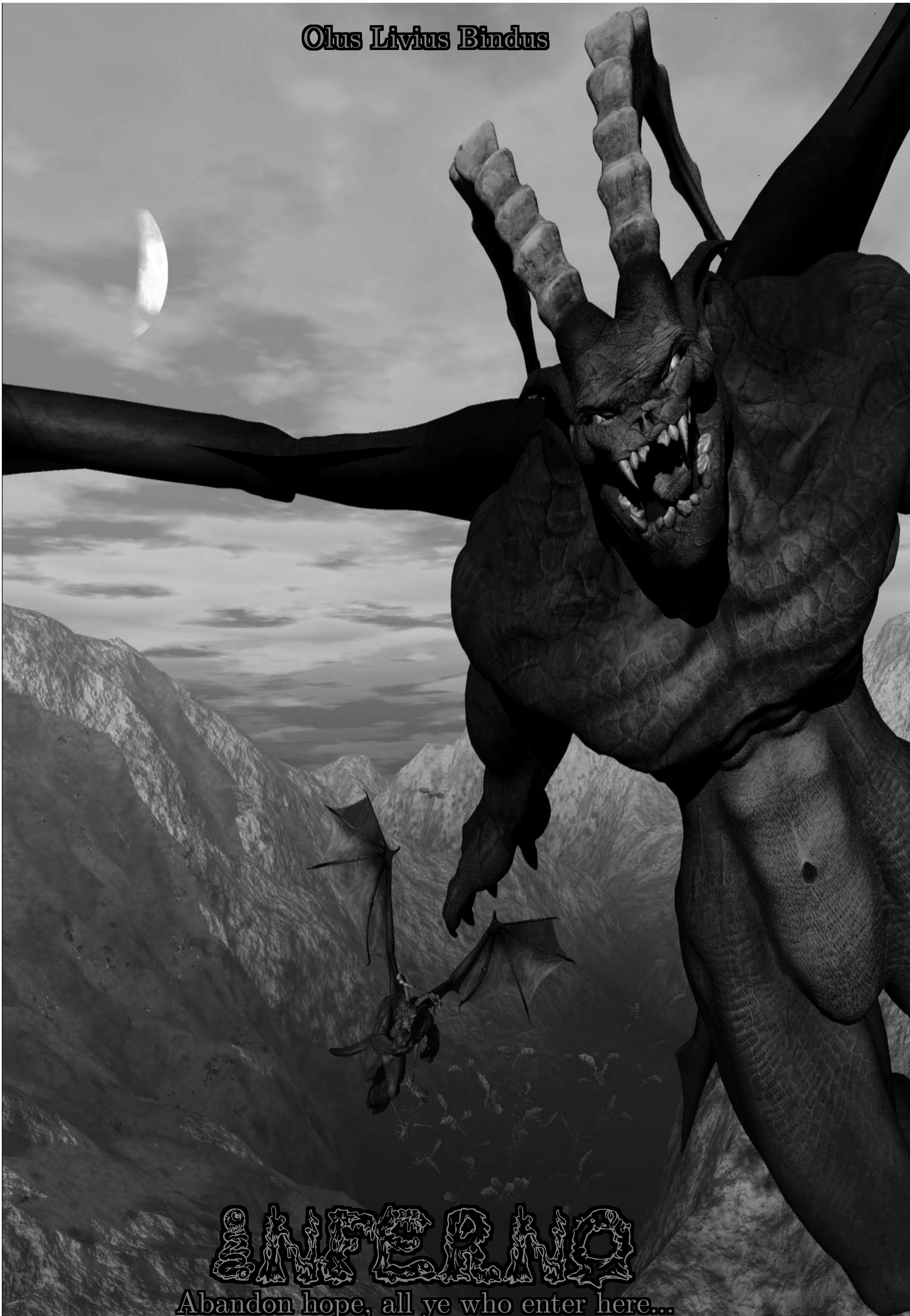
Olus Livius Bindus
INFERNO
Abandon hope, all ye who enter here...

Table des Matières

1. Legende

L'entête de chaque exercise précise le niveau n, la difficulté d, la richesse pédagogique r (i.e. le nombre de nouveaux concepts, d'idées intéressantes contenues qu'enseigne la résolution de l'exercice) et parfois également la provenance o de l'exercice.

Il est également indiqué si l'exercice est associé *à des indications*, à des concepts utiles à sa résolution ou **à une solution**, que vous trouverez respectivement aux sections 89, 90 et 91, selon le schema suivant :

d	Type	PT	PT*/MP	MP*
	appliquer le cours	Facile	Trop facile	Perte de temps
1	adapter le cours	Facile/Moyen	Facile	Trop facile
2	ENSAM/CCP	Moyen/dur	Facile/Moyen	Facile
3	Centrale/Mines	Dur/Baleze	Moyen/dur	Facile/Moyen
4	Polytechnique	Baleze/Infernal	Dur/Baleze	Moyen/dur
5	Ens Ulm	Infernal/Impossible	Baleze/Infernal	Dur/Baleze

origine de l'exercice

$(o)\ {}^{d}_{r}\text{Exercice}^{n}$

n	Année
♭	Math. Sup. (L1)
	Math. Spé. (L2)

r	Type	Contenu
	Entrainement	0 idée nouvelle
1	Formateur	1+ idée nouvelle
2	Classique	2+ idées nouvelles
3	Culte	3+ idées nouvelles

typographie	Contenu
Exercice	énoncé
Exercice	avec indication(s)
Exercice	avec solution
Exercice	avec notions utiles

2. Logique

(Isa) -1**Exercice**$^\flat$ 1. Déterminer la valeur logique des propositions suivantes :

$a.\quad \forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

$b.\quad \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant -5,$

$c.\quad \forall x \geqslant 0 : x^2 - 4 = \sqrt{(x^2-4)^2},$

$d.\quad \forall x \in \mathbb{R} : x = \ln(e^x),$

$e.\quad \forall x > 0 : x = e^{\ln x},$

$f.\quad \forall x \leqslant 0 : \sqrt{x^2} = -x,$

$g.\quad \exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} > x,$

$h.\quad \exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} = -x,$

$i.\quad \exists x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x} = e^x,$

$j.\quad \exists x \in \mathbb{R} : \ln x - \ln(2x) = 3,$

$k.\quad \exists x \geqslant 0 : 3x + 5 < 0,$

$l.\quad \exists x < 0 : \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) = 3.$

(Isa) -1**Exercice**$^\flat$ 2.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est pair $\Longleftrightarrow 3n+1$ est impair.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ est pair $\Longleftrightarrow n^3$ est pair.
c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est pair $\Longrightarrow 2n^2+1$ est impair.
La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse
d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in]-1;2[\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in \left]\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right]$.
La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.
e. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\ln(3x+1)+4} \geqslant 2$.

(Isa) 1**Exercice**$^\flat$ 3. Simplifier les sommes suivantes, puis les calculer lorsque c'est possible.

$$S_1 := \sum_{k=1}^{n}(3k+5), \qquad S_2 := \sum_{i=1}^{2n} 3^{i+n}, \qquad S_3 := \sum_{n=0}^{50}\left(\frac{5}{n+3} - \frac{5}{n+4}\right),$$
$$S_4 := \sum_{0\leqslant j \leqslant n}\left(3(-1)^n + \frac{4}{n+1}\right), \qquad S_5 := \sum_{3\leqslant k\leqslant n+3}\left((k-3)^2 + \frac{5}{k-2} - (k-3)\right).$$

(Isa) -1**Exercice**$^\flat$ 4. Ecrire les formules suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

$$S_1 := 1+3+5+\ldots+99, \qquad S_2 := 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n, \qquad S_3 := \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\ldots+\frac{n+2}{3^{n+2}},$$
$$S_4 := 1+3^2+3^4+3^6+\ldots+3^{2n+4}, \qquad S_5 := \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{6\sqrt{6}}+\ldots\frac{1}{2p\sqrt{2p}}.$$

3. Récurrences

1Exercice$^\flat$ 5. Montrer que $\displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$ pour $n \geqslant 0$.

1Exercice$^\flat$ 6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\sin(2^k x)} = \cot x - \cot(2^n x)$ pour $n \geqslant 0$.

$^{(\mathcal{K})}$ ^{1}Exercice$^\flat$ 7. Pour $n \geqslant 0$, prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

$^{(\mathcal{K})}$ ^{1}Exercice$^\flat$ 8. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!k = (n+1)! - 1$.

$^{(\mathcal{K})}$ ^{1}Exercice$^\flat$ 9. Pour $n \geqslant 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^4+4} = (-1)^n \frac{n+1}{4(n+1)^2+1}$.

$^{(\mathcal{K})}$ ^{1}Exercice$^\flat$ 10. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $u_n = \dfrac{1}{1.2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

$^{(\Lambda)}$ ${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 11. Exprimer la matrice A^n en fonction de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de I_2 et de $n \geqslant 1$.

$^{(\mathrm{Isa})}$ ${}_{2}$Exercice$^\flat$ 12.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
d. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \|, \| n \geqslant p, \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
e. Soit u la suite définie par $u_0 := 3, u_1 := 5$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} := 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} + 1$.
f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$.
g. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ pour $a \neq 1$.
h. Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ \sum_{k=3}^{n} 4k(k-1)(k-2) = n(n+1)(n-1)(n-2)$.
k. On considère une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant a u_n$, où a est un réel positif.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a^n u_0$.

${}^{3}_{2}$Exercice$^\flat$ 13. Montrez que $\displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 14. Montrer que $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} \frac{1}{\cos(kx)\cos(kx+x)} = \frac{\tan nx}{\sin x}$ pour $n \geqslant 1$ et $x \notin \pi\mathbb{Q}$.

4. Applications

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 15. Soient A, B, C, D des ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$ des applications. Montrer que :
a) $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
b) $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
c) $h \circ g$ et $g \circ fi$ bijectives $\Longleftrightarrow h$, g et f bijectives.

Exercice$^\flat$ 16. a) L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array}$ est elle injective, surjective ?

b) Même question pour l'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, xy) \end{array}$

$^{1}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 17. Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$ une application.
a) Pour $A \subset B \subset F$, prouver que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
b) Pour $A \subset F$ et $B \subset F$, prouver que

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) \qquad \text{et que} \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

c) Pour $A \subset F$, prouver que $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 18. Prouver que $\begin{array}{rl} f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to &]0,+\infty[\times \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ (x,y) \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) \end{array}$ est bijective.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 19. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ est une bijection de $]-1,1[$ dans $[1,+\infty[$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 20. Démontrer que l'application $\begin{array}{rl} f :]0,+\infty[^2 \to &]0,+\infty[^2 \\ (u,v) \mapsto & \left(uv, \dfrac{u}{v}\right) \end{array}$ est une bijection.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 21. Soient E et F des ensembles non-vides et soit $f : E \to F$ une application.
a) S'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, montrer que f est injective.
b) S'il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$, montrer que f est surjective.
c) Si $E = F$, montrer que

$$f \circ f = \mathrm{Id}_E \longleftrightarrow f \text{ est bijective et } f^{-1} = f.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 22. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux applications.
a) Si f et g sont injectives, montrer que $g \circ f$ est injective.
b) Si f et g sont surjectives, montrer que $g \circ f$ est surjective.
c) Si f et g sont bijectives, montrer que $g \circ f$ est bijective et que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

d) Si $h = g \circ f$ et si 2 des trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : E \to G$ sont bijectives, montrer que la troisième l'est aussi.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 23. Trouver des bijections $f_0 :]2,5[\to]1,8[$, $f_1 : [0,1[\to]0,1]$, $f_2 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f_3 :]0,1[\to \mathbb{R}$ et $f_4 :]0,\infty[\to]0,1[$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 24. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On note respectivement $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de E et F et on considère les deux applications

$$\begin{array}{rl} g : \mathcal{P}(E) \to & \mathcal{P}(F) \\ A \mapsto & f(A) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rl} h : \mathcal{P}(F) \to & \mathcal{P}(E) \\ A \mapsto & f^{-1}(A) \end{array}.$$

1) Prouver que f injective $\Longleftrightarrow$ g injective.
2) Prouver que f surjective $\Longleftrightarrow$ h injective.

5. Géométrie plane

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 25. Soit ABC un triangle rectangle en C. Pour chaque droite D passant par C, on note A' et B' les projections orthogonales de A et B sur D. Démontrer que le cercle de diamètre $A'B'$ passe par un point fixe.

Exercice$^\flat$ 26. Déterminer et tracer l'ensemble des points Mdu plan dont l'affixe z vérifie

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2.$$

Exercice$^\flat$ 27. Déterminer les racines $5^{\text{ièmes}}$ du nombre $1+i\sqrt{3}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 28. Dans le plan, quel est l'ensemble des points d'affixe z tel que $\dfrac{z+1}{z}$ soit imaginaire pur.

Exercice$^\flat$ 29. Étude des Ovales de Cassini : Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes (appelés) foyers est constant.

Exercice$^\flat$ 30. Soient deux points fixes F et F' et $a>0$. Étude des Ovales de Descartes : les lieux des points M tels que $|MF \pm MF'| = 2a$.

Exercice$^\flat$ 31. Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $MI^2 = MA \times MB$.

^{1}Exercice$^\flat$ 32. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on note $\mathcal{H}$ l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $xy=1$. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{H}$, d'abscisse respective a, b et c. Montrer que l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle ABC est sur $\mathcal{H}$ et donner ses coodonnées.

^{1}Exercice$^\flat$ 33. Déterminer et construire le lieu géométrique Γ des points d'ou l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à la courbe

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = 3t^2, \\ y(t) = 2t^3 \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

L'ensemble Γ est appelé la courbe orthoptique de $\mathcal{C}$. La construire.

^{1}Exercice$^\flat$ 34. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$ et soit $\vec{w} := 2\vec{i}+\vec{j}$.
a) Trouver une base orthonormée directe $\{\vec{u},\vec{v}\}$ vérifiant la relation $\vec{W} =\parallel \vec{w} \parallel \vec{u}$.
b) Soit Ω le point vérifiant $\vec{O\Omega} = 3\vec{i}+2\vec{j}$. Déterminer les relations liant les coordonnées (x,y) du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec ses coordonnées (X,Y) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 35. Soient A,B,C,D,E,F,G sept points du plan vérifiant

$$\vec{EB} = 4\vec{EA}, \qquad 3\vec{CF} = \vec{CD} \quad \text{et} \quad 6\vec{AG} = \vec{BD} + 2\vec{AC}.$$

Montrer que les points E, F et G sont alignés. Trouver un nombre réel λ tel que $\vec{EG} = \lambda\vec{EF}$.

^{1}Exercice$^\flat$ 36. Dans un triangle non-plat ABC, on note E le milieu du coté $[BC]$, on note F le milieu du segment $[AE]$ et on note G l'intersection des droites (BF) et (AC).
a) Calculer les coordonnées des points E, F et G dans le repère $(A,\vec{AB},\vec{AC})$.
b) En déduire le nombre réel t tel que $\vec{AG} = t\vec{AC}$.

Exercice$^\flat$ 37. Soient A, B et C trois points non alignés du plan. A chaque nombre réel m, on associe le barycentre G_m au système $\{(A,2);(B,m-1);(C,m+1)\}$.
a) Déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
b) Même question avec le système $\{(A,2);(B,1-m);(C,m+1)\}$.
c) Même question avec le système $\{(A,m+1);(B,-2);(C,3)\}$.

Exercice$^\flat$ 38. Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, avec $A(0,1)$, $B(2,3)$ et $C(-4,-12)$. Donner une équation cartésienne de ce cercle.

Exercice$^\flat$ 39. Soient $A(1,0)$ et $B(3,2)$. Donner une équation polaire de la droite (AB).

Exercice$^\flat$ 40. Soient deux points A et B tels que $AB = 3$. Résoudre le système $\left\{\begin{aligned} AM &= 4, \\ \vec{AB}.\vec{AM} &= 6. \end{aligned}\right.$

Exercice$^\flat$ 41. Dans le triangle ABC avec $A(4,1)$, $B(2,3)$ et $C(-5,-3)$, déterminer des équations de la hauteur issue de C et de la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice$^\flat$ 42. Prouver que les diagonales d'un losange ABCD sont perpendiculaires.

Exercice$^\flat$ 43. Soient ABC un triangle non-plat du plan $\mathcal{P}$.
a) Pour $M \in \mathcal{P}$, prouver que $\vec{MA}.\vec{BC} + \vec{MB}.\vec{CA} + \vec{MC}.\vec{AB} = 0$.
b) Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et de C. Montrer que $\vec{HA}.\vec{BC} = 0$. Conclusion ?

Exercice$^\flat$ 44. Étant donné un parallèlogramme $ABCD$ du plan $\mathcal{P}$, montrer que $AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$.
Qu'en conclure pour les diagonales d'un rectangle ?

Exercice$^\flat$ 45. Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, p le demi-périmètre et S la surface de ABC.
a) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.
b) Démontrer que $C = bc\sin\dfrac{\hat{A}}{2}$. Trouver des formules analogues.
c) Montrer que $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$.
d) Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $\sin^2\hat{A} = \sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C}$.
e) Montrer que

$$\sin^2\hat{A} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2c^2}$$

et en déduire que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Exercice$^\flat$ 46. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Déterminer les lignes de niveau de

$$\varphi : M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2.$$

Exercice$^\flat$ 47. Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$ et soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que

(a) $\quad \| \vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} + 2\vec{MC} \|$

(b) $\quad 2\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| = 3\| \vec{MB} + \vec{MC} \|$

(c) $\quad \| \vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} + k\vec{MC} \|$

${}^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 48. Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$ et soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que

(a) $$\| \vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} + 2\vec{MC} \|$$

(b) $$2 \| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| = 3 \| \vec{MB} + \vec{MC} \|$$

(c) $$\| \vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} + k\vec{MC} \|$$

${}^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 49. Soit ABC un triangle. Déterminer les lignes de niveau de l'application du plan à valeurs réelles

$$\varphi : M \mapsto (2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 4\vec{MC}).(\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}).$$

${}^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 50. Étant donnés $A(1,2)$, $B(2,3)$ et $C(3,0)$, calculer l'aire du triangle ABC et la distance de chaque sommet au coté opposé.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 51. Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$ avec $A(-1,2)$, $B(4,3)$, $C(3,5)$ et $D(2,6)$.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 52. Déterminer une équation de la droite passant par $A(2,3)$ et $B(-4,7)$. Donner un vecteur normal de cette droite.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 53. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x - \sqrt{3}y - 6 = 0$ calculer la distance de $\mathcal{D}$ à l'origine.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 54. Soit ABC un triangle non plat. Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations cartésiennes des médianes du triangle et retrouver qu'elles sont concourantes.

^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 55. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $(1 - m^2)x + 2my - 2(m+1) = 0$. Montrer qu'il existe un point fixe A dont la distance aux droites $\mathcal{D}_m$ est constante. Qu'en déduire pour les droites $(\mathcal{D}_m l)_{m \in \mathbb{N}}$?

<u>Exercice</u>$^\flat$ 56. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équations respectives $3x + 4y + 3 = 0$ et $12x - 5y + 4 = 0$. Sont elles concourantes ? si oui, déterminer des équations des deux bissectrices.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 57. Soient A, B et C des points d'affixes respectives a, b et c. Déterminer l'affixe de l'orthocentre de ABC.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 58. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$ avec $A(3,2)$ et $B(-5,1)$.

^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 59. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$. Déterminer les lignes de niveau de

$$\varphi : M \mapsto MA^2 - MB^2.$$

Application : montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

${}^{3}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 60. Montrer qu'un triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, les affixes a, b et c de ses sommets vérifient

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

${}^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 61. Dans le plan complexe, on considère trois points $A(2+i)$, $B(-1+3i)$ et $C(-2)$.
a) Déterminer l'affixe du point D pour lequel $ABCD$ est un parallélogramme.
b) Calculer l'affixe de l'iso-barycentre G de $ABCD$.
c) Déterminer le couple (α, β) de nombres complexes tel que l'application $z \mapsto \alpha z + \beta$ corresponde à la similitude directe de centre G envoyant A sur B.

6. Géométrie de l'espace

[2]Exercice$^\flat$ 62. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAB} = \frac{\pi}{2}$. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

[2]Exercice$^\flat$ 63. Soient A, B, C et D tels que $\vec{BA}.\vec{BD} \leqslant 0$ et $\vec{DB}.\vec{DC} \leqslant 0$. Montrer que $AC \geqslant BD$.

[2]Exercice$^\flat$ 64. Soient A, B, C et D quatres points de l'espace tels que $(BD) \perp (AC)$. Montrer que

$$BC^2 + DA^2 = AB^2 + CD^2.$$

Exercice$^\flat$ 65. En introduisant des barycentres bien choisis, déterminer pour $\lambda \notin \{-2, -\frac{3}{2}, -1\}$ l'ensemble

$$\left\{M \in \mathcal{E} : \| \vec{MA} + \vec{MC} + \lambda \vec{MC} \| = \| \vec{MD} + \lambda \vec{ME} \| \right\}$$

[2]Exercice$^\flat$ 66. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{2}$. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

[2]Exercice$^\flat$ 67. Soient A, B, C et D tels que $\vec{BA}.\vec{BD} \leqslant 0$ et $\vec{DB}.\vec{DC} \leqslant 0$. Montrer que $AC \geqslant BD$.

