 Dérivabilité

1.1.9, **1.1.10**, **11.1**, **12.1**, **12.3**

108 (Limite du taux d'accroissement) **12.5**

109 (Fonction dérivable) **12.7**, **12.10**, **12.13**

30.17.4 Classe $\mathcal{C}^1$

16.15, **16.16**, **16.19**, **16.20**

110 (Classe $\mathcal{C}^1$ (cas simple))

30.17.5 Classe $\mathcal{C}^n$

30.17.6 Classe $\mathcal{C}^\infty$

30.17.7 Dérivée

1.1.9, **1.1.10**, **1.3.25**, **11.1**, **12.2**, **12.5**, **12.6**, **12.7**, **12.8**, **12.9**, **12.10**, **12.11**, **16.16**, **16.19**, **16.20**, **18.6**

30.18 Evaluer, trouver une formule

30.18.1 Trouver u_n

1.2.13, **1.2.14**, **1.2.16**, **1.2.17**, **1.2.18**, **1.2.19**, **1.2.20**, **1.2.21**, **1.2.23**, **1.2.24**, **3.1**, **3.5**, **3.6**, **3.7**, **4.2.2**, **4.2.33**, **4.2.37**, **4.2.38**, **13.7**, **13.22**, **13.23**, **13.28**, **13.29**, **16.13**

111 (Suites constantes) **13.7**

112 (Suites arithmétiques) **1.2.13**, **1.2.15**, **1.2.18**

113 (Suites géométriques) **1.2.14**, **1.2.15**, **1.2.18**, **1.2.19**, **1.2.20**, **4.2.22**, **4.2.31**, **4.2.33**, **4.2.36**, **4.2.36**, **4.2.37**, **4.2.38**, **4.2.38**, **13.28**

114 (Suites arithmético-géométriques) **1.2.23**, **1.2.24**, **4.2.2**, **13.7**

115 (Récurrences linéaires d'ordre 2) **1.2.16**, **1.2.17**, **1.2.21**, **1.2.22**, **3.5**, **3.6**, **3.7**, **23.2.19**

Reconnaitre la récurrence linéaire du second ordre

> La suite u satisfait la récurrence linéaire $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ pour $n \geqslant 0$, qui admet le polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$

Si P admet deux racines distinctes

> Comme le polynôme caractéristique a deux racines distinctes z et s, il existe deux nombres complexes λ et μ tels que
>
> $$u_n = \lambda z^n + \mu s^n \qquad (n \geqslant 0).$$

Si P admet une racine double

> Comme le polynôme caractéristique a une racine double z, il existe deux nombres complexes λ et μ tels que
>
> $$u_n = \lambda z^n + \mu n z^n = (\lambda + \mu n) z^n \qquad (n \geqslant 0).$$

Déterminer les constantes pour trouver u_n en fonction de n

$$\boxed{\begin{cases} u_0 &= \alpha\lambda + \beta\mu \\ u_1 &= \alpha'\lambda + \beta'\mu \end{cases}}$$

1. Utiliser les conditions initiales pour obtenir un système
2. Résoudre puis reporter les valeurs obtenues pour λ et μ dans la formule de u_n

$$\boxed{\text{A fortiori, on a } u_n = ... \text{ pour } n \geqslant 0}$$

30.18.2 Calculer une somme

1.2.13, **1.2.14**, **1.2.19**, **1.2.23**, **3.8**, **3.9**, **3.10**, **3.11**, **3.13**, **3.15**, **3.18**, **3.23**, **3.24**, **4.2.2**, **5.2.19**, **6.1.5**, **7.2.31**, **7.2.32**, **7.2.33**, **7.2.34**, **7.2.35**, **7.2.36**

116 (Sommes télescopiques) **3.8**, **3.9**, **3.10**, **3.18**, **3.19**, **3.20**, **3.21**, **3.22**, **4.2.21**, **5.2.19**, **13.25**, **16.7**, **22.1**

Calculer une somme télescopique

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} \qquad (\text{CDI } k' = k+1) \\
&= \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \qquad (\text{Chasles}) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad (n \geqslant 0)
\end{aligned}$$

1. Reconnaître et mettre sous la forme télescopique (parfois suggeré par l'énoncé)
2. Séparer les sommes
3. Procéder à un changement d'indice pour que toutes les sommes utilisent la même formule
4. Garder dans les sommes ce qui est commun et sortir le reste (Chasles)
5. Simplifier