[2]Exercice$^\flat$ 68. Soient ABD et ACD deux triangles équilatéraux. On note $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angle des plans (ABD) et (ACD). Calculer en fonction de ϑ l'angle $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ des droites (AB) et (AC).

[1]Exercice$^\flat$ 69. Soient A, B, C, D et E des points de l'espace et $\lambda \neq -1$. Déterminer l'ensemble

$$E := \left\{M \in \mathcal{E} : MA^2 + MB^2 + 2\lambda MC^2 = MD^2 + \lambda ME^2\right\}$$

en introduisant des barycentres bien choisis.

[1]Exercice$^\flat$ 70. Soient A, B, C, D et E des points de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3/2, -1\}$. Déterminer l'ensemble

$$E := \left\{M \in \mathcal{E} : \| \vec{MA} + \vec{MB} + \lambda \vec{MC} \| = \| \vec{MD} + \lambda \vec{ME} \| \right\}$$

en introduisant des barycentres bien choisis.

Exercice$^\flat$ 71. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Montrer que

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{0}.$$

[1]Exercice$^\flat$ 72. Pour A, B, C et Ddans E, prouver que

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} - \vec{BC} \wedge \vec{BD} + \vec{CD} \wedge \vec{CA} - \vec{DA} \wedge DB = \vec{0}.$$

[1]Exercice$^\flat$ 73. Soient A, B et C dans $\mathcal{E}$. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{E}, \qquad \vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

Exercice$^\flat$ 74. Soient A, B dans $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur. Déterminer l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{E} : \vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{u}\}$$

[1]Exercice$^\flat$ 75. Soient A, B et $C \neq A$ dans $\mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{E} : \vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} = 2\vec{MC} \wedge \vec{MA}\}$$

Exercice$^\flat$ 76. On considère les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$, $D(1,0,4)$ et $E(-1,1,1)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite $(ABC) \cap (ADE)$.

Exercice$^\flat$ 77. Calculer l'aire du triangle défini par les 3 points $A(1,2,-1)$, $B(-1,1,0)$ et $C(0,1,2)$.

Exercice$^\flat$ 78. Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ au plan $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu, \\ y = 3 - \lambda + 2\mu, \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice$^\flat$ 79. Calculer la distance du point $A(3,-1,2)$ au plan $\mathcal{P} : 2x + 6y - z = 7$.

Exercice$^\flat$ 80. Calculer la distance du point $A(1,2,-3)$ au plan $\mathcal{P}$ passant par $B(-2,1,0)$ et dirigé par $\vec{v}(1,-6,2)$ et $\vec{w}(3,-1,1)$.

Exercice$^\flat$ 81. Déterminer les plans bissecteurs de $\mathcal{P} : 7x - 4y + 4z = 8$ et $\mathcal{P}' : 4x + 8y + z = 11$.

Exercice$^\flat$ 82. Former les équations cartésiennes des plans $\mathcal{P}$ situés à la distance 1 de $A(1,-1,0)$ et contenant la droite

$$(D) \qquad \begin{cases} x = 3z + 2, \\ y = -5z + 1 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 83. Calculer l'angle des plans $\mathcal{P} : x + y + z = 3$ et $\mathcal{P}' : 2x + y - z = 4$.

Exercice$^\flat$ 84. Calculer l'angle des droites

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 85. Calculer l'angle du plan $\mathcal{P} : x + 2z = 3$ et de la droite

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 86. Déterminer l'équation du plan parallèle à $(O, \vec{j})$ et passant par les points $A(0,-1,2)$ et $B(-1,2,3)$.

Exercice$^\flat$ 87. Trouver une condition nécéssaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que les trois plans d'équations $\mathcal{P}_1 : x+\lambda y-z+1 = 0$, $\mathcal{P}_2 : (\lambda+1)x+3y+4z-2 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : y+(2\lambda+4)z-(2\lambda+2) = 0$ contiennent une même droite $\mathcal{D}$.

Exercice$^\flat$ 88. Calculer la distance du point $A(4, -3, 2)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(1, 0, -1)$ et dirigée par $\vec{v}(2, -1, 3)$.

Exercice$^\flat$ 89. Calculer la distance du point $A(2, -1, 1)$ et la droite qui a pour équation le système

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 90. Donner un système d'équations de la droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$ et re,ncontrant les deux droites admettant les systèmes

$$(\mathcal{D}_1) \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{D}_2) \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 91. Donner un système d'équations de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1, 1, 2)$ et rencontrant les deux droites

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} z = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 92. Montrer qu'il existe un unique plan parallèle et équidistant des deux droites

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} y = 3x + 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} x = z - 4, \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

En donner une équation cartésienne.

Exercice$^\flat$ 93. Montrer que les droites

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} x = -z - 2, \\ y = 3z + 1 \end{cases}$$

sont sécantes et former un système d'équations cartésiennes de leur bissectrices.

Exercice$^\flat$ 94. Soient $A(1, 2, -1)$ et $B(0, 1, 1)$. Former une équation cartésienne de l'ensemble

$$\Big\{M \in \mathcal{E} : d\big(A, (OM)\big) = d\big(B, (OM)\big)\Big\}$$

Exercice$^\flat$ 95. Montrer que les 5 points $A(4, 7, 1)$, $B(3, -3, 6)$, $C(-5, 1, 4)$, $D(5, 6, -1)$ et $E(-4, 3, -3)$ sont cospériques. Déterminer le rayon et le centre de la sphère les contenant.

Exercice$^\flat$ 96. Former une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ pour $A(0, 2, 4)$, $B(1, 3, 2)$, $C(2, 1, 3)$ et $D(-2, -3, -1)$.

Exercice$^\flat$ 97. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de $\mathcal{E}$ non coplanaires et admettant deux points communs A et B. Montrer qu'il existe une unique sphère $\mathcal{S}$ contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice$^\flat$ 98. Déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations $x+y+z=0$, $x+y-z=2$, $x-y+z=4$ et $-x+y+z=6$.

Exercice$^\flat$ 99. Former une équation cartésienne de la sphère tangente en O à $(O,\vec{k})$ et tangente à la droite

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} y=2, \\ x=3z \end{cases}$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 100. Trouver m pour que les droites suivantes soient coplanaires

$$\Delta : \quad \begin{cases} x = \dfrac{z}{m} + m \\ y = -2z + 3 - m \end{cases} \qquad D : \quad \begin{cases} x = \dfrac{-z}{2m} - m + \dfrac{1}{2m}, \\ y = -\dfrac{z}{2} - m + 3 \end{cases}$$

$^1_1$Exercice 101. On considère les droites D_1 et D_2 définies par

$$D_1 : \quad \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad D_2 : \quad \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

Vérifier que ces deux droites sont non-coplanaires et étudier la perpendiculaire communne aux deux droites.
Quelle est la distance entre ces deux droites ?

$^1_1$Exercice 102. Soit P le plan d'équation $x-y+2z=1$ et D la droite d'équation $\{x=z+2, y=-z+1\}$.
Équation de D' symétrique de D par rapport à P ?
Équation de P' symétrique de P par rapport à D ?

(MP*) $^2_1$**Exercice**$^\flat$ 103. étant donnés les points $A:(1,2,3)$, $B:(2,3,1)$, $C:(3,1,2)$ et $D:(1,0,-1)$: a) chercher le centre Ω et le rayon R de la sphère circonscrite à $ABCD$. b) Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
c)Chercher le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$.

(MP*) $^2_1$***Exercice*** 104. Calculer la distance d entre les droites D : $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ et D' : $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

7. Courbes

(A) $^1_1$Exercice 105. Étudier l'arc paramétré $\Phi : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ pour $I=\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 106. Construire la courbe d'équation $y = \ln(\operatorname{ch} x) - x$.

Exercice$^\flat$ 107. Construire la courbe d'équation $y = (x^2-1)\ln\dfrac{x+1}{x}$.

Exercice$^\flat$ 108. Construire la courbe d'équation $y = \left(x+2-\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{Arctan} x$.

8. Coniques

$^{2}_{1}$Exercice 109. Une parabole roule sans glisser sur une droite.
a) Lieu du foyer. b) Enveloppe de l'axe de symétrie.

Exercice$^\flat$ 110. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points F tels que F soit le foyer d'une conique $\mathcal{C}_F$ de directrice l'axe (Ox) passant par les points $A(-1, 2)$ et $B(1, 1)$.
b) Pour chaque point F de $\mathcal{E}$, préciser la nature de la conique $\mathcal{C} - F$.

^{1}Exercice$^\flat$ 111. Lorsque λ décrit $]0, +\infty[$, trouver le lieu des sommets et des foyers de l'ellipse d'équation $\lambda x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Exercice$^\flat$ 112. Déterminer l'ensemble des projections orthogonales d'un foyer sur les tangentes d'une ellipse $\mathcal{E}$.

Exercice$^\flat$ 113. Déterminer la nature, les éléments caractéristiques puis tracer la conique d'équation $y^2 + 3x - 4y = 2$.

Exercice$^\flat$ 114. Déterminer la nature, les éléments caractéristiques puis tracer la conique d'équation $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$.

Exercice$^\flat$ 115. Déterminer les éléments caractéristiques puis tracer la conique d'équation $x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0$.

Exercice$^\flat$ 116. Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation dans ce repère de la parabole de foyer $(5, 2)$ et de directrice $\mathcal{D} : x - 1 = 0$.

Exercice$^\flat$ 117. Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation dans ce repère de l'ellipse de foyers $(\pm 1, 0)$ et d'exentricité $\frac{1}{2}$.

Exercice$^\flat$ 118. Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation dans ce repère de l'hyperbole de directrice d'équations $x = \pm 3$ et d'exentricité 2.

^{1}Exercice$^\flat$ 119. La normale et la tangente en un point M à une parabole $\mathcal{P}$ coupent l'axe focal respectivement en N et en T. Déterminer le lieu du point P_M tel que $NMTP_M$ soit un rectangle lorsque M décrit $\mathcal{P}$. Que peut on dire des abscisses des points M et N ?

Exercice$^\flat$ 120. A chaque point M d'une ellipse $\mathcal{E}$, on associe la projection orthogonale I de M sur l'axe focal, on associe l'un des deux points $P \in \mathcal{E}$ en lequel la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ est parallèle à la droite (OM) et on associe la projection orthogonale J du point P sur l'axe focal.
a) Calculer l'aire du triangle MOP (premier théorème d'Apollonius).
b) Calculer $OM^2 + OP^2$ (second théorème d'Apollonius) ainsi que $OI^2 + OJ^2$.

Exercice$^\flat$ 121. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et soit Δ une droite passant par F et coupant $\mathcal{E}$ en deux points M et N.
a) Prouver que $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN}$ est indépendant de la droite variable Δ.
b) Déterminer le minimum de $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FN^2}$ lorsque Δ varie.

Exercice$^\flat$ 122. Soit $\mathcal{P}$ un miroir parabolique de foyer F, d'axe focal Δ et de paramètre p. Prouver que le reflet d'un rayon lumineux parallèle à Δ en un point M de la parabole passe par le foyer F.

Exercice$^\flat$ 123. Soit $\mathcal{E}$ un billard elliptique de foyer F et F' , d'axe focal Δ et de paramètre p. Prouver qu'une boule partant du foyer F et faisant un rebond en un point M de l'ellipse $\mathcal{E}$ passe nécéssairement par le foyer F' (si elle est lancée assez fort, pour les esprits chagrins).

Exercice$^\flat$ 124. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{H}$ l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $xy = 1$.
Soient A, B, C trois points de l'hyperbole $\mathcal{H}$, d'abscisse respective a, b et c.
a) Montrer que l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle ABC est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ et déterminer ses coodonnées.
b) Soit α la perpendiculaire à (BC) passant par l'intersection de (BC) et de (Ox), soit β la perpendiculaire à (AC) passant par l'intersection de (AC) et de (Ox) et soit γ la perpendiculaire à (AB) passant par l'intersection de (AB) et de (Ox). Prouver que les droites α, β et γ sont concourantes en un point I.
c) Donner les coordonnés du point I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Mêmes questions que b) et c) pour les droites α', β', γ' définies avec (Oy) à la place de (Ox) et avec I' à la place de I.
e) Calculer $\vec{AI}.\vec{AI'}$, $\vec{BI}.\vec{BI'}$ et $\vec{CI}.\vec{CI'}$.
f) Écrire l'équation du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC et démontrer que $\mathcal{C}$ coupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ en un point H' qui est le symétrique de H par rapport à l'origine O.

Exercice$^\flat$ 125. Réduire et trouver les éléments caractéristiques de la conique

$$x^2 + 11y^2 - 10\sqrt{3}xy + 4y + 4\sqrt{3}x = 20.$$

[1]Exercice$^\flat$ 126. Soient $p > 0$, $q > 0$ et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ les paraboles d'équations respectives $y^2 = 2px$ et $y^2 = 2qx$. Déterminer les tangentes communes à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

[1]Exercice$^\flat$ 127. Soient deux paraboles distinctes de même axe focal et de même foyer F ayant un point en commun. Déterminer une mesure de l'angle des deux tangentes en ce point.

[1,1]Exercice$^\flat$ 128. Un point M d'une hyperbole se projette orthogonalement en H et en H' sur ses asymptotes. Montrer que le produit $MH.MH'$ reste constant lorsque M varie sur l'hyperbole.

Exercice$^\flat$ 129. Déterminer le lieu des points M d'ou l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une ellipse $\mathcal{E}$.

Exercice$^\flat$ 130. Réduire et trouver les éléments caractéristiques de la conique

$$x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0.$$

[1]Exercice$^\flat$ 131. Déterminer le lieu des points M d'ou l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole $\mathcal{P}$.

[1]Exercice$^\flat$ 132. Déterminer le lieu des points M d'ou l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une hyperbole $\mathcal{H}$.

Exercice$^\flat$ 133. Reconnaitre et tracer la courbe d'équation

$$x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$$

Exercice$^\flat$ 134. Reconnaitre et tracer la courbe d'équation

$$x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

Exercice$^\flat$ 135. Reconnaitre et tracer la courbe d'équation

$$x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

[1]Exercice$^\flat$ 136. Soient deux paraboles de même axe focal et de même foyer F ayant un point commun M. Déterminer une mesure de l'angle des deux tangentes en ce point.

[1]Exercice$^\flat$ 137. Un point M d'une hyperbole se projette orthogonalement en H et H' sur ses asymptotes. Montrer que le produit $MH.MH'$ est constant (i.e. qu'il ne dépend pas du choix du point M).

[1]Exercice$^\flat$ 138. Soit M un point d'une ellipse. On note I sa projection sur l'axe focal, P l'un des deux points de l'ellipse où la tangente est parallèle à (OM) et J la projection de P sur l'axe focal. Calculer l'aire du triangle MOP ainsi que les réels $OM^2 + OP^2$ et $OI^2 + OJ^2$.

[1]Exercice$^\flat$ 139. Montrer que le produit des distances des deux foyers d'une ellipse à l'une de ses tangentes est une constante indépendante de la tangente choisie (utiliser des mesures algébriques, en orientant la normale à la tangente).

[1]Exercice$^\flat$ 140. a) Déterminer les points du plan par lesquels passent deux tangentes à une ellipse $\mathcal{E}$ fixée.

b) même question avec la condition supplémentaire que les tangentes sont perpendiculaires.

[1]Exercice$^\flat$ 141. Déterminer les points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une hyperbole.

[1]Exercice$^\flat$ 142. Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

[1]Exercice$^\flat$ 143. Déterminer en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la nature de la conique

$$x^2 + 2axy + y^2 + 2bx - a^2 = 0.$$

[1/1]Exercice$^\flat$ 144. Déterminer le lieu du milieu I du segment $[MM']$ lorsque M et M' sont les intersections d'une ellipse fixe $\mathcal{E}$ avec une droite D variable de direction fixe.

Exercice$^\flat$ 145. Réduire les coniques d'équation

$(\mathcal{C}_1)$ $\quad 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$

$(\mathcal{C}_2)$ $\quad x^2 + \sqrt{x}y + 3x + 5y - 4 = 0$

$(\mathcal{C}_3)$ $\quad (2x + 3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0$

Donner leur équation réduite ainsi que le repère orthonormé associé.

Exercice$^\flat$ 146. a) Determiner une expression (dependant de ϑ) des sommets et des foyers de la conique

$$x^2 \sin^2(\vartheta) - xy \sin(2\vartheta) + y^2(1 + \cos^2(\vartheta)) = 9 \sin^2(\vartheta)$$

b) graphe du lieu des sommets et des foyers.

[1]Exercice 147. Déterminer l'ensemble des points d'une plaque carrée de coté a qui sont à égale distance du bord et du centre de la plaque.

(MP*) [2/1]**Exercice**$^\flat$ 148. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Soit Δ le diamètre parallèle à (AB).
Pour $M \in \mathcal{C}$, on note P, Q les intersections de (MA) et (MB) avec Δ. Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit MPQ.

9. Abscisse Curviligne

Exercice 149. On note Γ la courbe d'équation cartésienne dans $]0,\infty[^3$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ z = 2\ln x \end{cases}$$

Calculer l'abscisse curviligne en tout point de Γ en prenant pour origine le point M d'abscisse 1.

^{1}Exercice 150. Déterminer les coordonnées du centre de courbure en chaque point de l'arc paramétré en polaire par $\varrho(\vartheta) = \mathrm{e}^{\vartheta}$ pour $\vartheta \in \mathbb{R}$. Quelle est la longueur de la courbe pour $\vartheta \in \left]-\infty, 0\right]$?

^{1}Exercice 151. Déterminer les coordonnées du centre de courbure en chaque point de l'arc paramétré en polaire par $\varrho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$ pour $\vartheta \in \mathbb{R}$. Quelle est la longueur de la courbe pour $\vartheta \in [0, 2\pi]$?

$^{1}_{1}$Exercice 152. On considère l'arc paramétré par $M_t = (\cos 2t, \sqrt{2}\sin 2t, \cos 2t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.
a) Longueur ℓ de l'arc ?
b) Trouver le repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ en un point M_t.
c) Quel est le plan osculateur en $s = \ell/4$.
d) Soit p le point $(a, 0, -a)$. Calculer la distance entre p et la droite tangente à l'arc au point M_t.

10. Repère de Frenet

$^{2}_{2}$Exercice 153. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note Γ la courbe paramétrée par $x(t) := t - \sin t$ et $y(t) := 1 - \cos t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
a) Étudier et tracer Γ.
b) Déterminer le repère de Frenet et la courbure en tout point de Γ.
c) Calculer la longueur d'une arche et l'aire délimitée par une arche de Γ et l'axe (Ox).

$^{1}_{1}$Exercice 154. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation cartésienne $x^2 + 5y^2 = 5$ dans $\mathbb{R}^2$.
a) Déterminer l'ensemble des centres C des cercles $\mathcal{C}$ passant par $O = (0, 0)$ et tangents à $\mathcal{E}$.
b) Étude de la courbe obtenue.

$^{1}_{1}$Exercice 155. On considère l'arc paramétré par $M_t = (\cos 2t, \sqrt{2}\sin 2t, \cos 2t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.
a) Longueur ℓ de l'arc ?
b) Trouver le repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ en un point M_t.
c) Quel est le plan osculateur en $s = \ell/4$.
d) Soit p le point $(a, 0, -a)$. Calculer la distance entre p et la droite tangente à l'arc au point M_t.

$^{2}_{1}$Exercice 156. Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $f : I \to \mathbb{R}$ étant de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $M \in \mathcal{C}$, on note H la projection orthogonale de M sur Oy et N l'intersection de la normale à $\mathcal{C}$ avec (Oy).
a) Trouver les fonctions f pour lesquelles la mesure algèbrique $\overline{HN}$ reste égale à $k \in \mathbb{R}$ lorsque M décrit $\mathcal{C}$.
b) Préciser la nature des courbes $\mathcal{C}$ ainsi obtenues.

$^{1}_{1}$Exercice 157. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O et soient deux points M_1et M_2 sur $\mathcal{E}$.
a) prouver que (OM_1) est parallèle à la tangente à $\mathcal{E}$ en $M_2 \iff (OM_2)$ est parallèle à la tangente à $\mathcal{E}$ en M_1
b) En supposant que M_1 et M_2 soient dans cette disposition, calculer l'aire du triangle OM_1M_2.

$^{1}_{1}$Exercice 158. Démontrer qu'on définit une courbe plane en posant

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+bt}{1+t^2} \\ y = tx, \\ z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Nature ?

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 159. Démontrer que les plans d'équation $x\cos t + y\sin t + z\,\mathrm{ch}\,t = a\,\mathrm{sh}\,t \quad (t \in \mathbb{R})$ sont les plans osculateurs à un arc Γ que l'on determinera.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 160. a) Étude de l'astroïde de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b) Déterminer la longueur de l'astroïde.
c) Rayon de courbure ?
d) Déterminer la courbe orthoptique de l'astroïde, c'est à dire l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes à l'astroïde, orthogonales entre elles.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 161. a) Étude de la cardioïde d'équation polaire $\varrho(\vartheta) = a(1+\cos\vartheta)$.
b) Déterminer la longueur de la cardioïde.
c) Rayon de courbure ?
d) Déterminer la podaire du point O par rapport au cercle de rayon a et de centre $C(a,0)$, c'est à dire le lieu des projections orthogonales de O sur les tangentes au cercle.

$^{2}_{1}$Exercice 162. a) Déterminer l'ensemble des centres C des cercles $\mathcal{C}$ passant par $O=(0,0)$ et tangent à l'ellipse d'équation cartésienne $x^2+5y^2=5$ dans $\mathbb{R}^2$.
b) Étude de la courbe obtenue.

11. Courbure

$^{2}_{2}$Exercice 163. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note Γ la courbe paramétrée par $x(t) := t - \sin t$ et $y(t) := 1 - \cos t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
a) Étudier et tracer Γ.
b) Déterminer le repère de Frenet et la courbure en tout point de Γ.
c) Calculer la longueur d'une arche et l'aire délimitée par une arche de Γ et l'axe (Ox).

^{1}Exercice 164. Déterminer les coordonnées du centre de courbure en chaque point de l'arc paramétré en polaire par $\varrho(\vartheta) = \mathrm{e}^{\vartheta}$ pour $\vartheta \in \mathbb{R}$. Quelle est la longueur de la courbe pour $\vartheta \in \left]-\infty, 0\right]$?

[1]Exercice 165. Déterminer les coordonnées du centre de courbure en chaque point de l'arc paramétré en polaire par $\varrho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$ pour $\vartheta \in \mathbb{R}$. Quelle est la longueur de la courbe pour $\vartheta \in [0, 2\pi]$?

[1]Exercice 166. Pour $a > 0$, déterminer le rayon de courbure de la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = a(2\cos t + \cos(2t)) \\ y = a(2\sin t - \sin(2t)) \end{cases}$$

12. Hélices

[2,1]Exercice 167. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = t\cos(\ln t) \\ y(t) = t\sin(\ln t) \\ z(t) = t \end{cases} \qquad (t > 0).$$

a) cette courbe est-elle une hélice ? si oui, préciser son axe et son angle.
b) Rectifier cette courbe et déterminer la courbe décrite par son centre de courbure.
c) Calculer la torsion en un point de paramètre t.
d) Déterminer l'intersection Δ_t du plan Oxy et du plan osculateur au point de paramètre t.
e) Déterminer l'enveloppe de la famille des Δ_t.

[2,1]Exercice 168. Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramètrée par

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = \cos(t)^2\cos(2t) \\ y(t) = \cos(t)^2\sin(2t) \\ z(t) = 2\sin(t) \end{cases}$$

a) Quelles sont les coordonnées cylindriques du point de paramètre t ?
b) Déterminer en ce point la courbure et la torsion.
c) La courbe $\mathcal{C}$ est-elle une hélice ? Si oui, quel est son axe et son angle (entre la tangente et la direction fixe) ?

[1]Exercice 169. Montrer que la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t - t^3/3 \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t + t^3/3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

est une hélice. Déterminer le trièdre de Frenêt, la courbure et la torsion au point de paramètre t.

13. Enveloppes

Exercice 170. Dans le plan $\mathcal{P}$ euclidien, on se donne une droite fixe D et un point fixe $O \notin D$. Pour $P \in D$, on note Δ_P la droite perpendiculaire à (OP) en P.
Enveloppe de la famille de droite $(\Delta_P)_{P \in D}$?

Exercice 171. Soit $\mathcal{H}$ la courbe du plan d'équation cartésienne $xy = 1$ et soient A et B deux points de cette courbe tels que l'abscisse du point A soit deux fois celle du point b. Déterminer l'enveloppe de la droite (AB).

Exercice 172. a) Déterminer l'enveloppe de la famille de droites d'équation $D_t : x \sin t - y \cos t = \sin^2 t$.
b) Symétries de la courbe, tableau de variation de x, y, étude des points singuliers...

[1]*Exercice* 173. Soient deux droites secantes D, Δ du plan $\mathcal{P}$, O leur intersection et $\mathcal{A} > 0$. Déterminer l'enveloppe des droites (A, B) pour lesquelles $A \in D$, $B \in \Delta$ et l'aire du triangle OAB vaut $\mathcal{A}$ et en donner une équation cartésienne.

[1]Exercice 174. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites orthogonales se coupant en un point O. Pour $\ell > 0$, déterminer l'enveloppe des droites (AB) lorsque $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_1$ et $B \in \mathcal{D}_2$ vérifient $OA + OB = \ell$.

[1]Exercice 175. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites orthogonales se coupant en un point O. Pour $\ell > 0$, déterminer l'enveloppe des droites (A, B) lorsque $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_1$ et $B \in \mathcal{D}_2$ vérifient $OA^2 + OB^2 = \ell^2$.

[1]Exercice 176. Soient A, B deux points du plan, $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, $\mathcal{T}_A$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A et $\mathcal{T}_B$ la tangente à B en B. Pour chaque point M de $\mathcal{C}$, on note respectivement C l'intersection de (AM) et $\mathcal{T}_B$ et D l'intersection de (BM) et $\mathcal{T}_A$. Déterminer l'enveloppe des droites (CD) ainsi formées.

[1]Exercice 177. Soient A, B deux points distincts du plan et $\ell > \| AB \|$. Déterminer l'enveloppe des droites $\mathcal{D}$ telles que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{D})^2 + \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathcal{D})^2 = \ell$.

[2,1]Exercice 178. Soient $\mathcal{E}$ une ellipse de grand axe a, de petit axe b et de centre O.
a) trouver un paramétrage simple $t \mapsto M(t)$ de $\mathcal{E}$ et trouver une relation entre t et t' pour que $\vec{OM}(t)$ et $\vec{OM'}(t)$ soient orthogonaux.
b) Déterminer l'enveloppe des droites $\big(M(t)M(t')\big)$ vérifiant la condition de la question a)

[2,1]Exercice 179. Soit P la parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $c < 0$ et soit Δ la droite d'équation $x = c$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ l'unique point de P d'ordonnée t.
a) Trouver une équation de la droite $\mathcal{D}_t$ passant par $M(t)$ qui coupe P en un autre point $M(t_1)$ tel que les tangentes à P en $M(t)$ et $M(t_1)$ se coupent sur Δ.
b) Quelle est l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t$ ainsi obtenues ?

[2,1]Exercice 180. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = t\cos(\ln t) \\ y(t) = t\sin(\ln t) \\ z(t) = t \end{cases} \qquad (t > 0).$$

a) cette courbe est-elle une hélice ? si oui, préciser son axe et son angle.
b) Rectifier cette courbe et déterminer la courbe décrite par son centre de courbure.
c) Calculer la torsion en un point de paramètre t.
d) Déterminer l'intersection Δ_t du plan Oxy et du plan osculateur au point de paramètre t.
e) Déterminer l'enveloppe de la famille des Δ_t.

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 181. Démontrer que les plans d'équation $x \cos t + y \sin t + z \operatorname{ch} t = a \operatorname{sh} t \quad (t \in \mathbb{R})$ sont les plans osculateurs à un arc Γ que l'on determinera.

$_{1}$Exercice 182. Enveloppe de la famille de droite $\{D_\vartheta\}_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ passant par $M_\vartheta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ et dirigée par $u_\vartheta = (\cos 2\vartheta, \sin 2\vartheta)$.

(MP) $^{3}_{1}$Exercice 183. Montrer que les plans d'équation $P_t : x \cos t + y \sin t + z \operatorname{ch} t = a \operatorname{sh} t$ sont les plans osculateurs d'un arc birégulier Γ que l'on déterminera

14. Développées

$^{3}_{2}$Exercice 184. On dit qu'une courbe $\mathcal{C}$ est une cardioïde si elle admet dans un repère orthonormé une équation polaire du type $r = a(1 + \cos \vartheta)$ ou $a > 0$.
a) Montrer que la développée d'une cardioïde est une cardioïde.
b) Quelle transformation géométrique simple permet de passer de la courbe à sa développée ?
c) Qu'en déduisez vous pour les développantes d'une cardioïde ?

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 185. On dit qu'une courbe $\mathcal{C}$ est une cycloïde si c'est la trajectoire d'un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite.
a) Trouver l'équation vérifiée par les cycloïdes. b) Déterminer la développée d'une cycloïde.
b) Quelle transformation géométrique simple permet de passer de la courbe à sa développée ?
c) Qu'en déduisez vous pour les développantes d'une cycloïde ?

^{1}Exercice 186. Développée et développantes de la chainette $y = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

^{1}Exercice 187. Développée de

$$\begin{cases} x = 2(1 + \cos^2 t) \sin t \\ y = \sin t \sin(2t) \end{cases}$$

15. Développantes

$^{1}_{2}$Exercice 188. Trouver le lieu des centres de courbure de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$^{1}_{1}$Exercice 189. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Trouver une représentation paramétrique de la développante de $\mathcal{C}$ qui passe par A de coordonnées (a, b). Y a t'il des points A interdits ?

$^{1}_{1}$Exercice 190. Développantes de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t \\ y = 2 \operatorname{sh}^2 t \end{cases}$$

Reconnaitre celle qui passe par le point $A = (-2, 0)$.

^{1}Exercice 191. Développée et développantes de la chainette $y = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

16. Roulement

$^{2}_{1}$Exercice 192. Une parabole roule sans glisser sur une droite.
a) Lieu du foyer. b) Enveloppe de l'axe de symétrie.

$^{2}_{1}$Exercice 193. Un cercle de rayon R roule sans glisser sur une parabole d'équation $y = 2px^2$. Trajectoire d'un point du cercle ?

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 194. On dit qu'une courbe $\mathcal{C}$ est une cycloïde si c'est la trajectoire d'un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite.
a) Trouver l'équation vérifiée par les cycloïdes. b) Déterminer la développée d'une cycloïde.
b) Quelle transformation géométrique simple permet de passer de la courbe à sa développée ?
c) Qu'en déduisez vous pour les développantes d'une cycloïde ?

17. Surfaces

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 195. On appelle **Contour apparent conique** d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ vue d'un point $A \in \mathbb{R}^3$ l'ensemble des points $M \in S$ tels que le plan tangent à S en M contienne la droite (MA).
a) Déterminer le contour apparent de l'ellipsoïde $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ vu du point $(0, 1, 1)$.
b) Équation paramétrique/cartésienne du cône circonscrit à S de sommet A. (l'ensemble des droites passant par A et tangentes à S (dans un plan tangent de S en un point M)).

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 196. On appelle **Contour apparent cylindrique** d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ de direction $\vec{u} \neq \vec{0}$ l'ensemble des points $M \in S$ tels que le plan tangent à S en M contienne la droite $\mathcal{D}(M, \vec{u})$.
a) Déterminer le contour apparent cylindrique de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2$ selon $\vec{u} = (1, 1, 1)$.
b) Équation paramétrique/cartésienne du cylindre de direction $\vec{u}$ circonscrit à S. (l'ensemble des droites de direction $\vec{u}$ tangentes à S (dans un plan tangent de S en un point M)).

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 197. On appelle **Ligne de niveau** de la surface S relativement à la direction $\vec{u}$ toute courbe obtenue par intersection de S avec un plan de vecteur normal $\vec{u}$.
Déterminer les courbes de niveau selon la direction $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ des surfaces :
a) $S_1 : x^2 + 2xz - yz = 0$ b) $S_2 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ c) $S_3 : x^2 - y^2 = z$
d) $S_4 : x^2 + y^2 - z^2 = -1$ e) $S_5 : x^2 + xy + y^2 = 1$.

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 198. On appelle **Ligne de plus grande pente** de la surface S selon la direction $\vec{k}$ toute courbe Γ tracée sur S telle qu'en chacun de ses points M, la tangente à Γ en M soit incluse dans le plan $(M, \vec{k}, \vec{n})$ où $\vec{n}$ est la normale à S en M.
Pour $\vartheta \in \mathbb{R}$, vérifier que les courbes $t \mapsto (\cos\vartheta \cos t, \sin\vartheta \cos t, \sin t)$ sont des lignes de plus grande pente de la sphère de centre O et de rayon 1 dans la direction $\vec{k}$.

Exercice 199. a) Équation du cylindre C de révolution de rayon R et d'axe

$$(D) \qquad \begin{cases} x = z + 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

b) Condition nécessaire et suffisante sur R pour que Oz soit tangent à C.

$^{1}_{1}$Exercice 200. Condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $S : x^2 - 2\lambda yz = 0$ soit de révolution. Axe ?

Exercice 201. Équation du cône de sommet $(0, a, 0)$ s'appuyant sur

$$\begin{cases} x = a\cos\vartheta\sin\vartheta \\ y = a\sin^2\vartheta \\ z = a\cos\vartheta \end{cases}$$

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 202. Équation du cylindre C de génératrice dirigées par $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et circonscrit à la surface d'équation $x^2 + y^2 - 2z = 0$.

$^{2}_{1}$Exercice 203. Soit S la surface d'équation $z = x^2(x - y)$. Étudier les droites tracées sur S.

$^{3}_{2}$Exercice 204. On considère la nappe

$$\begin{cases} x = u\cos t \\ y = u\sin t \\ z = t \end{cases} \qquad (u, t) \in \mathbb{R}^2$$

1) Montrer que la nappe est réglée. Est-elle développable ?
2) Calculer l'aire du morceau de surface défini par $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

$^{2}_{1}$Exercice 205. Déterminer une équation cartésienne et la nature de la surface engendrée par la rotation de la droite D autour de Δ avec

$$D : \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \Delta : \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

^{1}Exercice 206. Nature de l'ensemble des points equidistants de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 207. Droites tracées sur $x^3 + y^3 + z^3 = 1$?

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 208. Soit $a > 0$. On note $\mathcal{D}$ et Δ les deux droites données par

$$D : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Delta : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

a) Equation du cône Σ de revolution d'axe Δ et contenant Oz ?
b) Equation de la surface engendrée par la perpendiculaire commune à D et à une génératrice variable de Σ ?

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 209. Montrer que la surface d'équation

$$(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 = 1$$

est une surface de révolution dont on donnera axe et méridienne.

$^{2}_{1}$Exercice 210. Soit $a > 0$. Donner un paramétrage et une équation cartésienne de la surface constituée par l'ensemble des cercles tangents en O à Oz et rencontrant la droite d'équation

$$D : \quad \begin{cases} x = 2a \\ z = 0 \end{cases}$$

[2]Exercice 211. Pour $a, b > 0$, équation cartésienne de la surface engendrée par les droites s'appuyant sur

$$P : \quad \begin{cases} y^2 = ax \\ z = 0 \end{cases}, \qquad D : \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = b \end{cases} \quad \text{et} \quad D : qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = -b \end{cases}$$

(MP) [3]Exercice 212. Soit $a > 0$. Déterminer les arcs tracés sur le cylindre D d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, de classe $\mathcal{C}^2$ biréguliers tels que la binormale en tout point soit coplanaire ave cla droite $D : \{x = a, y = 0\}$.

(MP) [3]Exercice 213. Montrer que les plans d'équation $P_t : x \cos t + y \sin t + z \operatorname{ch} t = a \operatorname{sh} t$ sont les plans osculateurs d'un arc birégulier Γ que l'on déterminera

(MP) [2]Exercice 214. Un cercle de rayon R varie en restant tangent aux trois plans d'un trièdre trirectangle. Déterminer le lieu du centre de ce cercle.

[1]Exercice 215. Soit S une surface régulière définie par $O\vec{M} = \vec{F}(u, v)$. À chaque point M de S, on associe un point M' à M en posant

$$M\vec{M}' = a \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \|}.$$

Lorsque M décrit S, le point M' décrit une surface M'. Montrer que les plants tangents à S en M et à S' en M' sont parallèles.

Exercice 216. Démontrer que la surface d'équation

$$\frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x} + \frac{1}{x - y} = 1$$

est un cylindre dont on donnera une section droite.

[1]Exercice 217. Ensemble des points équidistants d'un plan et d'une droite ?

[2]Exercice 218. Intersection d'un tore de centre O et d'un plan passant par O et tangent au tore.

18. Quadriques

[2]Exercice 219. Soient $a > 0$, $S := \{(x, y, z) \in [0, +\infty[^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, $t \in [0\pi/2]$, $H := \{(a \cos t, a \sin t, at/(2\pi)) : t \in \mathbb{R}\}$ et E l'hélicoïde droit d'axe Oz et de directrice H. Aire de la partie de S située au dessus de E.

19. Nombres Complexes

Exercice$^\flat$ 220. Exprimer $\sin(3x)$, $\cos(3x)$ et $\tan(3x)$ respectivement en fonction de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$.

Exercice$^\flat$ 221. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$-3-3i, \qquad (1+i)^n, \qquad -\cos\vartheta + i\sin\vartheta, \qquad \sin\vartheta + i\cos\vartheta \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Exercice$^\flat$ 222. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 223. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice$^\flat$ 224. Établir la formule du parallélogramme, c'est-à-dire que :

$$\forall (z,s) \in \mathbb{C}^2, \quad |z+s|^2 + |z-s|^2 = 2|z|^2 + 2|s|^2.$$

^{1}Exercice$^\flat$ 225. Pour $0 \leqslant \vartheta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3\cos\vartheta + 1 = 0$.

Exercice$^\flat$ 226. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1-i)z^2 - (5-i)z + 10 = 0$.

Exercice$^\flat$ 227. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer les racines carrées des nombres suivants :

$$\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{5}}, \qquad i, \qquad 1+i, \qquad 1+2i, \qquad 2i-7, \cos(2x) + i\sin(2x).$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 228. a) Mettre sous forme trigonométrique les nombres $z_1 := \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 := 1-i$ et $Z := \dfrac{z_1}{z_2}$.
b) En déduire l'expression de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$, à l'aide de radicaux.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 229. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.
a) Etablir que $|z'| = 1$, montrer que le nombre $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
b) Le point M étant donné, en déduire une construction géométrique du point M'.

Exercice$^\flat$ 230. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 231. Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Calculer les sommes suivantes :

$$S := \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{k}, \qquad T := \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad U := \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{k}.$$

$^2_2$Exercice$^\flat$ 232. Pour $(\vartheta, \vartheta') \in \mathbb{R}^2$, déterminer le module et l'argument de $\mathrm{e}^{i\vartheta} + \mathrm{e}^{i\vartheta'}$ et $\mathrm{e}^{i\vartheta} - \mathrm{e}^{i\vartheta'}$. En déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{1-u}{1+u}$ quand $u \neq -1$ est de module 1.

Exercice$^\flat$ 233. Mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $x + iy$:

$$a := (1+i)(1+2i), \qquad b := i(\sqrt{5}-i)(i-1), \qquad c := (1+2i)^3, \qquad d := \frac{18+26i}{-2+2i}, \qquad f := \frac{1}{2+i} - \frac{1}{3-i}.$$

Exercice$^\flat$ 234. Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique :

$$a := \sqrt{3} + i, \qquad b := 5 + 3i, \qquad c := \frac{7}{\sqrt{2}+i}, \qquad \frac{3-4i}{(1+i)^2}$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 235. Soit $a > 0$. Montrer que les solutions de l'équation $\dfrac{a-z}{a+z} = \mathrm{e}^{2z}$ vérifient $\Re e\ z = 0$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 236. Soient $a > 0$ et $n \geqslant 1$. Expliciter en fonction de a les solutions de l'équation $(1-ia)(1-z)^n = (1+ia)(1+z)^n$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 237. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 238. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n - (z-i)^{2n} = 0$.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 239. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$.

$^2_1$Exercice$^\flat$ 240. Pour quels nombres complexes z, les points A, B, C d'affixes z, z^2 et z^4 sont-ils alignés ?

$^1_1$Exercice$^\flat$ 241. Déterminer l'image de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ et } z \neq 1\}$ par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 242. Du calcul de $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice$^\flat$ 243. Calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ et en déduire $\cos\dfrac{\pi}{10}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 244. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 245. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3\tan x = 2\cos x$.

$^2_1$Exercice$^\flat$ 246. Pour $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\cos^k x$.

Exercice$^\flat$ 247. Déterminer et tracer l'ensemble des points Mdu plan dont l'affixe z vérifie

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2.$$

Exercice$^\flat$ 248. Déterminer les racines $5^{\text{ièmes}}$ du nombre $1 + i\sqrt{3}$.

Exercice$^\flat$ 249. Déterminer les racines $5^{\text{ièmes}}$ du nombre $1 + i\sqrt{3}$.