117 (Sommes arithmétiques) **3.22**, **4.2.16**

118 (Sommes géométriques) **3.17**, **3.18**, **4.2.2**, **16.9**

119 (Binôme de Newton) **13.20**

120 (Sommes de Beroulli) **3.17**, **3.18**, **3.23**, **3.25**, **4.2.16**, **7.2.31**

121 (Formule de Vandermonde)

30.19 Parité et périodicité

30.19.1 parité

4.2.7, **11.3**, **11.7**, **16.15**

122 (pair)

123 (impair) **12.7**, **16.16**

30.19.2 périodicité

124 (périodique) **11.4**

125 (anti-périodique)

126 (Théorème des valeurs intermédiaires) **11.1.12**, **11.1.14**, **18.1.25**

127 (Relation de Chasles) **3.25**, **4.2.26**, **4.2.28**, **5.1.6**, **16.2**

30.20 Inégalités

4.2.16, **4.2.18**, **4.2.19**, **4.2.26**

128 (Inégalité des accroissements finis) **12.14**

30.20.1 Minorer

4.2.11, **4.2.30**, **16.13**, **16.18**

30.20.2 Majorer

1.1.11, **1.1.12**, **4.2.18**, **6.1.4**

30.20.3 Encadrer
3.1, **3.2**, **3.7**, **3.12**, **3.14**, **3.27**, **4.1.1**, **4.2.2**, **4.2.6**, **4.2.8**, **4.2.11**, **4.2.16**, **4.2.19**, **4.2.21**, **4.2.21**, **4.2.24**, **4.2.31**, **4.2.33**, **4.2.37**, **4.2.38**, **6.1.3**, **6.1.4**, **6.1.5**, **6.1.5**, **6.1.6**, **6.2.13**, **11.4**, **11.1.18**, **11.1.19**, **12.14**, **16.8**, **16.12**, **16.19**

30.20.4 Borne sup
4.1.1

30.20.5 Borne inf

30.20.6 Plus petit élément

30.20.7 Plus grand élément

30.21 Etudier le signe
6.2.19, **11.4**, **11.1.18**, **16.15**, **16.16**, **16.19**
129 (Un carré de nombre réel est positif (ou nul)) **4.2.20**
130 (Tableau de signe) **12.3**, **12.6**
30.22 Etudier les variations
1.3.25, **4.2.2**, **4.2.3**, **4.2.6**, **4.2.19**, **4.2.21**, **4.2.23**, **4.2.31**, **4.2.33**, **4.2.38**, **5.2.19**, **6.1.5**, **6.1.6**, **6.1.7**, **6.1.8**, **16.19**, **16.21**

131 (Monotone) **4.2.6**, **4.2.17**, **4.2.31**, **6.1.6**, **6.1.6**, **6.1.7**
132 (Croissant)
133 (Décroissant) **16.12**, **16.13**, **16.20**
30.22.1 Monotonie et variations des fonctions
134 (Tableau de variation) **1.1.11**, **1.1.12**, **1.3.25**, **4.2.3**, **4.2.16**, **4.2.24**, **5.2.19**, **6.1.7**, **6.1.8**, **6.2.19**, **11.6**, **11.7**, **11.1.14**, **11.1.15**, **11.1.16**, **11.1.17**, **11.1.19**, **12.7**, **12.8**, **12.9**, **12.11**, **16.15**, **16.16**, **16.18**, **16.21**
Pour établir un tableau de variation f
1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. (facultatif) Etudier la parité et la périodicité de f, afin de réduire l'intervalle d'étude.
3. Etude de dérivabilité et calcul de $f'(x)$
4. Etude du signe de $f'(x)$
5. Dresser le tableau de variation de f

Pour établir une majoration du type $a(x) \leqslant b(x)$ pour $x \in I$
1. Utiliser que $a(x) \leqslant b(x) \iff 0 \leqslant b(x) - a(x)$ pour $x \in I$
2. Dresser le tableau de variation de $f(x) = b(x) - a(x)$ sur I
3. A l'aide du tableau, établir la positivité de f sur I

30.22.2 Monotonie des suites
4.2.8, **4.2.11**, **4.2.29**, **11.1.17**, **11.1.18**, **11.1.19**, **16.10**

135 (Méthode à essayer en priorité) **4.2.2**, **4.2.3**, **4.2.20**, **4.2.21**, **4.2.28**, **4.2.30**, **5.2.19**, **6.1.5**, **16.10**
Monotonie de u_n
Calculer et simplifier $\Delta = u_{n+1} - u_n$ pour trouver son signe
- si $\Delta > 0$ pour chaque n : suite strictement croissante
- si $\Delta \geqslant 0$ pour chaque n : suite croissante
- si $\Delta = 0$ pour chaque n : suite constante
- si $\Delta \leqslant 0$ pour chaque n : suite décroissante
- si $\Delta < 0$ pour chaque n : suite strictement décroissante

136 (Méthode pour produits, quotients, puissances et factorielles.) **4.2.3**, **4.2.6**, **4.2.20**, **4.2.27**, **4.2.33**
Monotonie de $u_n > 0$
Lorsque u_n est toujours strictement positif, calculer et simplifier $Q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour le comparer à 1

- si $Q > 1$ pour chaque n : suite strictement croissante
- si $Q \geqslant 1$ pour chaque n : suite croissante
- si $Q = 1$ pour chaque n : suite constante
- si $Q \leqslant 1$ pour chaque n : suite décroissante
- si $Q < 1$ pour chaque n : suite strictement décroissante

Si u_n est toujours strictement négatif, se ramèner au cas précédent en posant $v_n = -u_n$, les conclusions pour u_n sont inversées.
Si u_n change régulièrement de signe, il n'y a pas de monotonie

137 (Méthode pour les suites, s'exprimant à l'aide de fonctions élémentaires) 4.2.3

Monotonie de $u_n = f(n)$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Utiliser ce tableau pour comparer $u_{n+1} = f(n+1)$ et $u_n = f(n)$

Il est nécessaire d'arriver à dériver f et à étudier le signe de sa dérivée f' pour aboutir

138 (Méthode par récurrence)

Monotonie de u_n

Prouver par récurrence l'une des propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}_n : u_{n+1} > u_n$
- $\mathcal{Q}_n : u_{n+1} \geqslant u_n$
- $\mathcal{R}_n : u_{n+1} = u_n$
- $\mathcal{S}_n : u_{n+1} \leqslant u_n$
- $\mathcal{T}_n : u_{n+1} < u_n$

Cette méthode est parfois utilisable pour une suite récurrente ou implicitement définie.
Exemple : la suite u définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^3$ pour $n \geqslant 0$ est strictement croissante.

- $u_1 = 8 > 2 = u_0$
- si $u_{n+1} > u_n$ alors $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}$ par stricte croissance de $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$

30.23 Suite implicite

11.1.17, **11.1.18**, **11.1.19**, **21.3**, **21.4**

Stratégie pour étudier une suite définie implicitement par une équation du type $f_n(u_n) = 0 \quad (n \geqslant 0)$

1. Dresser le tableau de variation de f_n
2. Situer les solutions possibles de $f_n(x) = 0$ via la monotonie de f_n : déduire que $a < u_n < b$ (resp. $b < u_n < a$) de la croissance (resp. décroissance) stricte de f_n et des relations :
   a. $f(a) < 0$
   b. $f(b) < 0$
   c. u_n est l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $[a,b]$
3. Pour x fixé, étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
4. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n) = f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$
5. de l'inégalité $f_{n+1}(u_n) \leqslant 0 = f_n(u_n)$ (resp. $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0 = f_n(u_n)$) et de la monotonie de f_n déduire la monotonie de la suite (u_n).
6. Déduire le comportement asymptotique de u_n de sa localisation, de sa monotonie et de la relation $f_n(u_n) = 0$.

30.24 Suites récurrentes

4.2.30, **4.2.31**, **4.2.32**, **4.2.33**, **4.2.34**, **4.2.35**, **4.2.37**, **6.1.6**, **6.1.7**, **6.1.8**

Stratégie pour étudier une suite récurrente du type $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} = f(u_n) \qquad (n \geqslant 0)$

1. Dresser le tableau de variation de f permet de situer u_n :
   a. trouver un intervalle I stable par f, i.e. tel que $f(I) \subset I$
   b. si $a \in I$, prouver par récurrence que $u_n \in I$ pour $n \geqslant 0$
2. Etudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ permet d'étudier la monotonie de (u_n)
   a. Dresser le tableau de variation de g
   b. En déduire le signe de g sur un intervalle I d'étude
   c. Le signe de $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ donne le sens de variation de (u_n)
3. à partir de la localisation (encadrement) de (u_n) et de sa monotinie, il est souvent possible de montrer d'établir sa convergence (ou divergence)
4. En cas de convergence, on trouve sa limite en résolvant l'équation $\ell = f(\ell)$ obtenue par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$