Exercice$^\flat$ 250. Trouver sans calcul les formes algébriques et trigonométriques des racines cubiques de -8.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 251. Dans le plan, quel est l'ensemble des points d'affixe z tel que $\dfrac{z+1}{z}$ soit imaginaire pur.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 252. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 253. Pour $z \in \mathbb{C}$, prouver que $|\Re e\ z| + |\Im m\ z| \leqslant |z|\sqrt{2}$.

Exercice$^\flat$ 254. Montrer que $|z+i| = |z-i|$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 255. Montrer que la fonction $f(x) := \cos^4(x)+\cos^4(x+\frac{\pi}{4})+\cos^4(x+\frac{\pi}{2})+\cos^4(x+\frac{3\pi}{4})$ est constante sur $\mathbb{R}$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 256. On pose $u := \cos\frac{2\pi}{9}$, $v := \cos\frac{4\pi}{9}$ et $w := \cos\frac{8\pi}{9}$.
Calculer $u+v+w$, $uv+vw+uw$ et uvw.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 257. On pose $u := \cos\frac{2\pi}{7}$, $v := \cos\frac{4\pi}{7}$ et $w := \cos\frac{6\pi}{7}$.
Calculer $u+v+w$, $uv+vw+uw$ et uvw.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 258. Soient (a,b,c,d) des nombres complexes distincts deux à deux. On pose

$$x := \frac{a-d}{b-c}, \qquad y := \frac{b-d}{c-a} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{c-d}{a-b}.$$

Démontrer que si x et y sont imaginaires purs, alors z l'est aussi.

Exercice$^\flat$ 259. Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad |a-b|^2 \leqslant \big(1+|a|^2\big)\big(1+|b|^2\big).$$

$^{3}_{2}$Exercice$^\flat$ 260. a) Pour $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $u \neq 0 \neq 0$, prouver que

$$\left|\frac{u}{|u|^2} - \frac{v}{|v|^2}\right| = \frac{|u-v|}{|uv|}.$$

b) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, prouver que $|x|.|y-z| \leqslant |y|.|x-z| + |z|.|x-y|$.
c) En déduire l'inégalité de Ptolémé :

$$\forall (u,v,w,z) \in \mathbb{C}^4, \qquad |u-v|.|w-z| \leqslant |u-w|.|v-z| + |u-z|.|v-w|.$$

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 261. a) Donner la forme algébrique de $z = (5-i)^4(1+i)$.
b) Calculer les arguments respectifs de $5-i$ et z.
c) En déduire la formule de Machin :

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 262. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système $\begin{cases} x\sin a + y\sin b = \sin c \\ x\cos a + y\cos b = \cos c \end{cases}$

$_{1}$Exercice$^\flat$ 263. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| = |b| = 1$ et $a \neq b$ et $a \neq -b$.
a) Montrer que $\dfrac{1+ab}{a+b}$ est un réel.
b) Montrer que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, le nombre

$$\frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b}$$

est un imaginaire pur.

$_1$Exercice$^\flat$ 264. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ la fonction qui à z associe

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a) Donner l'image par f du cercle de centre O et de rayon R.
b) Donner l'image par f de la demi-droite partant de O et d'angle polaire ϑ.

$_1$Exercice$^\flat$ 265. On pose $P := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > \frac{1}{2}\}$, $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \qquad f(z) := \frac{z - 2i}{z + i}$$

a) En notant $z = x + iy$ et $z' = f(z) = u + iv$, exprimer z en fonction de z' et inversement, puis exprimer x et y en fonction de u et v et inversement.

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et que sa restriction $f : P \to D$ sont des applications bijectives.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 266. Soit A le point d'affixe $1/2$ du plan complexe orienté $\mathcal{P}$ et soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui a un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z - z^2.$$

Montrer que le disque fermé $\mathcal{D}$ de centre A et de rayon $1/2$ est stable par f, c'est à dire que $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 267. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$ et représenter dans le plan complexe les points admettant ces solutions pour affixes.

Exercice 268. Pour chaque nombre complexe z, prouver que $|\mathrm{e}^z - 1| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} - 1 \leqslant |z|\mathrm{e}^{|z|}$.

(Fac) $^2_1$Exercice$^\flat$ 269. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a \neq b$.
1) Montrez que $|a| = |b|$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = ki(a - b)$.
2) En déduire que le polynôme $X^2 - sX + p$ admet 2 racines distinctes de même module si, et seulement si, il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $s^2 = \dfrac{4\lambda}{1+\lambda}p$.

^{1}Exercice$^\flat$ 270. Simplifier les expressions suivantes :

$$A := \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right),$$
$$B := \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{10}\right).$$

^{1}Exercice$^\flat$ 271. Trouver les solutions réelles de l'équation

$$\tan\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \tag{19.1}$$

^{1}Exercice$^\flat$ 272. Trouver les solutions réelles de l'équation

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right). \tag{19.2}$$

^{1}Exercice$^\flat$ 273. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)$.

^{1}Exercice$^\flat$ 274. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x)\tan(2x)=1$.

^{1}Exercice$^\flat$ 275. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2\cos^2 x+\sin x+1=0$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 276. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x=2\cos x^2$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 277. Calculer une valeur exacte de $\sin\frac{2\pi}{12}$, de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\tan\frac{7\pi}{12}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 278. Pour $x\in\mathbb{R}$, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x\cos^3 x$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 279. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6-(1-i)z^3-i=0$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 280. Soit $\vartheta\in\mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2\cos(\vartheta)(1+\cos\vartheta)z^2+(1+\cos\vartheta)^2=0$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 281. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

(MP) $^{3}_{2}$Exercice$^\flat$ 282. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 283. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 284. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que les points I et M' d'affixe i et iz soient alignés avec M. Déterminer alors l'ensemble des points M', lorsque M décrit E.

^{1}Exercice$^\flat$ 285. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 286. Soit $n\geqslant 1$ un entier. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n}-2z^n\cos\vartheta+1=0$

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 287. Pour $n\geqslant 1$ et $-\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n=\dfrac{1-i\tan\vartheta}{1+i\tan\vartheta}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 288. Trouver les couples (x,y) de nombres réels vérifiant le système $\begin{cases}\tan x+\tan y=1,\\ \tan(x+y)=\dfrac{4}{3},\end{cases}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 289. Pour $n\geqslant 1$ et $x\in\mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 290. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+8i=|z|^2-2$.

^{1}Exercice$^\flat$ 291. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

$^{3}_{1}$Exercice$^\flat$ 292. Montrer qu'un triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, les affixes a, b et c de ses sommets vérifient

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 293. Dans le plan complexe, on considère trois points $A(2+i)$, $B(-1+3i)$ et $C(-2)$.
a) Déterminer l'affixe du point D pour lequel $ABCD$ est un parallélogramme.
b) Calculer l'affixe de l'iso-barycentre G de $ABCD$.
c) Déterminer le couple (α, β) de nombres complexes tel que l'application $z \mapsto \alpha z + \beta$ corresponde à la similitude directe de centre G envoyant A sur B.

^{1}Exercice$^{\flat}$ 294. Montrer que deux nombres complexes a et b ont même module si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = \lambda i(a - b)$.

(Λ) $^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 295. Pour $a \in \mathbb{R}$, trouver les solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du système

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a + x) + \cos(a + y) = 0 \\ \sin a + \sin(a + x) + \sin(a + y) = 0 \end{cases}$$

$^{3}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 296. Pour $n \geqslant 1$ et $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, prouver que

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}.$$

20. Trigonométrie

$_{1}$Exercice$^{\flat}$ 297. Soient $(\alpha, \beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$ tels que $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ et $\tan \beta = \frac{1}{3}$.
Calculer $\tan(\alpha + \beta)$ et en déduire la valeur de $\alpha + \beta$.

$^{2}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 298. Trouver une expression simple de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 299. Expliciter l'unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P\left(\cos \frac{2k\pi}{7}\right) = 0$ pour $k \in \{2, 4, 6\}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 300. Trouver une expression simple de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \cos(3x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 301. Calculer $\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5)$ et $\cos(2\pi/5)\cos(4\pi/5)$. En déduire $\cos(2\pi/5)$.

$(\mathcal{K})$ $^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 302. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que

$$\begin{aligned} \cos(x + y)\cos(x - y) &= \cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos^2(y) - \sin^2(x), \\ &= \frac{1 - \tan^2(x)\tan^2(y)}{(1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 y)} \text{ si les tangentes sont définies} \end{aligned}$$

$(\mathcal{K})$ ^{1}Exercice$^{\flat}$ 303. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$. Lorsque les tangentes sont définies, prouver que

$$\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) - \tan(x)\tan(y)\tan(z) = \frac{\sin(x + y + z)}{\cos(x)\cos(y)\cos(z)}.$$

$(\mathcal{K})$ ^{2}Exercice$^{\flat}$ 304. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, prouver que le nombre $(\cos x-\cos(y-z))\,(\cos x-\cos(y+z))$ est égal à
$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-2\cos(x)\cos(y)\cos(z)-1.$$
Puis, en déduire que
$$\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x)-2\cos(x-y)\cos(y-z)\cos(z-x)=1.$$

$^{3}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 305. Trouver les solutions $f\in\mathcal{C}\big(\,[0,1[\,,\mathbb{R}\big)$ de l'équation fonctionnelle
$$\forall x\in[0,1[\,,\qquad f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=(1+x^2)f(x).$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 306. Montrer que $1+\dfrac{1}{\cos(2x)}=\dfrac{\tan(2x)}{\tan(x)}$ et en déduire une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\cos(2^k x)}\right)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 307. Prouver que
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |\sin x|\leqslant|x|.$$
En déduire que
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |\mathrm{e}^{ix}-1|\leqslant|x|.$$
Quand l'égalité est-elle réalisée ?

$^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 308. a) Donner la forme algébrique de $z=(5-i)^4(1+i)$.
b) Calculer les arguments respectifs de $5-i$ et z.
c) En déduire la formule de Machin :
$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

$^{2}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 309. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

(a) $$\cos^3(x)+\sin^3(x)=1$$
(b) $$\cos^4(x)+\sin^4(x)=1$$
(c) $$\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1$$
(d) $$\cos^n(x)+\sin^n(x)=1$$

$^{3}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 310. Montrez que $\displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$ pour $n\geqslant1$ et $x\in\mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 311. Montrer que $\displaystyle\sum_{0\leqslant k<n}\frac{1}{\cos(kx)\cos(kx+x)}=\frac{\tan nx}{\sin x}$ pour $n\geqslant1$ et $x\notin\pi\mathbb{Q}$.

(Λ) $^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 312. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$.

(Λ) $^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 313. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=\sqrt{2}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 314. Le but de cet exercice est la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E) \qquad \sin(7x) - \sin(3x) - \sin(x) = 0.$$

a) Montrer qu'il existe un polynôme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(7x) - \sin(3x) - \sin(x) = \sin(x) P\big(\sin^2(x)\big).$$

b) Trouver une racine r évidente du polynôme P et diviser P par $X - r$.
c) Factoriser le polynôme P.
d) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice$^\flat$ 315. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$.

(A) $^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 316. Pour $a \in \mathbb{R}$, trouver les solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du système

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a + x) + \cos(a + y) = 0 \\ \sin a + \sin(a + x) + \sin(a + y) = 0 \end{cases}$$

21. Nombres entiers

$^{3}_{1}$Exercice$^\flat$ 317. Soient m et n deux entiers strictements positifs.
a) Si $n \geqslant m$, combien y a t'il d'applications $f : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, n\}$ strictement croissantes ?
b) Combien y a t-il d'applications $f : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, n\}$ croissantes (au sens large) ?

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 318. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 319. Trouver une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} k x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 320. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) := [x] + [-x]$. Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que

$$0 \leqslant [nx] - n[x] \leqslant n - 1$$

et en déduire $\left[\frac{[nx]}{n}\right]$.

$^{1}_{1}$*Exercice*$^\flat$ 321. Exprimer en fonction de $n \geqslant 2$ et de $x \in \mathbb{R}$ les sommes

$$A := \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}, \qquad B := \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k},$$

$$C := \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}, \qquad D := \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k},$$

$^{3}_{3}$*Exercice*$^{\flat}$ 322. On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une surjection $f : N \to E$.
a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
b) Prouver que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad f(m,n) := \frac{m+n+1}{2}(m+n)+n$$

est une bijection.
c) En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, puis que $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
d) Montrer par l'absurde que $\mathbb{R}$ est dénombrable.

$$y = c_0, c_1 c_2 c_3 c_4 \cdots c_n \cdots$$

22. Groupes

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 323. a) Montrer que l'intervalle $I =]-1,1[$ muni de la loi

$$x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$$ forme un groupe abélien.

b) Trouver un isomorphisme de groupe entre $(I, \star)$ et $(\mathbb{R}, +)$.

$^{2}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 324. Soit G un groupe (noté multiplicativement). Pour $a \in G$, on note ϕ_a l'application

$$\begin{aligned} \phi_a : G &\to G \\ x &\mapsto axa^{-1} \end{aligned}.$$

a) Pour $a \in G$, montrer que l'application ϕ_a est un automorphisme de G.
b) Prouver que l'ensemble $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G forme un groupe pour la loi $\circ$.
c) Prouver que l'application $\begin{aligned} \Phi : (G, *) &\to (\mathrm{Aut}(G), \circ) \\ a &\mapsto \phi_a \end{aligned}$ est un morphisme de groupe.
d) Que vaut l'ensemble $\{a \in G : \Phi(a) = 1\}$?

$^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 325. Pour $\vartheta \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & -\sin 2\vartheta & \sin^2 \vartheta \\ \cos\vartheta \sin\vartheta & \cos 2\vartheta & -\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin^2\vartheta & \sin 2\vartheta & \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$.
a) Calculer $\operatorname{dét} \Gamma_\vartheta$.
b) Montrer que $\{\Gamma_\vartheta\}_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ forme un groupe.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 326. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x * y := (x^3 + y^3)^{1/3}$. Prouver que $(\mathbb{R}, *)$ forme un groupe.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 327. Pour $(x,y) \in]-1,1[$, on pose $x * y := \dfrac{x+y}{1+xy}$. Prouver que $\big(]-1,1[\,, *\big)$ forme un groupe.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 328. Soit $(G, *)$ un groupe. Prouver que l'ensemble $\{x \in G : \forall y \in G, x * y = y * x\}$ muni de la loi $*$ forme un groupe.

Exercice$^\flat$ 329. Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$.
a) Montrer que l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

$$(i) \qquad \exists \delta \geqslant 0, \quad G=\{n\delta : n\in\mathbb{Z}\}=\delta\mathbb{Z} \quad (G \text{ est discret dans } \mathbb{R})$$

$$(ii) \qquad \forall (x,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\,]0,\infty[\,, \quad G\cap\,]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\,\neq\varnothing \quad (G \text{ est dense dans } \mathbb{R})$$

b) En déduire que $\{a+b\sqrt{2} : (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Que peut on en déduire pour les sous groupes H de $\big(]0,\infty[\,,\times\big)$?

Exercice$^\flat$ 330. Soit G un groupe noté miltiplicativement et soient deux éléments a et b de G vérifiant $a^2b=ba$ et $b^2a=ab$. Montrer que $a=b=1$.

(MP) $\frac{3}{3}$Exercice$^\flat$ 331. Soit G un groupe tel que $x^2=\mathrm{e}$ pour $x\in G$.
a) Démontrer que G est abélien.
b) Soient $H\neq G$ un sous-groupe de G et $a\in G\setminus H$. Que peut on dire de $H\cup aH$?
c) Lorsque G est fini, démontrer que son cardinal est une puissance de 2.

(MP) $\frac{3}{2}$Exercice$^\flat$ 332. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\{f_1,\cdots,f_n\}$ un sous groupe fini de $\mathcal{G}l(E)$.
a) Démontrer que $f:=(f_1+\cdots+f_n)/n$ est un projecteur (i.e. $f^2=f$).
b) Démontrer que $\mathrm{Im\ f}=\cap_{\mathrm{1\leqslant i\leqslant n}}\mathrm{Ker(f_i-I_E)}$.

23. Anneaux

(MP) $\frac{3}{2}$*Exercice*$^\flat$ 333. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on pose

$$M(x,y,z):=\begin{pmatrix} x & y & z\\ 2z & x & y\\ 2y & 2z & x\end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $K:=\{M(x,y,z):(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3\}$ forme un sous anneau de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$.
b) Montrer que la multiplication est commutative dans K.
c) Montrer que $(K,+,\times)$ est un corps, c'est à dire que chaque matrice non nulle $M\in K$ est inversible.

(MP) $\frac{3}{1}$Exercice$^\flat$ 334. Lorsque $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, montrer que $A:=\begin{pmatrix} a & c & b\\ b & a+c & b+c\\ c & b & a+c\end{pmatrix}$ est inversible.

$\frac{1}{1}$Exercice$^\flat$ 335. On munit l'ensemble $E=\mathcal{F}(\mathbb{N}^*,\mathbb{C})$ de la loi $\star$ définie par

$$(f\star g)(n)=\sum_{d|n} f(d)g(n/d) \qquad (n\in\mathbb{N}^*).$$

a) Montrer que $(E,+,\star)$ est un anneau. Quel est son élément unité ?
b) Montrer que f est inversible si, et seulement si, $f(1)\neq 0$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 336. Soit $(A,+,.)$ un anneau vérifiant $\forall x \in A, x^2 = x$ (anneau de Boole).
a) Donner un exemple simple d'anneau de Boole.
b) Montrer que $2x = 0$ pour chaque $x \in A$.
c) En déduire que A est commutatif.
d) Montrer que Card $A \neq 3$.
e Lorsque que Card $A > 2$, montrer que A n'est pas intégre.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 337. On munit l'ensemble $A := \left\{a + b\sqrt{2} : (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ de l'addition et de la multiplication usuelles.
a) Montrer que $(A,+,.)$ est un anneau, commutatif et intégre, inclus dans $\mathbb{R}$.
b) Pour $x = (a + b\sqrt{2})$, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que $N(xy) = N(x)N(y)$ pour $(x,y) \in A^2$.
c) Prouver que x est inversible dans A si, et seulement si, $N(x) = \pm 1$.
d) Trouver une infinité d'éléments inversibles.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 338. Quel est la structure de E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$ si on le munit des opérations usuelles $+, \cdots, \times$?

(MP) Exercice$^\flat$ 339. Dans $\mathbb{Z}^2$ on défini la loi de composition $\star$ par

$$(a,b) \star (c,d) = (ac, d + (-1)^d b)$$

Étudier les propriétés de cette loi : associativité, commutativité, élément neutre et éléments symétrisables.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 340. Pour $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, on pose $x \dagger y = x + y - 1/2$ et $x \star y = a + b - 2ab$.
Prouver que $\mathbb{R}$ muni des lois $\dagger$ et $\star$ est un corps commutatif.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 341. Soit ω une racine de $X^2 + bX + c = 0$ avec $b^2 - 4c < 0$ et soit $\mathbb{Z}[\omega]$ l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{z = p + q\omega : (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

a) Démontrer que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z}[\overline{\omega}]$.
b) Pour $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ démontrer qu'il existe un unique coupe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $z = p + q\omega$.
c) Dans le cas $b = 0$ et $c = 1$, déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\omega]$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 342. Soit E un ensemble. On rappelle que la différence symétrique Δ est définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E par

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \qquad A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif *(avec les 10 axiomes..)*
b) l'anneau précédent est il intégre ? Quels éléments sont inversibles ?
c) Soit C un sous ensemble de E. Montrer que $\mathcal{A} := \{\varnothing, E, C, E \setminus C\}$ est un sous anneau de $(\mathcal{P}(E), \cup, \Delta)$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 343. On pose $\mathbb{Q}[i] := \{a + ib : (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.
a) Montrer que $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est un corps commutatif.
b) Montrer que l'application $\varphi : z \to \overline{z}$ est un automorphisme de $\mathbb{Q}[i]$.
c) Pour $(a,b) \in \mathbb{Q}[i]^2$, on pose $N(a + ib) := a^2 + b^2$. Prouver que l'on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}[i]^2, \qquad N(xy) = N(x)N(y).$$

d) Determiner les éléments x de $\mathbb{Z}[i]$ possédant un inverse dans $\mathbb{Z}[i]$?

Exercice$^\flat$ 344. Montrer que le centre $Z(A) := \{x \in A : \forall a \in A, xa = ax\}$ d'un anneau $(A, +, \times)$ est un anneau pour les mêmes lois.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 345. Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\forall x \in A,\ x^2 = x$.
a) Montrer que $\forall x \in a, x + x = 0$.
b) En déduire que l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 346. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit qu'un élément x de A est nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.
a) Soient x et y dans A tels que xy soit nilpotent. Prouver que yx est nilpotent. b) Soient x et y deux éléments nilpotents de A, qui commuttent. Prouver que xy et $x + y$ sont nilpotents
c) Soit x un élément nilpotent de A. Prouver que $1 - x$ est inversible dans A et calculer son inverse.

24. Polynômes

$^3_3$Exercice$^\flat$ 347. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme de degré n dont tous les coefficients sont entiers (dans $\mathbb{Z}$).
a) A quelle condition simple portant sur $a_0, \cdots a_n$ les nombres 0, -1 et 1 sont-ils racines de P ?
b) Soit α une racine rationnelle de P et soient p et q des entiers premiers entre eux tels que

$$\alpha = \frac{p}{q}.$$

En calculant $q^nP(\alpha)$, prouver que p divise a_n et que q divise a_0.
c) En calculant $q^nP(\alpha) - q^nP(1)$, prouver que $p - q$ divise $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
d) En calculant $q^nP(\alpha) - q^nP(-1)$, prouver que $p + q$ divise $a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^na_n$.
e) Comment faire pour trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme coefficients entiers?
f) Trouver les racines rationnelles du polynôme $36X^3 - 7X + 1$.
g) Factoriser le polynôme $6X^3 + 5X^2 + 4X + 1$.
h) On suppose maintenant que P est à coefficients rationnels. Comment faire pour trouver toutes les racines rationnelles de P ?
i) Factoriser le polynôme

$$2X^4 - \frac{56}{15}X^3 + \frac{5}{2}X^2 - \frac{7}{10}X + \frac{1}{15}$$

j) Prouver que les racines doubles du polynôme $P := X^6 - 5X^5 + X^3 + X^2 - X + 1$ sont forcément rationnelles puis que toutes les racines du polynôme P sont simples.

$^2_1$Exercice$^\flat$ 348. Expliciter l'unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P\left(\cos \frac{2k\pi}{7}\right) = 0$ pour $k \in \{2, 4, 6\}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 349. Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ le système $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 350. On pose $H_0 = 1$, $H_1 = 2X$ et

$$H_n = 2XH_{n-1} - H_{n-2} \qquad (2 \leqslant n \leqslant 20).$$

a) H_n Polynôme ? si oui, degré ?
b) Que vaut $H_n(\cos\vartheta)$?
c) Calculer $\langle H_i, H_j\rangle$ pour

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 351. Pour $n \ni \mathbb{N}$, déterminer l'existence d'un polynome P_n et d'un seul vérifiant

$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n.$$

Déterminer une relation entre P_n' et P_{n-1}.
Expliciter P_n pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 352. Déterminer $n \geqslant 2$ tel que $(X+1)^n + X^n - 1$ admette au moins une racine double.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 353. Pour $n \geqslant 0$, prouver que l'on définit un isomorphisme en posant

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto \big(P(0), P(1), \cdots, P(n)\big) \end{aligned}$$

^{2}<u>Exercice</u>$^\flat$ 354. a) Déterminer les zéros du polynôme $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$.
b) Déterminer les zéros de $Q = X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ et le décomposer en facteurs irréductibles.
c) Donner les valeurs de a et b pour que $2+2i$ soit racine de $P = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + X + b$. Factoriser P.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 355. Décomposer les polynômes X^8+1 et X^8+X^4+1 en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 356. Déterminer a et b pour que le polynôme $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 357. Quel est le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X-a$? par $(X-a)^2$? par $(X-a)^n$?

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 358. Quel est le reste de la division euclidienne de $\big(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)X\big)^n$ par X^2+1 ?

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 359. Trouver un polynôme à coefficients entiers ayant $1+\sqrt{3}$ comme racine. Calculer la valeur numérique du polynôme $P = 2X^4 - 4X^3 - 7X - 14$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 360. Déterminer <u>*mhboxun*</u> polynôme P dont le reste par la division euclidienne par $X-1$ vaut 2 et dont le reste par la division euclidienne par $X-2$ vaut 1. Quel est le reste par la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$? Trouver <u>tous</u> les polynômes P possédant les propriétés précédentes. .

Exercice$^\flat$ 361. Dans quel cas le polynôme $X^n + a^n$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$? Même question avec $P = X^{2n} + X^n + 1$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 362. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$ sachant qu'il admet une racine réelle.

Exercice$^\flat$ 363. Factoriser le polynôme $X^3 + (2-11i)X^2 - (39+12i)X - 18 + 45i$ sachant qu'il admet une racine double.

Exercice$^\flat$ 364. Déterminer a, b et c réels pour que le polynôme $P = X^6 - 5X^4 - aX^2 + bX + c$ admette une racine d'ordre 4 au moins.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 365. a) Résoudre l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes puis factoriser le polynôme $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$.
b) En déduire la relation

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 366. Montrer que le polynôme $1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a que des racines simples.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 367. Soit P un polynôme scindé de degré $p \geqslant 2$ n'ayant que des racines simples. Montrer que P' est scindé et ne possède que des racines simples.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 368. Calculer $n + (n-1)\binom{n}{1} + (n-2)\binom{n}{2} + (n-3)\binom{n}{3} + \cdots + 2\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 369. Soient $a \neq 1$ et $P := (1+X)(1+aX)(1+a^2X)\cdots(1+a^{n-1}X)$. Etablir une relation entre $P(aX)$ et $P(X)$. En déduire la valeur des coefficients de P.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 370. Calculer les coefficients de $(1 + X + X^2 + \cdots + X^n)^2$ et de $(1 - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n)^2$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 371. Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que l'on a $P = Q = R = 0$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 372. Prouver que $\mathrm{PGCD}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\mathrm{pgcd}}(n,m) - 1$.

$^{2}_{1}$*Exercice*$^\flat$ 373. Montrer que si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors

$$\forall P \in \mathbb{K}L[X], \qquad (P^a - 1)(P^b - 1) \text{ divise } (P-1)(P^{ab} - 1).$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 374. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$, on pose $F_{m,\vartheta} := X^{2m} - 2X^m \cos(m\vartheta) + 1$.
Vérifier que $F_{m,\vartheta}$ est divisible par $F_{1,\vartheta}$ et calculer le quotient.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 375. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2X^m \cos(\alpha) + 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ puis écrire l'égalité obtenue en substituant 1 à X.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 376. Vérifier que $X^n \sin(\vartheta) - X\sin(n\vartheta) + \sin((n-1)\vartheta)$ est divisible dans $\mathbb{C}[X]$ par $X^2 - 2X\cos(\vartheta) + 1$ et calculer le quotient.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 377. Vérifier que $X^{n+1}\cos\big((n-1)\vartheta\big) - X^n\cos(n\vartheta) - X\cos(\vartheta) + 1$ est divisible dans $\mathbb{C}[X]$ par $X^2 - 2X\cos(\vartheta) + 1$ et calculer le quotient.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 378. Démontrer que $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ est divisible par X^2-X+1. On appelle Q_n le quotient. Trouver une relation de récurence entre les Q_n.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 379. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$.
Montrer que B divise A dans $\mathbb{R}[X] \iff B$ divise A dans $\mathbb{C}[X]$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 380. Démontrer que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ admet $a+b\sqrt{7}$ comme racine, avec $(a,b) \in_o bQ^2$, alors P admet $a-b\sqrt{7}$ comme racine avec même ordre de multiplicité.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 381. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \qquad P(x+y) = P(x)P(y).$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 382. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \qquad P(xy) = P(x)+P(y).$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 383. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \qquad P(x+y) = P(x)+P(y).$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 384. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 385. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 386. Trouver toutes les racines du polynômes $2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$, sachant qu'il admet au moins une racine réelle.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 387. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n+2X^m+1 par le polynôme

$$(X-1)(X-2)(X-3)(X-4),$$

où n et m sont des entiers quelconques. Vérifier le résultat pour $n=43$ et $m=101$

(MP) $^{3}_{2}$Exercice 388. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0<\beta \leqslant 1 < \alpha$. Pour $n \geqslant 1$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\beta}}, \qquad u_n := \frac{R_n}{S_n} \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n u_n$$

a) Trouver des équivalents simples de R_n et S_n lorsque n tends vers l'infini.
b) étudier la nature de la série de terme général u_n.
c) Montrer que la série de terme général v_n converge.

$^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 389. Le but de cet exercice est la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E) \qquad \sin(7x)-\sin(3x)-\sin(x)=0.$$

a) Montrer qu'il existe un polynôme $P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(7x)-\sin(3x)-\sin(x) = \sin(x)P\big(\sin^2(x)\big).$$

b) Trouver une racine r évidente du polynôme P et diviser P par $X-r$.
c) Factoriser le polynôme P.
d) En déduire les solutions de l'équation (E).

$^{2}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 390. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

25. Fractions rationnelles

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 391. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ les trois fractions rationnelles suivantes :

$$F_n := \frac{1}{X^n - 1}, \qquad G_n := \frac{X^{n-1}}{(X^n-1)^2} \quad \text{et} \quad H_n := \frac{1}{(X^n-1)^2}.$$

26. Espaces vectoriels

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 392. Soient E un espace vectoriel et $E_1, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Prouver que Vect $(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = E_1 + \cdots + E_n$.

(Λ) Exercice$^\flat$ 393. Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivables en $x = 1$ forment un $\mathbb{R}$-EV.

(Λ) Exercice$^\flat$ 394. Soient $\mathcal{A} := \{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\mathcal{B} := \{b_1, \cdots, b_n\}$ deux familles de vecteurs tels que

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_1 + b_2, \qquad \text{et} \qquad a_n = b_1 + \cdots + b_n.$$

Prouver que la famille $\mathcal{A}$ est libre $\Longleftrightarrow$ la famille $\mathcal{B}$ est libre.

$_{1}$Exercice$^\flat$ 395. Parmi les ensembles suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels :
Les fonctions bornées sur $\mathbb{R}$, les fonctions continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions impaires, les fonctions paires, les fonctions périodiques, les fonctions périodiques de période 1, Les fonctions monotones, Les fonctions affines par morceaux (avec un nombre fini de morceaux), les fonctions discontinues en 0, les fonctions convexes, les fonctions polynômes de degré n, les fonctions polynômes.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 396. Soit E un $\mathbb{K}$-EV et f un endomorphisme de E. Prouver que

$$\ker f = \ker f^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0\}.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 397. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(a, b, c, d)$ pour

$$a = (1,1,1,0), \qquad b = (1,1,0,1), \qquad c = (1,0,1,1), \quad \text{et} \quad d = (0,1,1,1).$$

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 398. Pour chaque polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\Phi(P)$ le polynôme définit par

$$\Phi(P) = P(X+1) - P(X) \qquad\qquad (\textbf{substitutions})$$

a) Prouver que $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme, non-injectif.
b) Étudier la restriction $\tilde{\Phi}$ de l'endomorphisme Φ donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}_{n+1}[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto \Phi(p) \end{aligned}.$$

c) En déduire que $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est surjective.

(Fac) $^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 399. Montrer que l'ensemble $E := \big\{f : x \mapsto a\cos(x-\varphi) : (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big\}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$_{1}$Exercice$^\flat$ 400. On pose $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $(M-3I_3)(M+I_3)$. En déduire une relation poynômiale du type $P(M)=0$.
b) Justifier sans calculs que M est inversible et déterminer M^{-1}.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 401. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Énoncer une condition nécéssaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un espace vectoriel.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 402. a) Soit $E := \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble F des fonction paires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que l'ensemble G des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires forment des espaces vectoriels.
b) Prouver que $E = F \oplus G$ (i.e. que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0\}$).

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 403. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f - 6 = 0$.
Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 404. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Prouver que $u \in \mathcal{L}(E)$ commutte avec p si, et seulement si, $u(\mathrm{Im}\ p) \subset \mathrm{Im}\ p$ et $u(\mathrm{Ker}\ p) \subset \mathrm{Ker}\ p$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 405. Soit $N \in \mathbb{N}$. La famille de fonctions $\{x \mapsto \sin(nx)\}_{1 \leqslant n \leqslant N}$ est elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 406. Soit $n \geqslant 1$. La famille de fonctions $\{x \mapsto \sin^k x\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 407. Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
a) Prouver qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ soit libre dans E.
b) En déduire que $\{Id_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1}\}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 408. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r. Calculer la dimension des sous-espaces vectoriels $C := \{f \in \mathcal{L}(E) : u \circ f = 0\}$, $D := \{f \in \mathcal{L}(E) : f \circ u = 0\}$ et $C \cap D$.

Exercice$^\flat$ 409. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$8f(n+3) - 12f(n+2) + 6f(n+1) - f(n) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

et on note $\Phi[f](n) = f(n+1)$ et $\Psi[f](n) = 2nf(n+1) - nf(n)$ pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.
a) Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et calculer sa dimension.
b) Prouver que $\Phi : f \mapsto \Phi[f]$ et $\Psi : f \mapsto \Psi[f]$ sont des endomorphismes de E.
c) Φ et Ψ sont elles bijectives ?

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 410. Pour $n \geqslant 0$, prouver que l'on définit un isomorphisme en posant

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto \big(P(0), P(1), \cdots, P(n)\big) \end{aligned}$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 411. Soient α et β deux nombres complexes. Trouver une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ suivant : $u := (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta)$, $v := (\alpha, -\alpha, \beta, \beta)$, $w := (\beta, \beta, \alpha, \alpha)$, $x := (\beta, -\beta, \alpha, \alpha)$ et $y = (1,1,1,1)$.

$\frac{1}{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 412. Soient p et q deux projecteurs d'un espace e. On suppose que $p+q$ est un projecteur. Démontrer que $p \circ q + q \circ p = 0$ puis en déduire que $p \circ q = 0$ et que $q \circ p = 0$.

$\frac{3}{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 413. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme vérifiant :

Pour chaque $x \in E$, il existe une relation de dépendance linéaire entre x et $u(x)$.

Prouver que u est une homothétie de E.

$\frac{1}{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 414. Soit p un projecteur de E et soit $q = \mathrm{Id}_E - p$. On pose $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Im}(q)$. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p si, et seulement si, $u(F) \subset F$ et $u(G) \subset G$.

$(\mathcal{K})$ ^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 415. La famille d'applications $\{x \mapsto |x-a|\}_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$(\mathcal{K})$ <u>Exercice</u>$^\flat$ 416. La famille d'applications $\{x \mapsto |x-a|\}_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$?

$(\mathcal{K})$ $\frac{1}{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 417. La famille d'applications $\{x \mapsto \mathrm{e}^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$(\mathcal{K})$ $\frac{1}{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 418. La famille d'applications $\{x \mapsto \cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$(\mathcal{K})$ $\frac{1}{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 419. La famille d'applications $\{x \mapsto \cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x \mapsto \sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$(\mathcal{K})$ ^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 420. La famille d'applications $\{x \mapsto x^\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}\left(]0,+\infty[\,,\mathbb{R}\right)$?

$(\mathcal{K})$ ^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 421. La famille d'applications $\{x \mapsto x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$?

$(\mathcal{K})$ ^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 422. La famille d'applications $\{x \mapsto \sin(x)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$?

$(\mathcal{K})$ ^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 423. La famille d'applications $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$?

$(\mathcal{K})$ $\frac{2}{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 424. Soit $E := \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et soit $u \in E$. Montrer que l'application Φ_u définie par

$$\Phi_u : \begin{array}{l} E \to E \\ v \mapsto u \times v \end{array},$$

où $\times$ designe la multiplication des applications, est linéaire. Quel est son noyau ? son image ? sont-ils en somme directe ou supplémentaires ?
Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto \Phi_u \end{array}$$

est linéaire. Quel est son noyau ? Est-il vrai que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{L}(E)$?

$\frac{1}{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 425. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

$\frac{1}{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 426. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $E = F \oplus H$.

$_1$<u>Exercice</u>$^\flat$ 427. Soit f l'application donnée sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) := (x+y-z, 2x-y)$. Vérifier que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image.

$_1$<u>Exercice</u>$^\flat$ 428. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array} \qquad h : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \Re e\ (z) \end{array} \qquad i : \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \big(u(0), u(1), u(2)\big) \end{array}$$

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 429. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = E$.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice$^\flat$ 430. Soient (a, b, c) trois nombres réels. Montrer que les trois applications $x \mapsto \sin(x + a)$, $x \mapsto \sin(x + b)$ et $x \mapsto \sin(x + c)$ forment une famille liée.

^{1}Exercice$^\flat$ 431. Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z, t)$ tels que

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0, \\ x + 3t = 0 \end{cases}$$

est un espace vectoriel.

${}_{1}$Exercice$^\flat$ 432. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
a) Montrer que si (x_1, x_2, x_3) est une famille libre de E, alors la famille $(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1)$ est une famille libre de E. En est-il de même pour la famille $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$?
b) Montrer que si (x_1, x_2, x_3) est une famille génératrice de E alors la famille $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$ est une famille génératrice de E.

${}^{3}_{3}$Exercice$^\flat$ 433. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire M^2 en fonction de M et I_3.
b) Justifier sans calculs que M est inversible et déterminer M^{-1}.
c) Montrer que : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_n b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$ et déterminer une relation de récurence donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
d) En déduire que la suite a_n satisfait une récurence linéaire homogène du second ordre.
e) En remarquant que $a_n + b_n$ reste constant, montrer que la suite a_n satisfait une récurence linéaire du premier ordre, avec second membre.
f) Déterminer a_n et b_n en fonction de n.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 434. Soit $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u(e_1) = u(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3 \qquad \text{et } u(e_2) = 0.$$

a) Déterminer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
b) En déduire le noyau $\ker(u)$ puis l'image $\mathrm{Im}(u)$ de l'endomorphisme u
c) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.
d) Que vaut alors u^2 ? Vérifier ce résultat en calculant A^2.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 435. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. On pose

$$F := \mathrm{Ker}\ (f - i\mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad G := \mathrm{Ker}\ (f + i\mathrm{Id}_E).$$

a) Prouvez que F et G sont supplémentaires dans E (i.e. que $E = F \oplus G$).
b) Exprimer f en fonction de la projection $p \in \mathcal{L}(E)$ sur F parallèlement à G et de la projection $p' \in \mathcal{L}(E)$ sur G parallèlement à F.

Exercice$^\flat$ 436. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$.
a) Démontrez que Ker u est stable par v (i.e. que $v(\mathrm{Ker}\ u) \subset \mathrm{Ker}\ u$).
b) Démontrez que Im u est stable par v (i.e. que $v(\mathrm{Im}\ u) \subset \mathrm{Im}\ u$).
c) Remarquez que Ker v et Im v sont stables par u.

Exercice$^\flat$ 437. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + \mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} en fonction de f.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 438. Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to E$ telle que $f^3 = f$. Prouver que l'on a
$$E = \text{Ker } (f - \mathrm{Id}_E) \oplus \text{Ker } (f + \mathrm{Id}_E) \oplus \text{Ker } f.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 439. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que
$$E = \mathrm{Im} f + \text{Ker } f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$$
b) Montrer que
$$\mathrm{Im} f \cap \text{Ker } f = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

Exercice$^\flat$ 440. Donner une base du sous-espace de $\mathbb{R}^5$ défini par
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{aligned}$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 441. a) Prouver que l'on définit un endomorphisme en posant
$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto {}^tM - M + \text{Tr } (M) I_2 \end{aligned}$$
b) Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Est-ce que u est un automorphisme ?

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 442. Étant donné $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Calculez les puissances A^n pour $n \geqslant 1$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 443. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous espaces vectoriels de E de même dimension. Démontrer que F et G admettent un même supplémentaire.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 444. Soient $(m, n, p) \in \mathbb{N}_*^3$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Démontrer que
$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min \big\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\big\}.$$

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 445. Démontrer que les endomorphismes non nuls de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(x\vec{y}) = f(x)\vec{f}(y)$ pour $x \in \mathbb{R}^3$ et $y \in \mathbb{R}^3$ sont les rotations de $\mathbb{R}^3$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 446. Prouver que la famille $\{x \mapsto |x - a|\}_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$^{1}_{2}$Exercice$^\flat$ 447. Soient $a_0 < ... < a_n$ et soit F l'ensemble $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(a_0) = ... = f(a_n) = 0\}$.
a) Prouver que F est un espace vectoriel.
b) Trouver un suplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$^{3}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 448. Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \qquad \Phi_g(f) := g \circ f.$$

a) Prouver que l'application $\Phi_g : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, G)$ est linéaire.
b) Si g est injective, qu'en est-il de Φ_g ?

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 449. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$\Delta(P) := P(x+1) - P(x) \qquad \text{et} \qquad d(P) := P'.$$

a) prouver que Δ et d sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Injectivité/surjectivité ?
c) Prouver que $d = \Delta - \dfrac{\Delta^2}{2} + \dfrac{\Delta^3}{3}$.
d) Prouver que $\Delta = d + \dfrac{d^2}{2} + \dfrac{d^3}{6}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 450. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$f(P) := \Big((X+1)P(X) - P(X+1)\Big)'.$$

L'application $f : P \mapsto f(P)$ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$? Si oui, est-elle bijective ?