30.25 Etudier la convergence

1.2.22, **4.2.4**, **4.2.5**, **4.2.6**, **4.2.7**, **4.2.9**, **4.2.10**, **4.2.16**, **4.2.17**, **4.2.18**, **4.2.19**, **4.2.20**, **4.2.21**, **4.2.22**, **4.2.23**, **4.2.24**, **4.2.25**, **4.2.29**, **4.2.30**, **4.2.31**, **4.2.32**, **4.2.33**, **4.2.34**, **4.2.35**, **4.2.36**,

5.2.19, **6.1.1**, **6.1.2**, **6.1.3**, **6.1.4**, **6.1.5**, **6.1.6**, **6.1.8**, **6.2.10**, **6.2.13**, **11.1.17**, **11.1.18**, **11.1.19**, **16.13**, **16.2.27**

139 (Diverger vers $+\infty$) **16.7**
140 (Opérations) **6.1.1**, **6.1.2**
141 (Principe des gendarmes) **4.2.6**, **4.2.9**, **4.2.16**, **4.2.18**, **6.1.3**, **6.1.4**, **6.2.13**, **6.2.14**, **11.1.18**, **16.8**, **16.9**, **16.10**, **16.12**, **16.14**
142 (Théorème de croissance comparée) **1.3.25**, **4.2.4**, **4.2.5**, **6.1.1**, **6.1.2**, **6.2.10**, **6.2.11**, **6.2.16**
143 (Factoriser le terme dominant dans les sommes) **1.3.25**, **4.2.4**, **4.2.5**, **4.2.10**, **4.2.16**, **6.1.1**, **6.1.2**, **6.2.10**, **6.2.11**
144 (Utiliser la limite du taux de variation (une dérivée)) **6.2.10**
145 (Faire un développement limité) **6.2.17**
146 (Suites adjacentes) **4.2.24**, **4.2.25**, **4.2.25**, **4.2.26**, **4.2.26**, **4.2.27**, **4.2.28**, **6.1.9**
147 ($\ell = f(\ell)$) **6.1.6**, **6.1.7**, **6.1.8**

30.25.1 Etude asymptotique

148 (Equivalent) **6.2.11**, **6.2.14**, **21.1**, **21.2**, **21.3**, **21.4**, **21.5**
149 (Etude des branches infinies) **6.2.17**, **6.2.18**
150 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) **4.2.17**, **4.2.29**, **6.1.5**

30.26 Calculer un produit

3.25, **3.26**, **3.27**

30.27 Intégrales

30.27.1 Primitives

151 (Primitive de fonction continue) **16.15**, **16.16**, **16.17**, **16.18**, **16.19**, **16.20**, **16.21**
152 (Primitive de x^α) **16.1**, **16.2**, **16.12**
153 (Primitive (ou changement de variable) avec la forme $u'f(u)$)
154 (Primitive avec translation) **16.1**
155 (Primitive avec translation) **16.1**, **16.3**
156 (Fonction définie par une intégrale à un paramètrePrimitive avec translation) **16.15**, **16.16**, **16.17**, **16.19**, **16.20**, **16.21**
157 (Changement de variable) **16.4**, **16.5**, **16.20**, **26.5**, **27.17**

Pour procéder au changement de variable $x = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

> Comme l'application $\boxed{1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\boxed{2}$, à valeurs dans $\boxed{3}$,
> comme l'application $\boxed{4}$ est continue sur $\boxed{3}$,
> il résulte du changement de variable $x = \varphi(t)$ que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d \boxed{5}\ \mathrm{d}t.$

1. a. Isoler t dans $\boxed{x = \varphi(t)}$ pour obtenir que $\boxed{t = \psi(x)}$, si possible.
   b. dériver ces relations par rapport à la variable isolée pour obtenir (truc des physiciens) que

$$\boxed{\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\mathrm{d}t = \psi'(x)\mathrm{d}x}$$

   c. Utiliser également ces relations, pour trouver que

$$\begin{array}{ccc} x = a & \text{correspond à} & t = c \\ x = b & \text{correspond à} & t = d \end{array}$$

   d. Compléter la partie $\boxed{5}$, ce qui donne 2 points.
2. Pour justifier correctement et obtenir 2 points de plus,
   a. dessiner au brouillon le schema