$^{3}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 451. Soient $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire de rang 1. Prouver qu'il existe un vecteur non-nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et une forme linéaire $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = g(x)\vec{v}.$$

27. Dimension finie

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 452. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(a, b, c, d)$ pour

$$a = (1,1,1,0), \qquad b = (1,1,0,1), \qquad c = (1,0,1,1), \quad \text{et} \quad d = (0,1,1,1).$$

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 453. Pour chaque polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\Phi(P)$ le polynôme définit par

$$\Phi(P) = P(X+1) - P(X) \qquad\qquad (\underline{\textbf{substitutions}})$$

a) Prouver que $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme, non-injectif.
b) Étudier la restriction $\tilde{\Phi}$ de l'endomorphisme Φ donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}_{n+1}[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto \Phi(p) \end{aligned}.$$

c) En déduire que $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est surjective.

$^{3}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 454. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que $f^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$$\exists (g,h) \in \mathcal{L}(E)^2 \text{ tel que } \begin{cases} g \circ h = f \\ h \circ g = 0 \end{cases}$$

$^{2}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 455. Soient $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices de projecteurs telles que $I_n - M - N \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. Prouver que les matrices M, N, MN, NM, MNM et NMN ont le même rang.

$^{3}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 456. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
a) On suppose que $\mathrm{rg}(A) = n$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{I}_n$.
b) On suppose que $\mathrm{rg}(A) = p$. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $CA = \mathrm{I}_p$.

(MP) $^{3}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 457. Déterminer $\{x,y,z\} \in [-1,1]^3$ et $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}^3$ tels que la formule

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = aP(x) + bP(y) + cP(z) \qquad (P \in \mathbb{R}_n[X])$$

soit vraie pour le plus grand n possible.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 458. Résoudre et discuter selon les paramètres le système $\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = a \\ x + y + \lambda z + t = a^2 \\ x + y + z + \lambda t = a^3 \end{cases}$

$^{2}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 459. Pour $n \geqslant 0$, prouver que l'on définit un isomorphisme en posant

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto \big(P(0), P(1), \cdots, P(n)\big) \end{aligned}$$

$^{1}_{2}$Exercice$^{\flat}$ 460. Trouver trois nombres réels α, β et γ tels que pour tout polynôme de degré $n \leqslant 2$, on ait

$$\int_2^4 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(0) + \beta P(1) + \gamma P(2).$$

Exercice$^{\flat}$ 461. Montrer que l'espace $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + 2t = 0\}$ est un espace vectoriel (sur quel corps ?), puis en donner une base et la dimension.

Exercice$^{\flat}$ 462. Montrer que l'espace $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = x + iy - z = 0\}$ est un espace vectoriel (sur quel corps ?), puis en donner une base et la dimension.

Exercice$^{\flat}$ 463. Montrer que l'espace $G = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ est un espace vectoriel (sur quel corps ?), puis en donner une base et la dimension.

Exercice$^{\flat}$ 464. Montrer que l'espace $H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$ est un espace vectoriel (sur quel corps ?), puis en donner une base et la dimension.

$_{1}$Exercice$^{\flat}$ 465. Dans $E := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ qui à } x \mapsto a + bx + cx^2 : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$, on considère

$$F = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1 - x - x^2, x \mapsto 1 + x + x^2) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1 - x + x^2).$$

Montrer que F et G sont supplémentaires. Soit p le projecteur dur F de direction G. Déterminer les images par p des vecteurs de la base canonique de E.

$_1$Exercice$^\flat$ 466. Soient $a \in \mathbb{R}$ et soit $E := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto a + bx + cx^2 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
a) déterminer une base de E et sa dimension.
b) Montrer que l'application $f : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto \big(P(a), P'(a), P''(a)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.
c) Trouver un polynôme P de degré inférieur à 2 tel que $\big(P(a), P'(a), P''(a)\big) = (0, 1, 2)$.

$_1$Exercice$^\flat$ 467. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Prouver que Ker $(f) \subset$ Ker (f^2) et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \Im(f)$.
b) Montrer que Ker $(f) =$ Ker $(f^2) \iff E =$ Ker $(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \iff \Im(f) = \Im(f^2)$.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 468. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (on dit alors que f est nilpotent d'ordre p).
a) montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $\big(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\big)$ soit libre.
b) Si E est de dimension finie $d \geqslant 1$ et si $f^m = 0$ pour un entier md, prouver que $f^d = 0$.

$_1$Exercice$^\flat$ 469. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u := (1, 2, 3, 4)$, $v := (1, 1, 1, 3)$, $w := (2, 1, 1, 1)$, $x := (-1, 0, -1, 2)$ et $y := (2, 3, 0, 1)$. Dimensions (à justifier) des espaces $U := \mathrm{Vect}(u, v, w)$, $V := \mathrm{Vect}(x, y)$, $U + V$ et $U \cap V$?

$_1$Exercice$^\flat$ 470. Soit u l'application définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (y + z, z + x, x + y) \end{aligned}$$

a) Montrer que $u \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}^3)$.
b) On considère $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F := \{(x, y, z) : x = y = z\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $u(E)$ et $u(F)$.

$\frac{2}{1}$Exercice$^\flat$ 471. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) := \frac{1}{3}(5x - y - z, -x + 5y - z, -x - y + 5z)$$

a) Définir correctement f puis montrer que f est linéaire.
b) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
c) Montrer que $a_1 := (1, 1, 1)$, $a_2 := (1, -1, 0)$ et $a_3 = (1, 1, -2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
d) Exprimer $f(a_1)$, $f(a_2)$ et $f(a_3)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs a_1, a_2 et a_3.
e) Calculer $f \circ f(x, y, z)$ puis $f \circ f \circ f(x, y, z)$ et essayez d'en déduire des réels (α, β, γ) tels que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad \alpha f^3(x, y, z) + \beta f^2(x, y, z) + \gamma f(x, y, z) = (x, y, z)$$

Exercice$^\flat$ 472. Montrer que la famille $\{e, f, g\}$ avec

$$e = (1 + i, 1, i), \qquad g = (i - 1, 1, -i) \quad \text{et} \quad h = (-2 + i, 0, -i)$$

est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$. Determiner dans la base $\{e, f, g\}$ les coordonnées du vecteur (a, b, c).

(MP*) $\frac{2}{2}$Exercice 473. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie n et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.
a) Montrer que $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v$.
b) Montrer que $|\mathrm{rg}\ u - \mathrm{rg}\ v| \leqslant \mathrm{rg}(u + v)$.
c) Lorsque $E = F$, $u + v$ est inversible et $u \circ v = 0$, montrer que $\mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v = n$.
d) Montrer que $\mathfrak{Im}\ u \subset \mathfrak{Im}\ v$ si, et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ w$.

28. Rang

Exercice$^\flat$ 474. Calculer le rang de la famille de vecteurs

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

^{3}Exercice$^\flat$ 475. Calculer en fonction de m le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 476. Soient $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de rang $n-1$. Démontrer que $u^{n-1} \neq 0$.

$^{3}_{1}$Exercice$^\flat$ 477. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Démontrer que le rang de A est pair.

$_{1}$Exercice$^\flat$ 478. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$.
a) Comparer $\mathrm{Im}(f+g)$ et $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$. En déduire que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.
montrer que

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}, \\ E = \mathrm{Ker}\ (f) + \mathrm{Ker}\ (g). \end{cases}$$

$^{1}_{1}$*Exercice*$^\flat$ 479. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que

$$\mathrm{Ker}\ (u) = \mathrm{Im}(u) \iff \begin{cases} u^2 = 0, \\ \dim\ (E) = 2\mathrm{rang(u)} \end{cases}$$

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 480. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n.
a) Montrer que $g \circ f = 0 \quad \iff \quad \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.
b) Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ et que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.
c) On suppose que $g \circ f = 0$ et que $f+g = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.
Calculer $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$ en fonction de n.

(MP*) **Exercice**$^\flat$ 481. Calculer le rang de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(MP*) **Exercice**$^\flat$ 482. Calculer le rang de la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(MP*) **Exercice**$^\flat$ 483. Calculer le rang de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(MP*) **Exercice**$^\flat$ 484. Calculer le rang de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(MP*) ¦**Exercice**$^\flat$ 485. Etudier le rang de la matrice $A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -5 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ en fonction de λ.

Lorsque A n'est pas inversible, donner une relation de dépendance linéaire entre ses lignes.

(MP*) Exercice$^\flat$ 486. Montrer que les vecteurs $\vec{i} := (1,0,1)$, $\vec{j} := (-1,-1,2)$ et $\vec{k} := (-2,1,-2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnes dans cette base d'un vecteur quelconque $\vec{v} := (x,y,z)$.

29. Systèmes linéaires

(A) Exercice$^\flat$ 487. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_n = 2 \\ \vdots = \vdots \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = n \end{cases}$$

¦Exercice$^\flat$ 488. Résoudre et discuter selon les paramètres le système $\begin{cases} x + y + z = a \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = b \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = c \end{cases}$

¦Exercice$^\flat$ 489. Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe au moins une solution du système

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \\ x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

¦**Exercice**$^\flat$ 490. Condition nécéssaire et suffisante sur λ et a pour que le système

$$(E) \qquad \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = a \\ x + y + \lambda z + t = a^2 \\ x + y + z + \lambda t = a^3 \end{cases}$$

admette au moins une solution.

30. Récurrences linéaires

Exercice$^\flat$ 491. Soit u la suite définie par $u_0 := 1$, $u_1 := 2$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ pour $n \geqslant 0$. Calculer explicitement u_n pour $n \in \mathbb{N}$ et déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

$^{1}_{1}$Exercice 492. Soit $P := X^2 - sX + p$ un polynôme admettant 2 racines distinctes λ_1, λ_2 et soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$u_{n+2} := s u_{n+1} - p u_n \qquad (n \geqslant 0).$$

Déterminer la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de λ_1, λ_2, n, u_0 et u_1.

$^{3}_{3}$Exercice$^\flat$ 493. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire M^2 en fonction de M et I_3.
b) Justifier sans calculs que M est inversible et déterminer M^{-1}.
c) Montrer que : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_n b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$ et déterminer une relation de récurence donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
d) En déduire que la suite a_n satisfait une récurence linéaire homogène du second ordre.
e) En remarquant que $a_n + b_n$ reste constant, montrer que la suite a_n satisfait une récurence linéaire du premier ordre, avec second membre.
f) Déterminer a_n et b_n en fonction de n.

$^{1}_{1}$*Exercice* 494. Soient $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ et soit u la suite définie par $u_0 := a$, $u_1 := b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} u_n}.$$

Montrer que u est une suite convergente et calculer sa limite.

$^{2}_{1}$Exercice 495. Calculer la suite u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} - u_n - u_{n-1} = \frac{n}{2^n}$$

puis en déduire la limite de u.

(MP) $^{2}_{1}$***Exercice***$^\flat$ 496. Calculer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

31. Matrices

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 497. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A := \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 498. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_3 = 0$.

$\frac{1}{2}$Exercice$^\flat$ 499. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $P(0) \neq 0$ et $P(A) = 0$. Prouver que A est inversible.

$\frac{1}{2}$Exercice 500. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $P(0) \neq 0$ et $P(A) = 0$.
Prouver que A est inversible.

(MP) $\frac{2}{1}$Exercice$^\flat$ 501. Soient A et B deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'elles sont également semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\frac{2}{1}$Exercice$^\flat$ 502. Caractériser les matrices $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ telles que A et A^{-1} soient à coefficients positifs.

(MP) $\frac{3}{1}$Exercice$^\flat$ 503. Lorsque $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, montrer que $A := \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$ est inversible.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 504. Soient $n \geqslant 2$ et $A := (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Démontrer que A est inversible.

$\frac{1}{1}$Exercice$^\flat$ 505. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $E := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Prouver que $\Phi : M \mapsto MA - AM$ est-elle un endomorphisme de E.
b) Matrice de Φ dans la base canonique de E ?

$\frac{1}{1}$Exercice$^\flat$ 506. Quel est la structure de E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$ si on le munit des opérations usuelles $+, \cdots, \times$?

$\frac{1}{1}$Exercice$^\flat$ 507. Soient $n \geqslant m \geqslant 1$ des entiers. Résoudre pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'équation $AB = I_n$.

$\frac{3}{2}$*Exercice*$^\flat$ 508. Pour $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j qui est égal à 1.
a) Exprimer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$ en fonction de $E_{i,\ell}$ et du symbôle de Kronecker

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 \text{ si} j = k, \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$$

b) Soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\Phi(AB) = \Phi(BA) \qquad \big((A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big).$$

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi(M) = \lambda \text{tr M}$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(Λ) $^{3}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 509. Exprimer la matrice A^n en fonction de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de I_2 et de $n \geqslant 1$.

(Λ) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 510. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Pour $k \in \mathbb{N}$, prouver que les matrices A et $B := A^k$ commutent (i.e. que $AB = BA$).
2. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec A.
a. Pour $k \in \mathbb{N}$, prouver que A^k commute avec B.
b. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, en déduire que $P(A)$ commute avec B.
c. Pour $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$, en déduire que $P(A)$ commute avec $Q(B)$.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 511. Soit $a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Expliciter l'application linéaire f associé à A dans les bases canoniques.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 512. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (ax+cy, bx+dy) \end{matrix}$. Déterminez la matrice canoniquement associée à f.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 513. Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez toutes les matrices B telles que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 514. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. Les familles $\mathcal{F}_1 := (A, B, C)$, $\mathcal{F}_2 := (A, B, C, D)$ et $\mathcal{F}_3 := (A, B, C, D, E)$ sont-elles libres dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

<u>Exercice</u>$^\flat$ 515. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 516. On pose $A := \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Exprimer A sous la forme $A = -I_3 + N$. Calculer N^2 puis N^3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que la formule est vraie également pour $n \in \mathbb{Z}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 517. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coeffficients sont égaux à 1. Calculer J^2 puis J^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 518. Soit $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_i, j = \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}$ Calculer $(A + I_n)^2$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 519. Déterminer toutes les matrices diagnales $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 - 5M + 6I_3 = 0$.

$^{3}_{3}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 520. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire M^2 en fonction de M et I_3.
b) Justifier sans calculs que M est inversible et déterminer M^{-1}.
c) Montrer que : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_n b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$ et déterminer une relation de récurence donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
d) En déduire que la suite a_n satisfait une récurence linéaire homogène du second ordre.
e) En remarquant que $a_n + b_n$ reste constant, montrer que la suite a_n satisfait une récurence linéaire du premier ordre, avec second membre.
f) Déterminer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice$^\flat$ 521. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
a) Montrer que $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$. En déduire une condition nécéssaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{K})$ et l'expression de A^{-1} dans ce cas.
b) Montrer que $A^n \in \mathrm{Vect}(A, I_2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (et pour $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).

${}^1_2$Exercice$^\flat$ 522. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$, soit (f_1, f_2, f_3) celle de $F = \mathbb{R}^3$ et (g_1, g_2, g_3, g_4) celle de $G = R^4$. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 3 & 3b & 3c \end{pmatrix}$$

a) On note u l'application linéaire associée à A. Déterminer des bases de $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
b) Déterminer de même des bases de $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$, où v est l'application linéaire associée à B.
c) Déterminer b et c pour que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$ et montrer qu'alors $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$.
d) Soit $w = v \circ u$. (pour b et c quelconques). Préciser la matrice de w, puis $\ker(w)$ et $\mathrm{Im}(w)$.

${}^1_1$Exercice$^\flat$ 523. Soit $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u(e_1) = u(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3 \qquad \text{et } u(e_2) = 0.$$

a) Déterminer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
b) En déduire le noyau $\ker(u)$ puis l'image $\mathrm{Im}(u)$ de l'endomorphisme u
c) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.
d) Que vaut alors u^2 ? Vérifier ce résultat en calculant A^2.

${}^2_2$Exercice$^\flat$ 524. Matrices nilpotentes. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et qu'elle est nilpotente d'ordre p si $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
a) En utilisant l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé, calculer les puissances successives de la matrice

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'ordre p et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'ordre q. Si A et B commuttent montrer que $A + B$ est nilpotente d'ordre au plus $m = p + q - 1$. Autrement dit que $(A + B)^m = 0$.

c) Soit A nilpotente d'ordre p. Montrer que $C := I_n - A$ est inversible et calculer son inverse à l'aide des puissances de A.
d) Soient $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commuttent et que $B^4 = 0$. Montrer que $A - B$ est inversible et calculer son inverse en fonction de A, B et A^{-1}.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 525. Soient $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $(M - I_3)^2$.
b) En admettant que l'on peut appliquer le binôme de Newton aux matrices $A := M - I_3$ et $B := I_3$ qui commuttent, en déduire M^n pour $n \geqslant 2$.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 526. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unique application linéaire vérifiant

$$f(1,0) = (1,2,3) \qquad \text{et} \qquad f(0,1) = (2,1,3).$$

a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y)$.
b) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
c) mêmes questions pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$g(1,1) = (2,1) \qquad \text{et} \qquad g(-1,1) = (3,0).$$

<u>Exercice</u>$^\flat$ 527. Soit $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension 3. Et soit u l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$u(e_1) = e_2, \qquad u(e_2) = e_3 \quad \text{et} \quad u(e_3) = e_1.$$

a) Calculer $u(x)$ pour $x = ae_1 + be_2 + ce_3$.
b) Ecrire la matrice de l'application linéaire u dans la base $\mathcal{B}$.
c) l'endomorphisme u est il bijectif ?
d) Pour quels nombres a l'équation $u(x) = ax$ possède-t'elle une solution $x \neq 0$?

<u>Exercice</u>$^\flat$ 528. Les vecteurs $u = (0,1,1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (1,1,0)$ forment ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, quelles sont les coordonnées du vecteur $(2,3,1)$ dans cette base (on ecrira la matrice correspondante) ?

1 <u>Exercice</u>$^\flat$ 529. Montrer que la famille $\{X(X-1), (X-1)(X-2), (X-1)(X-2)\}$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
a) Déterminer les coordonnées dans cette base d'un polynôme quelconque $P = a + bX + cX^2$ et écrire la matrice correspondante.
b) Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{C}_2[X]$ vérifiant

$$P(0) = \pi, \qquad P(1) = \sqrt{2} \quad et \quad P(2) = i.$$

1 **<u>Exercice</u>**$^\flat$ 530. Calculer et factoriser le determinant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{pmatrix}$$

Pour quelle valeur de a est il nul ?

<u>Exercice</u>$^\flat$ 531. Inverser la matrice $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

(A) $^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 532. Exprimer la matrice A^n en fonction de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de I_2 et de $n \geqslant 1$.

(MP) $^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 533. Soit $n \geqslant 3$ un entier et soit $M_n(X)$ la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{X^2}{2!} & X & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{X^n}{n!} & \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{X^2}{2!} & X \end{pmatrix}$. Calculer dét $M_n'(X)$ puis dét $M_n(X)$.

32. Formes multilinéaires

(Fac) ^{1}<u>Exercice</u> 534. Prouver que l'on définit une forme trilinéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3$ en posant

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) := x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$$

(Fac) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 535. Montrer que l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base.

(A) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 536. Donner toutes les formes bilinaires alternées sur $\mathbb{R}^2$.

(Fac) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 537. Donner toutes les formes trilinaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace de dimension n lorsque $m > n$?

(A) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 538. Prouver que l'on définit une forme trilinéaire f, alternée sur $\mathbb{R}^3$, en posant

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (u \wedge v).\vec{w}.$$

33. Déterminant

<u>Exercice</u>$^\flat$ 539. Établir l'identité $(\vec{X}\Lambda\vec{Y}).\vec{Z} = \text{dét}_{\mathcal{B}}(X, Y, Z)$ pour chaque triplet $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})^3$, le symbôle $\mathcal{B}$ désignant la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

<u>Exercice</u>$^\flat$ 540. Calculer le déterminant $D := \begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{vmatrix}$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 541. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, montrer que

$$\text{dét}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \text{dét}(A + iB)\,\text{dét}(A - iB).$$

$\frac{2}{2}$*Exercice* 542. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, démontrer que $\overline{\operatorname{dét} A} = \operatorname{dét} \overline{A}$.

$\frac{2}{2}$***Exercice*** 543. Pour $a, b, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant D de la matrice $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\frac{2}{3}$***Exercice*** 544. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, calculer

(Déterminant de Vandermond) $$V_n(a_0, \cdots, a_n) := \operatorname{dét} \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

$\frac{2}{2}$***Exercice*** 545. Pour $n \geqslant 3$ et $a \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant $D_n(a) := \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & & \mathbb{O} \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ \mathbb{O} & & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$.

$\frac{1}{1}$Exercice 546. Soit A une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients appartiennent à $\{-1, +1\}$.
Prouver que $\operatorname{dét} A$ est un multiple de 2^{n-1}.

(Fac) $\frac{1}{1}$Exercice 547. Les nombres 119, 153 et 289 sont divisibles par 17. Montrer sans le calculer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ l'est aussi.

(MP*) $\frac{1}{1}$*Exercice* 548. Montrer que $\operatorname{dét}(A^2 + B^2) \geqslant 0$ pour des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commuttent.
2) Chercher deux matrices A et B ne commutant pas telles que $\operatorname{dét}(A^2 + B^2) < 0$.