$$\begin{array}{ccc} & [a,b] & \\ x & = & \varphi(t) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \psi(x) & = & t \\ & [c,d] & \end{array}$$

b. Parmi les deux flêches, représentant $t \mapsto \varphi(t)$ ou $x \mapsto \psi(x)$, choisir l'application qui est $\mathcal{C}^1$ et qui vous plait le plus pour remplir $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$

c. Pour le block $\boxed{4}$, mettre l'applications du block $\boxed{5}$ qui utilise la variable isolée à la pointe de la flèche choisie (c'est f si vous avez choisi de prendre $t \mapsto \varphi(t)$ pour $\boxed{1}$ et l'autre sinon)

158 (Intégration par partie) **16.3**, **16.5**, **16.10**, **16.14**, **26.13**

30.28 Séries

159 (Nature)

160 (Calcul)

30.29 Intégrales généralisées

30.30 Développements limités

30.31 Dénombrement

161 (Arbre de dénombrement) **7.1.2**, **7.1.3**, **7.1.4**, **7.1.18**, **7.1.19**, **7.1.20**, **7.1.22**, **7.1.23**, **7.1.24** Pour compter le nombre de cas d'un arbre

- on utilise l'addition pour un arbre hétérogène (ou non)
- On utilise la multiplication pour un arbre homogène

162 (Liste (application)) **7.1.1**, **7.1.8**, **7.1.9**, **7.1.10**, **7.1.15**, **7.1.17**, **7.1.22**

163 (Arrangement (injection)) **7.1.1**, **7.1.9**, **7.1.17**

164 (Permutation (bijection)) **7.1.15**, **7.1.25**

165 (Combinaison (partie)) **7.1.1**, **7.1.2**, **7.1.9**, **7.1.12**, **7.1.15**, **7.1.17**, **7.1.18**, **7.1.22**, **7.1.23**, **7.1.26**

166 (Surjection) **7.1.8**, **7.1.25**

167 (Pendu point barre) **7.1.17**

30.32 Univers

8.1.1, **8.2.10**, **14.1**

168 (Univers Image) **14.1**

30.33 Evenements

8.2.9, **8.2.11**

169 (Incompatibilité)

170 (Indépendance)

30.34 Probabilité

8.1.1, **8.1.2**, **8.1.3**, **8.1.4**, **8.1.5**, **8.1.6**, **8.1.8**, **8.2.10**, **8.3.12**, **8.3.13**, **8.3.14**, **8.3.15**, **8.3.16**, **8.3.17**, **8.3.18**, **8.3.19**, **8.3.20**, **8.3.21**, **8.3.22**, **8.3.23**, **8.3.24**, **8.3.25**, **8.3.26**, **8.3.27**, **14.2**, **23.1.1**, **23.1.2**, **23.1.3**, **23.1.4**, **23.1.5**, **23.1.6**, **23.1.7**, **23.1.8**, **23.1.9**

171 (Probabilité du complémentaire) **7.1.3**

172 (Formule de Poincaré) **7.1.14**

173 (Formule du crible) **7.1.7**

30.35 VAR

8.1.7, **14.1**

174 (Fonction de répartition) **14.1**

30.36 Lois

14.1, **14.3**, **23.2.10**, **23.2.11**, **23.2.12**, **23.2.13**, **23.2.14**, **23.2.15**, **23.2.17**, **23.2.18**, **23.2.19**, **23.2.20**, **23.2.21**, **23.2.22**, **23.2.23**, **23.2.24**, **23.2.25**, **23.2.26**

175 (loi certaine)

176 (loi uniforme) **8.1.1**, **8.1.2**, **8.1.3**, **8.1.6**

177 (loi de Bernoulli)

178 (loi binomiale)

179 (loi géométrique)

180 (loi hypergéométrique)

181 (loi de Poisson) **23.2.16**

182 (loi géométrique tronquée)

183 (loi uniforme continue)

184 (loi exponentielle)

185 (loi normale)

30.37 Limite de probabilité d'une suite d'événements

30.38 Probabilités conditionnelles

8.3.14

186 (Arbre (probabilités conditionnelles))

187 (Définition)

188 (Formule des probabilités composées)
189 (Formule des probabilités totales)
190 (Formule de Bayes)
30.39 Espérance $E(X)$
14.3, **23.2.16**

30.40 Variance $V(X)$
14.3

Table des matières