Exercice$^\flat$ 549. Calculer le determinant $D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

Exercice$^\flat$ 550. Calculer le determinant $D := \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

Exercice$^\flat$ 551. Calculer le determinant $\operatorname{dét} \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 552. Pour $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer le déterminant $D_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) := \begin{vmatrix} \mathbb{O} & & \lambda_n \\ & \iddots & \\ \lambda_1 & & \mathbb{O} \end{vmatrix}$.

$\frac{1}{1}$***Exercice***$^\flat$ 553. Calculer le determinant $D := \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

$^{1}_{1}$***Exercice***$^{\flat}$ 554. Calculer le determinant $D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$.

$^{1}_{1}$**Exercice**$^{\flat}$ 555. Calculer le determinant $D := \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

Exercice$^{\flat}$ 556. Calculer le determinant dét $\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{pmatrix}$.

$^{1}_{1}$***Exercice***$^{\flat}$ 557. Calculer le determinant $D :=$ dét $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$^{3}_{1}$***Exercice***$^{\flat}$ 558. Calculer le determinant dét $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 5 & \ddots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & (n+2) \end{pmatrix}$.

Exercice$^{\flat}$ 559. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie impaire. Prouver qu'il n'existe aucun $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

(Fac) Exercice$^{\flat}$ 560. Calculer le déterminant $D := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$^{2}_{1}$***Exercice*** 561. Pour $n \geqslant 1$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer le déterminant $D_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) :=$ $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots & \lambda_1 \\ \vdots & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \end{vmatrix}$.

$^{3}_{2}$*Exercice* 562. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$ tel que $CD = DC$.

a) Lorsque D est inversible, prouver que dét$(AD - BC) =$ dét $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

b) Prouver que cette identité est encore vraie si D n'est pas inversible.

(A) Exercice 563. Calculer $\Delta :=$ dét $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

$^{2}_{1}$Exercice 564. Montrer que la matrice $A := \left(c_{j-1}^{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ est inversible (avec $c_p^q := 0$ si $p < q$) et déterminer A^{-1} en utilisant l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associé à A pour la base canonique.

^{1}Exercice 565. Pour $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer le déterminant de $A := \big((x_i + x_j)^2\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(MP) $^{3}_{2}$***Exercice*** 566. Pour $p \geqslant 1$, calculer le determinant de la matrice $A_p := \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$.

(MP) $^{1}_{1}$*Exercice* 567. Pour $n \geqslant 2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer le déterminant

$$D_n := \begin{vmatrix} x+y & xy & \cdots & \mathbb{O} \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & xy \\ \mathbb{O} & & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$^{3}_{1}$*Exercice* 568. Pour $n \geqslant 2$ et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n) \in \left]0, \infty\right[^{2n}$, calculer le déterminant de la matrice $A := \big((\alpha_i + \beta_j)^{n-1}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$^{2}_{2}$*Exercice* 569. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
a) Lorsque A est inversible, prouver que $\text{dét}(AB - \lambda I_n) = \text{dét}(BA - \lambda I_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
b) Prouver que cette identité est encore vraie lorsque A n'est pas inversible.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 570. Pour $n \geqslant 2$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer le déterminant de la matrice $A := (\cos(ix_j - x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(MP) $^{2}_{1}$***Exercice*** 571. Calculer le déterminant de la matrice $A := \big(|j - i|\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$^{2}_{1}$Exercice 572. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\text{Com}(A)$ la comatrice de A.
a) Calculer le produit matriciel $A \times \text{Com}(A)$.
b) En déduire le rang de la comatrice de A.

$^{3}_{1}$Exercice 573. Pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ dans $\left]0, \infty\right[$, calculer le déterminant (de Cauchy) de la matrice $A := \left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 574. Pour $n \geqslant 2$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, Calculer le déterminant de la matrice $A := (\sin(x_i + x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

34. Valeurs propres

(A) $^{1}_{1}$Exercice 575. Trouvez toutes les valeurs propres de l'endomorphisme $u : f \mapsto f''$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(A) $^{1}_{1}$**Exercice** 576. Trouvez toutes les valeurs propres de l'endomorphisme $u : M \mapsto {}^tM$ de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(CCP) $^{2}_{1}$**Exercice** 577. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Pour chaque fonction $f \in E$, on pose

$$\forall x \geqslant 0, \qquad T(f)(x) := f(x+1).$$

a. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto T(f)$ définit un endomorphisme de E.
b. Déterminer les valeurs propres de l'opérateur T.

$^{1}_{1}$Exercice 578. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_3 = 0$.

(MP) $^{3}_{1}$Exercice 579. Étant donné un entier $n \geqslant 3$ et des nombres réels $a_n > \cdots > a_2 > a_1 > 0$, on pose $A := \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$.
b) En déduire que A possède n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 580. Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{R}^*$. Prouver que $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ possède n valeurs propres réelles distinctes deux à deux.

$^{1}_{1}$Exercice 581. Condition nécéssaire et suffisante sur a pour que la matrice $M(a)$ ait toutes ses valeurs propres strictements positives, avec

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

(Fac) $^{1}_{1}$Exercice 582. Soient A et B deux matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = AB - BA.$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
On note E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on considère l'application :

$$\begin{aligned} \psi : E &\to E \\ M &\mapsto MB - BM \end{aligned}$$

a. Montrer que ψ est un endomorphisme de E dans E.
b. Montrer que $\psi(A^k) = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
c. On suppose que $A^k \neq 0$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.
d. Conclure.

(MP*) ^{1}Exercice 583. Chercher les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

(MP*) ^{1}**Exercice** 584. Chercher les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

35. Vecteurs propres

(MP*) **Exercice** 585. Pour chaque fonction f de l'espace $E = \mathcal{C}\big([0,+\infty[\,,\mathbb{R}\big)$, on pose

$$\forall x \geqslant 0, \qquad T(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \\ f(0) \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

a. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto T(f)$ définit un endomorphisme de E.
b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur T.

(A) Exercice 586. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, qui commuttent (i.e. tels que $u \circ v = v \circ u$).
Pour chaque valeur propre λ de u, montrer que l'espace propre $E_\lambda := \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v, i.e. que

$$v(E_\lambda) \subset E_\lambda.$$

Exercice 587. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de B
en fonction de ceux de A.

Exercice 588. Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Trouver les valeurs propres (réelles et complexes) et les vecteurs propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(W) = V \wedge W$ pour $W \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 589. étudier suivant les valeurs du paramètre a les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 10-a & -a+7 & 1 \\ -8+a & -5+a & -1 \\ -6+a & a-7 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 590. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) := -a(X-b)P' - nP$.
a) Prouver que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer les éléments propres de u.

(Fac) Exercice 591. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.
a. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
b. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}. c. Lorsque A_m n'est pas inversible, déterminer le noyau et l'image de A_m.

(Fac) Exercice 592. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto (X^2-1)P' - (nX+a)P. \end{aligned}$$

Vérifier que cette application est bien définie. Puis, déterminer ses valeurs propres et leurs espaces propres associés.

36. Polynômes caractéristiques

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 593. Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P le polynôme caractéristique de la matrice AB et soit Q le polynôme caractéristique de la matrice BA.
a) Lorsque A est inversible, prouver que $P=Q$.
b) Lorsque A n'est pas inversible, remarquer que l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}, A+xI_n\text{inversible}\}$ est infini et en déduire que $P=Q$.

$^{1}_{1}$Exercice 594. Calculer le polynôme caractéristique P_A de la matrice $A:=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\end{pmatrix}$ pour $(a_0,\cdots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$.

(Fac) $^{1}_{1}$Exercice 595. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

37. Diagonalisation

$^{1}_{1}$Exercice 596. Pour $A:=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$, diagonaliser la matrice $B:=\begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A\end{pmatrix}$.

(Fac) **Exercice** 597. Diagonaliser la matrice $A:=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(Fac) **Exercice** 598. Diagonaliser la matrice $A:=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 599. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

^{1}**Exercice** 600. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

(A) $^{1}_{1}$Exercice 601. Exprimer la matrice A^n en fonction de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, de I_2 et de $n\geqslant 1$.

Exercice 602. Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $A:=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 603. Soit $P := X^2 - sX + p$ un polynôme admettant 2 racines distinctes λ_1, λ_2 et soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$u_{n+2} := su_{n+1} - pu_n \qquad (n \geqslant 0).$$

Déterminer la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de λ_1, λ_2, n, u_0 et u_1.

(Fac) **<u>Exercice</u>** 604. Diagonaliser la matrice $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(A) **<u>Exercice</u>** 605. Diagonaliser la matrice $A := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(Fac) -1**<u>Exercice</u>** 606. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(A) $^{1}_{1}$*<u>Exercice</u>* 607. Soit u un endomorphisme de E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u (tel que $u(F) \subset F$).
1. Prouver que la restriction de l'endomorphisme u à l'espace F définit un endomorphisme $v : F \to F$.
2. Lorsque u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, montrer que v est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

(MP) $^{3}_{1}$<u>Exercice</u> 608. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Démontrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A si, et seulement si, M est une combinaison linéaire de $I_n, A, A^2, \cdots A^{n-1}$.

(MP) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 609. Soient $(f, u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^3$ des endomorphismes diagonalisables et $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel stable par f.
a) Démontrer que la restriction de f à F est diagonalisable.
b) Lorsque $u \circ v = v \circ u$, prouver que u et v sont diagonalisable dans la même base
(i.e. il existe une base B de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales).

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 610. Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice $M := \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.

^{1}<u>Exercice</u> 611. Trouver une condition nécéssaire et suffisante sur $\vartheta \in [-\pi, \pi[$ pour que $\begin{pmatrix} 0 & \sin\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Réduire cette matrice.

<u>Exercice</u> 612. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que dét $M = 1$. Montrer que M est semblable à l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 613. Montrer que l'application $u : M \mapsto \mathrm{com(M)}$ définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Diagonaliser u.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 614. Soit $M := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n := \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} M^k$.

<u>Exercice</u> 615. Démontrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables

<u>Exercice</u> 616. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$ puis en déduire A^k pour $k \geqslant 1$.

<u>Exercice</u> 617. Diagonaliser la matrice $A = (\,1\,)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ qui ne contient que des 1.
Pour $k \geqslant 2$, comment calculer A^k en faisant le moins de calculs possible ?

<u>Exercice</u> 618. Condition nécéssaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable ?
Quand A est diagonalisable, trouver P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (le vérifier).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a + \dfrac{1}{a} & a^2 + \dfrac{1}{a^2} \\ a + \dfrac{1}{a} & 1 & a + \dfrac{1}{a} \\ a^2 + \dfrac{1}{a^2} & a + \dfrac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice</u> 619. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans une base indépendante de a, b, c puis montrer que A est inversible et calculer A^n, avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

(A) <u>Exercice</u> 620. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \mathrm{I}_2$.

<u>Exercice</u> 621. Diagonaliser la matrice $A := \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

<u>Exercice</u> 622. On définit par récurrence les suites u, v et w par $u_0 := 1$, $v_0 := 0$, $w_0 := 1$ et

$$\begin{cases} 12u_{n+1} = 9u_n + 3w_n \\ 12v_{n+1} = 3u_n + 8v_n + 3w_n \\ 12w_{n+1} = 4v_n + 6w_n \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Déterminer la limite de ces trois suites.

(Fac) <u>Exercice</u> 623. a. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.
Montrer que

$$f \circ g = g \circ f \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$

b. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à f et g. On admettra ce rsultat.

c. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

(Fac) Exercice 624. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et les sous-espaces propres correspondants. En dduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

(A) $^{1}_{1}$*Exercice* 625. Soit $k \geqslant 2$ et soit M une matrice carrée. Dans cet exercice, on étudie la propriété suivante :

($\mathcal{P}$) si $A := M^k$ est inversible et diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

a. En utilisant $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pouver que la propriété $\mathcal{P}$ est fausse si l'on enlève l'hypothèse que A est inversible.
b. Pour $(\vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, prouver que $M(\vartheta)M(\varphi) = M(\vartheta + \varphi)$ où l'on a posé

$$M(\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

A l'aide de la matrice $M = M(\frac{\pi}{k})$, en déduire que $\mathcal{P}$ est fausse, si l'on remplace "$\mathbb{C}$" par "$\mathbb{R}$".
c. Établir la propriété $\mathcal{P}$.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 626. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme diagonalisable et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
a) Démontrer que u et v commuttent si, et seulement si, chaque sous-espace propre de u est stable par v.
b) Dimension de $\{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : v \circ u = u \circ v\}$.

(MP) ^{1}Exercice 627. Condition nécéssaire et suffisante sur $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pour que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $a_{i,j} := x_i$ si $i + j = n + 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon soit diagonnalisable.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 628. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB = BA$ et soit $M := \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$.
Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

$^{1}_{1}$Exercice 629. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.
a) Lorsque A est diagonalisable, prouver que $\lim_{p\to\infty} A^p = 0 \Longleftrightarrow \max_{1 \leqslant p \leqslant n} |\lambda_p| < 1$.
b) Soient $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure, D une matrice diagonale de même diagonale principale que S et $N := S - D$. Vérifier que $DN = ND$ et que $N^n = 0$.
c) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver que $\lim_{p\to\infty} A^p = 0 \Longleftrightarrow \max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} |\lambda_p| < 1$.

Exercice 630. Pour quel triplet $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

$^2_1$<u>Exercice</u> 631. Soit $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

$^1_1$<u>Exercice</u> 632. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})^2$ telles que $A^2 = B^2 = \mathrm{I}_4$ et $AB = -BA$.
a) En calculant tr(ABA) de deux façon, montrer que tr A = tr B = 0.
b) Montrer que A et B sont diagonalisables.
c) Déterminer les valeurs propres de A et B ainsi que leur ordre de multiplicité.
d) On note $C := iAB$. Vérifier que $C^2 = \mathrm{I}_4$, que $AC = -CA$ et que $BC = -CB$.
e) En déduire les valeurs propres de iAB et trAB.

$^1_1$<u>Exercice</u> 633. Soient M, N deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant le même polynôme caractéristique.
Prouver qu'il existe un couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = AB$ et $N = BA$.

$^1_1$<u>Exercice</u> 634. Trouver une condition nécéssaire et suffisante sur les nombres réels a, b et c pour que la matrice $M(a, b, c)$ soit diagonalisable. Dans ce cas, trouver une matrice $Q \in \mathcal{G}l_5(\mathbb{R})$ telle que $QM(a, b, c)Q^{-1}$ soit diagonale.

$$M(a,b,c) := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

38. Trigonalisation

(A) **<u>Exercice</u>** 635. Trigonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice</u> 636. Trigonaliser la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(MP) $^2_2$<u>Exercice</u>$^\flat$ 637. Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(MP) $^2_1$<u>Exercice</u> 638. Trigonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et calculer sa puissance $n^{\text{ième}}$.

$^2_2$<u>Exercice</u> 639. Trois suites de nombres vérifient

$$\begin{aligned} 10a_{n+1} &= 3b_n + 7c_n \\ 10b_{n+1} &= 2a_n + 8c_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \\ 10c_{n+1} &= 4a_n + 6b_n \end{aligned}$$

Étudier la convergence des trois suites.

[2/1]**Exercice** 640. Trigonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

[1]**Exercice** 641. Trigonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

[1]**Exercice** 642. Trigonaliser sur le corps des réels la matrice $A := \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

[1]**Exercice** 643. Trigonaliser sur le corps des réels la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 644. Trigonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 645. Trigonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

[1/1]**Exercice** 646. Trigonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

39. Réduction

[2/1]Exercice 647. Résoudre dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

[2/1]Exercice 648. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[2/1]Exercice 649. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2/1]Exercice 650. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 651. La matrice $\begin{pmatrix} a & c & & \mathbb{O} \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ \mathbb{O} & & b & a \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 652. Pour $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on pose $f(X) := X - {}^tX$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
b) Déterminer les sous espaces propres de f. L'application f est elle diagonalisable ?

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 653. Calculer la limite de $A_n := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}^n$.

40. Systèmes différentiels

(A) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 654. Trouver les trajectoires du système

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2y(t) + x(t) \end{cases}$$

(MP*) **<u>Exercice</u>** 655. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$$

(MP*) ^{1}**<u>Exercice</u>** 656. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y. \end{cases}$$

^{1}<u>Exercice</u> 657. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \mathrm{e}^{2t} \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + t \end{cases}$

^{1}<u>Exercice</u> 658. Résoudre sur $]0, \infty[$ le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) - z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - z(t) \\ u'(t) = 4x(t) + 2z(t) + 3u(t) \end{cases}$

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 659. Résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 660. Résoudre l'équation différentielle $y''' + y'' - y' - y = x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 661. Montrer sans résoudre le système que les trajectoires du système différentiel

$$S \begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$$

sont planes.

$^{1}_{1}$Exercice 662. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y - z + t \\ y' = -x + y - z + t \\ z' = -x - y + z + t \end{cases}$

$^{2}_{1}$Exercice 663. On considère le système différentiel S : $\begin{cases} x' = x(1-x) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$.
Pour toute solution $X = (x, y)$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de ce système, on considère la trajectoire associée, c'est à dire l'arc paramétré par le couple (x, y).
1) Pour $X = (x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $X_a = (x_a, y_a)$ ou $X_a(t) = X(a + t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que X est solution de S sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, X_a est solution de S sur $\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
Montrer alors que toutes les trajectoires associées aux X_a ont le même support.
2) Déterminer les points du plan qui sont des points stationnaires de trajectoires du système (les points critiques du système) des "points d'équilibres".
3) Montrer que les trajectoires sont des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(E) \qquad w(x, y) := y(x-1)\,\mathrm{d}x + x(y-1)\,\mathrm{d}y = 0$$

vérifier que w n'est pas une forme différentielle exacte.
Déterminer une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à déterminer telle que la forme différentielle $w_1(x, y) = \varphi(xy)w(x, y)$ soit exacte sur des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.
4) Déterminer des équations des supports des trajectoires du système (S) correspondant à l'ouvert $U_1 = (\mathbb{R}_+^*)^2$. Représenter celle qui passe par le point $(1, 2)$.

$^{1}_{1}$Exercice 664. On considère l'équation différentielle (E) $\quad (x + 2y)y' = -\sqrt{1 - y^2}$.
Montrer que les trajectoires du système différentiel autonome

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -\sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

sont courbes intégrales de cette équation différentielle.
2) Résoudre ce système et exprimer x en fonction de y pour ces solutions.

Exercice 665. Résoudre pour $x(0) = -1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 0$ le problème différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$$

$^{1}_{1}$Exercice 666. Vérifier que les arcs γ_a paramétrés par une solution $(x(t), y(t))$ du système différentiel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

vérifiant $x(a) = 1$ et $y(a) = 2$ sont contenus dans une parabole.

Exercice 667. Déterminer les couples (x, y) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Exercice 668. Déterminer les couples (x, y) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Exercice 669. Déterminer les couples (x, y) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = -2x + 4y + 2 \\ y' = -3x + 5y + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Exercice 670. Déterminer le couple (x, y) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $x(0) = 1 = -y(0)$ et solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$$

${}^{2}_{1}$Exercice 671. On cherche les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x + y^2)y' = y$$

que l'on, écrit sous la forme $y\,\mathrm{d}x - (x + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$.
1) vérifier que $w : (x, y) \mapsto y\,\mathrm{d}x - (x + y^2)\,\mathrm{d}y$ n'est la différentielle d'aucune fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
2) Déterminer la différentielle de la fonction $\varphi(x, y) = \frac{x}{y}$ définie sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
3) En déduire une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que pour tout $(x, y) \in U$ on ait

$$w(x, y) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}V_{(x,y)} = 0.$$

4) Déterminer les courbes intégrales de (E). Donner par exemple celle qui passe par $(1, 1)$.

Exercice 672. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x + y + z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = x + y - z - 1 \end{cases}$$

${}^{1}_{1}$Exercice 673. Résoudre l'équation différentielle $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ en la transformant en système différentiel d'ordre 1

${}^{1}_{1}$Exercice 674. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) + y(t) + \mathrm{ch}(2t) \\ y''(t) = 2x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Exercice 675. Résoudre sur $]0,\infty[$ le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \dfrac{y(t)}{t} - \dfrac{z(t)}{t} \\ y'(t) = \dfrac{x(t)}{t} + y(t) + \dfrac{z(t)}{t} \\ z'(t) = -\dfrac{x(t)}{t} + \dfrac{y(t)}{t} + z(t) \end{cases}$$

(A) $\frac{1}{1}$Exercice 676. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 1 \\ y'(t) = x(t) - y(t) + \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

41. Espaces pré-Hilbertiens

(A) $_1$Exercice$^\flat$ 677. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de sa norme associée $x \mapsto \| x \| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Prouver que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x, y\rangle = \frac{\| x+y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2}{2} = \frac{\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2}{4}.$$

$_1$Exercice$^\flat$ 678. Soit E un espace pré-hilbertein. Prouvez le théorème de Pythagore, c'est à dire que pour $(x,y) \in E^2$, on a

$$x \perp y \iff \| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 .$$

$\frac{1}{2}$Exercice$^\flat$ 679. Soit E un espace pré-hilbertein et $A \neq \varnothing$ un sous-ensemble de E.
a) Prouver que $A^\perp$ est un espace-vectoriel.
b) Prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$.
On suppose desormais que E est de dimension finie (euclidien) et on fixe un sous-espace vectoriel F de E.
c) Prouver que $E = F \oplus F^\perp$.
d) En déduire que $F = (F^\perp)^\perp$.

$\frac{1}{2}$Exercice 680. Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace pré-Hilbertien réel. Pour chaque sous-ensemble A de E, on pose $A^\perp := \{x \in E : \forall y \in A, x \perp y\}$.
a) Prouver que $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.
b) Montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$ et que $A \cap A^\perp = \{0\}$.
c) Lorsque A est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, prouver que $E = A + A^\perp$ (autrement dit, on a $E = A \oplus A^\perp$).

1 Exercice$^\flat$ 681. Soit E un espace pré-Hilbertien réel et soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f(0) = 0$ et conservant les distances, i.e. telle que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \| f(x) - f(y) \| = \| x - y \| \,.$$

a) Montrer que f préserve la norme, c'est-à-dire que $\| f(x) \| = \| x \|$ pour $x \in E$.
b) Montrer que f préserve le produit scalaire, c'est-à-dire que $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour $(x,y) \in E^2$.
c) Prouver que f est linéaire en étudiant pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in E^2$ la quantité

$$\| f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) \|^2 \,.$$

Exercice 682. Dans E espace vectoriel muni d'un produit scalaire, établir le théorème de Pythagore, c'est à dire que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \,.$$

2 Exercice 683. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et soit $F \subset E$ un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base orthonormée $\{e_1, \cdots, e_n\}$.
a) Montrer que l'on définit un projecteur de E, d'image F, en posant

$$\forall x \in E, \qquad p(x) := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

b) Pour $x \in E$, prouver que $x - p(x)$ est orthogonal à F, i.e. que $x - p(x) \perp y$ pour chaque $y \in F$.
Le vecteur $p(x)$ est alors appelé la projection orthogonale de x sur F.
c) Montrer que la distance entre un vecteur $x \in E$ et l'espace F est

$$d(x,F) := \inf_{y \in F} d(x,y) = d\big(x, p(x)\big) = \| x - p(x) \|,$$

i.e. montrer que la distance $d(x,y)$ atteint un minimum en $y = p(x)$ lorsque y varie dans F.
d) Expliquer pourquoi un sous-espace vectoriel $F \subset E$ de dimension n admet toujours au moins une base orthonormée $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Conclusion ?

1 Exercice$^\flat$ 684. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée. Prouver que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2 + \| x + y \|^2 \leqslant 2 \left(1 + \| x \|^2\right) \left(1 + \| y \|^2\right)$$

1 Exercice$^\flat$ 685. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on munit $E := \mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire réel en posant

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \langle P, Q \rangle := \sum_{k=0}^{n} P(k) Q(k)$$

${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 686. Soit E un espace pré-Hilbertien réel et soit $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

a) Pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y,z) \in E^3$, prouver que l'on a

$$\langle f(\lambda x + \mu y), z\rangle = \langle \lambda f(x) + \mu f(y), z\rangle$$

b) En déduire que l'application f est linéaire.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 687. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\| p(x) \| \leqslant \| x \|$ pour $x \in E$.

${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 688. Soit E l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(0) = 0 = f(1)$ muni du produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
a) On pose $(f|g) := \langle -f'', g\rangle$. Prouver que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.
b) L'application $(f,g) \mapsto (f|g) + \langle f, ag\rangle$ définit elle un produit scalaire sur E ?
c) Étant donnés $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $a : [0,1] \to]0,\infty[$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, prouver que le problème de“tir”

$$\begin{cases} y''(t) - a(t)y(t) = b(t) & \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ y(0) = \alpha \\ y(1) = \beta \end{cases}$$

possède au plus une solution dans E.

(A) ${}^{2}_{1}$*Exercice*$^\flat$ 689. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace pré-hilbertien E et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection sur F parallèlement à G.
a) Si F et G sont orthogonaux, prouver que

$$(*) \qquad\qquad \forall x \in E, \qquad \| p(x) \| \leqslant \| x \| .$$

b) Si $(*)$ est vérifiée, prouver que F et G sont orthogonaux.

(A) ${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 690. Pour chaque $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de l'espace $E = \mathbb{R}^n$, on pose

$$N_1(X) := |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad \text{et} \qquad N_\infty(X) := \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

a) Prouver que N_1 et N_2 sont deux normes de $E = \mathbb{R}^n$.
b) Si N_1 et N_2 étaient des normes euclidiennes de E, quelles seraient leurs formes polaires $\phi_1(X,Y)$ et $\phi_\infty(X,Y)$?
c) Montrer que ces formes polaires ne sont pas des produits scalaires de E et en déduire que N_1 et N_2 ne sont pas des normes euclidiennes.

${}^{2}_{1}$Exercice 691. Soit E un espace préhilbertien réel et soient $f, g : E \to E$ telles que

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle \qquad (x,y) \in E^2.$$

Montrer que f et g sont linéaires.

${}^{2}_{1}$Exercice 692. Démontrer que la norme de l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par $\| f \| := \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ n'est pas une norme euclidienne.

$^{4}_{2}$Exercice 693. Pour $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\forall (A,B) \in E^2, \quad \langle A, B\rangle := \operatorname{tr}\left({}^{t}AB\right).$$

a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire de E.
b) *difficile :* Notant N la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, prouver que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 694. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité, i.e. vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = 0.$$

Prouver qu'il existe un nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \| u(x) \| = \lambda \| x \| .$$

$^{1}_{1}$Exercice 695. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \langle x, f(x)\rangle = 0.$$

a) Prouver que $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
b) En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{+} \operatorname{Im} f$.

$^{2}_{1}$Exercice 696. a) Prouver que $\langle X, Y\rangle := \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}XY)$ est un produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) En déduire que $\left|\operatorname{tr} A\right| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{{}^{\mathrm{t}}AA}$ pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

$^{2}_{1}$Exercice 697. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et soit $e_1, \cdots, e_n$ une famille de vecteurs unitaires vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Prouver que $e_1, \cdots, e_n$ est une base orthonormale de E.

$^{2}_{1}$Exercice 698. Soit E un espace euclidien de dimension n. On dit que les familles $\{e_1, \cdots, e_b\}$ et $\{f_1, \cdots, f_n\}$ sont *bi − orthogonale* si, et seulement si, elles vérifient :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, \quad \langle e_i, f_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

a) Soient $\{e_1, \cdots, e_b\}$ et $\{f_1, \cdots, f_n\}$ deux familles bi-orthogonales. Montrer qu'elles sont libres.
b) Soit B une base de E. Montrer qu'il existe une unique base B' de E telle que B et B' soient bi-orthogonales.
c) trouver la base B' associée par bi-orthogonalité à

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

42. Inégalité de Cauchy-Schwarz

^{1}Exercice 699. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ et $x \in E$ tel que

$$x \perp u_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Prouver que $x \perp \ell$.

${}^{2}_{2}$Exercice 700. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^n k$ et $T_n := \sum_{k=0}^n k^2$.
a) Calculer S_n. En cas de panne, on pourra d'abbord prouver que $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k)$ pour $n \geqslant 0$.
b) Montrer que $T_n = \sum_{k=0}^n (n-k)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$, développer et en déduire une formule pour T_n ne dépendant que de n.
b) A l'aide de Cauchy Schwarz, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

${}^{2}_{1}$*Exercice* 701. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale (i.e. vérifiant ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$), établir que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leqslant n.$$

${}^{2}_{1}$*Exercice* 702. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale (i.e. vérifiant ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$), établir que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

43. Orthonormalisation

(A) ${}^{2}_{2}$Exercice 703. On note $E := \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, Prouver que l'application $\phi : f \mapsto S_N[f]$ est :
a) un endomorphisme de E.
b) un projecteur de E. (i.e. que $\phi \circ \phi = \phi$).
c) Déterminer Im ϕ et prouver que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur Im ϕ, i.e. que

$$\forall g \in \mathrm{Im}\ \phi, \qquad \langle f - S_N(f), g \rangle = 0.$$

(A) ${}^{1}_{1}$Exercice 704. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E := \mathbb{R}_n[X]$. On pose $\langle P, Q \rangle := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
a) Pour quelles valeurs de n définit-on ainsi un produit scalaire sur E ? On note n_0 la plus grande.
b) Dorénavant $n = n_0$. Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.
c) Déterminer la distance de 1 à $\mathrm{Vect}(X, X^2)$.

(Λ) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 705. Trouver une formule pour la symétrie orthogonale $s(x,y,z)$ et la projection orthogonale $p(x,y,z)$ (vectorielles) de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x+y+z=0$.

(Λ) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 706. Le but de cet exercice est de calculer la borne inférieure

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(ax^2+bx+c-x^3\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

1) Orthonormaliser la famille $\{1, X, X^2\}$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$
2) Déterminer la projection orthogonale P du polynôme X^3 sur l'espace $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Calculer la distance de X^3 à P et conclure.

(Λ) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 707. Le but de cet exercice est de calculer la borne inférieure

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_{0}^{\pi} \left(x\cos t+y\sin t-t\right)^2 \,\mathrm{d}t$$

1) Orthonormaliser la famille $\{\cos, \sin\}$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$
2) Déterminer la projection orthogonale f de l'application $\mathrm{Id} : t \mapsto t$ sur l'espace $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
3) Calculer la distance de f à l'application $\mathrm{Id} : t \mapsto t$ et conclure.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 708. Minimum de l'application $(u,v) \mapsto \int_0^1 (\mathrm{sh}\,x - ux - v)^2\,\mathrm{d}x$.

[1]<u>Exercice</u> 709. Calculer la valeur minimale de $\int_0^1 (t\ln t - a - bt)^2\,\mathrm{d}t$ et préciser pour quels couples (a,b) cette valeur est atteinte.

[1]<u>Exercice</u> 710. Montrer que l'on munit $E := \mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire réel en posant

$$\forall (P,Q)\in E^2, \qquad \langle P, Q\rangle := \int_0^\infty P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer a, b, c et d pour que les fonctions polynômes définies sur $[0,+\infty[$ par $P_0(t) := a$, $P_1(t) := t+b$ et $P_2(t) := t^2+ct+d$ soient orthogonales 2 à 2.
En déduire une famille orthonormée de trois vecteurs de E.

[1]<u>Exercice</u> 711. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. pour $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x_1,\cdots,x_n) := \int_0^1 (1+x_1t+\cdots x_nt^n)^2\,\mathrm{d}t$$

a) Prouver que la fonction f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.
b) Déterminer ce minimum pour $n=3$.

[1]<u>Exercice</u> 712. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. pour $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x_1,\cdots,x_n) := \int_0^1 (1+x_1t+\cdots x_nt^n)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Prouver que la fonction f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.
b) Déterminer ce minimum pour $n=3$.

[1]<u>Exercice</u> 713. Calculer la valeur minimale de $\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2\,\mathrm{d}x$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 714. L'espace $\mathbb{R}^3$ étant muni du produit scalaire canonique, déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale p sur le plan P d'équation $x-y+z=0$ puis calculer la distance du plan P au point A de coordonnées $(-1,2,1)$.

$^{1}_{1}$Exercice 715. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale sur F et calculer $d(x,F)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$.

$^{1}_{1}$Exercice 716. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale sur F et calculer $d(x,F)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$.

^{1}Exercice 717. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

^{1}Exercice 718. Calculer la valeur minimale de $\int_0^1 (t\ln t - a - bt)^2\,\mathrm{d}t$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$^{2}_{1}$Exercice 719. a) Prouver que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\langle P, Q\rangle := \int_{0}^{\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer qu'il existe une (unique) famille orthonormale de polynômes unitaires $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg P_n = n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, prouver que P_n possède exactement n racines simples et strictement positives.

$^{2}_{2}$Exercice 720. Montrer que lon munit l'espace $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire en posant

$$\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

b) Expliquer pourquoi il existe une unique base orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg P_n = n$ et telle que le coefficient dominant de P_n soit positif pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que $P_n(t) = \dfrac{\alpha_n}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arccos} t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-1,1]$.
d) Déterminer les zéros de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
e) Soit U l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n et de coefficient égal à 1. Montrer que la borne inférieure

$$\inf_{P\in U} \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

est atteinte pour $P = P_n$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 721. Déterminer le minimum

$$\min_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} \int_a^b \left(f(x) - c - dx\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

pour $f(x) = x^2$ et $[a,b] = [0,1]$ puis pour $f(x) = \sin x$ et $[a,b] = [-\pi/2, \pi/2]$.

(A) $^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 722. Dans l'espace $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, orthonormaliser la famille constituée des fonctions polynômes

$$p_0 : t \mapsto 1, \qquad p_1 : t \mapsto t, \qquad p_2 : t \mapsto t^2, \qquad p_3 : t \mapsto t^3 \quad \text{et} \quad p_4 : t \mapsto t^4.$$

(A) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 723. Pour $E = \mathcal{C}\big([-1,1]\big)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

calculer la distance de l'application $t \mapsto \operatorname{sh} t$ à l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur à 2.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 724. a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$ en posant

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^{\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $L_n(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right)$. Prouver que L_n est une famille orthonormale de vecteurs de E (telle que $\| L_n \| = 1$ pour $n \geqslant 0$ et $\langle L_m, L_n\rangle = 0$ pour $m \neq n$).

c) Soit $\alpha > 0$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Calculer $\| f \|^2$, $\langle f, L_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\langle f, L_n\rangle^2$. Remarques ?

44. Endomorphismes symétriques

(MP) $^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 725. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et soit x un vecteur unitaire de E (tel que $\| x \| = 1$). Prouver que :
a) $\lambda_1 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant \lambda_n$.
b) $\langle x, f(x)\rangle = \lambda_1 \Leftrightarrow f(x) = \lambda_1 x$.
c) $\langle x, f(x)\rangle = \lambda_n \Leftrightarrow f(x) = \lambda_n x$.

(MP) $^{3}_{3}$<u>Exercice</u> 726. Soit v un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. Pour tout nombre réel α, on note ϕ_α l'application $\phi_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle x, v\rangle v$.
a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, prouver que ϕ_α est un endomorphisme symétrique.
b) Prouver que $\{\phi_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par composition et commutatif pour $\circ$.
c) Prouver que les valeurs propres de ϕ_α sont 1 et $1 + \alpha$. Déterminer les espaces propres associés.
d) si $\alpha \neq -1$, prouver que ϕ_α est inversible. Quel est la nature de ϕ_{-1} ?
e) Déterminer α pour que ϕ_α soit une isométrie. Quelle est la nature de ϕ_{-2} ?

45. Matrices symétriques

^{1}Exercice 727. Soient $k \geqslant 2$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ un couple de matrices symétriques positives telles que $A^k = B^k$.
Démontrer que $A = B$.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 728. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B :=^t AA$, α la plus petite valeur propre de B et β la plus grande.
a) Démontrer que B est symétrique, positive, de même rang que A.
b) Pour chaque valeur propre de A, démontrer que $\alpha \leqslant \lambda^2 \leqslant \beta$.

$^{2}_{3}$Exercice 729. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}MM$ si, et seulement si, A est symétrique et positive.

Exercice 730. Diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

^{1}Exercice 731. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$, prouver que $A = 0$.

Exercice 732. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
a) Prouver qu'il existe une matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$.
b) lorsque A est positive, prouver qu'il existe une matrice symétrique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$.

(MP) $^{2}_{3}$Exercice 733. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
En calculant $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA)$ de deux façons, prouver que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$

Exercice 734. Diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$^{1}_{1}$Exercice 735. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = A + {}^{\mathrm{t}}A$ soit nilpotente ($\exists n \in \mathbb{N}, B^n = 0$). Prouver que A est anti-symétrique (que ${}^{\mathrm{t}}A = -A$).

46. Formes quadratiques

$^{2}_{1}$Exercice 736. Soient $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ et $B := {}^{\mathrm{t}}AA$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q(X) = {}^{\mathrm{t}X}BX$. Prouver que q est une forme quadratique, définie positive.

Exercice 737. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$. Diagonaliser q dans une base orthonormée.

Exercice 738. Pour $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $q(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 20} x_i x_j$.
a) Prouver que q est une forme quadratique.
b) Diagonaliser q dans une base orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{20}$.

Exercice 739. Réduire la forme bilinéaire $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$.

$^{3}_{2}$*Exercice* 740. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Prouver que $q(X) = {}^{\mathrm{t}}XAX$ est une forme quadratique sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée à une forme bilinéaire, définie positive.

Exercice 741. On définit une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^2$ en posant $q(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$.
a) Trouver la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
b) Diagonaliser A dans une base orthonormale B.
c) Exprimer $q(x,y)$ en fonction des coordonnées (x', y') du vecteur x dans la base B.
d) Propriétés géométriques de l'ensemble $\{(x,y) : q(x,y) = 1\}$?

Exercice 742. Réduire la forme quadratique $q(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$.

Exercice 743. Réduire la forme quadratique $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz$.

$^{1}_{1}$Exercice 744. Nature et éléments caractéristiques selon λ de l'ensemble d'équation cartésienne

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 3y = \lambda$$

$^{1}_{1}$Exercice 745. Nature et éléments caractéristiques selon λ de l'ensemble d'équation cartésienne

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - y = \lambda$$

$^{1}_{1}$Exercice 746. Nature et éléments caractéristiques selon λ de l'ensemble d'équation cartésienne

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 - x - y = \lambda$$

$^{2}_{1}$Exercice 747. Prouver que $q(M) := \det M$ définit une forme quadratique sur l'espace $E := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Matrice de q dans la base $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

47. Endomorphismes orthogonaux

^{1}Exercice 748. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f est une symétrie orthogonale.

$^{1}_{1}$Exercice 749. Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f. Prouver que $f(V) = V$ et que $f(V^\perp) = V^\perp$.

$^{3}_{1}$Exercice 750. Soit E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Prouver que $p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$.

48. Matrices orthogonales

$^{2}_{1}$*Exercice* 751. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale (i.e. vérifiant ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$), établir que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n.$$

$^{2}_{1}$*Exercice* 752. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale (i.e. vérifiant ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$), établir que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

$_1$Exercice 753. Compléter la matrice $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdots \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice A de $SO(n)$.

Nature géométrique de l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A ?

Exercice 754. Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 755. Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E et soit U sa matrice dans une base orthonormale B de E.
a) Montrer que U^tU est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\langle u\rangle$.
b) Trouver la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\langle u\rangle$ et par rapport à $\mathrm{Vect}\langle u\rangle^{\perp}$

Exercice 756. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 757. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une isométrie dont on précisera les caractéristiques.

^{1}Exercice 758. Soit B une base orthonormée d'un espace euclidien E de dimension 3 et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est la composée de deux transformations simples que l'on déterminera.

^{1}Exercice 759. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale.

(MP) $^{1}_{1}$Exercice 760. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q_1 := {}^{\mathrm{t}}MM$ et $Q_2 := M{}^{\mathrm{t}}M$.
Prouver qu'il existe $R \in \mathcal{S}O(3)$ telle que $Q_2 = {}^{\mathrm{t}}RQ_1R$ et la déterminer.

$^{3}_{1}$Exercice 761. Soit $A(t)$ une matrice orthogonale d'ordre impaire pour tout $t \in \mathbb{R}$ dont les coefficients sont de classe $\mathcal{C}^1$. Prouver que $A'(t)$ n'est pas inversible pour $t \in \mathbb{R}$.

$^{2}_{1}$Exercice 762. a) Condition nécéssaire et suffisante sur u, v et w pour que la matrice A suivante soit diagonalisable ?

$$A := -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Trouver u, v et w pour que A soit orthogonale.

49. Fonctions

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 763. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :
a) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
b) f est surjecive $\Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f\big(f^{-1}(B)\big)$.

(MP) $^{3}_{1}$Exercice$^\flat$ 764. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f(i,j) = \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$.

a) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Faire un dessin.
b) En déduire qu'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 765. a) Prouver que la fonction ch est une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque ch^{-1} et sa dérivée.
b) Prouver que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque sh^{-1} et sa dérivée.
c) En déduire les primitives $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+\lambda}}$ selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

(M') $^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 766. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :
a) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
b) f est surjecive $\Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f\big(f^{-1}(B)\big)$.

(A) Exercice 767. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \left[\frac{1}{x}\right]$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,\infty[$ mais ne l'est pas sur le segment $[0,1]$, si l'on pose $f(0) := 0$.

(A) Exercice 768. Prouver que la fonction π-périodique f uniquement déterminée par $f(x) := x \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 769. Etudier la fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\big(\cos(x)\big)$.

^{1}Exercice$^\flat$ 770. Calculer $\mathrm{Arctan}\,2 + \mathrm{Arctan}\,5 + \mathrm{Arctan}\,8$.
En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{Arctan}(x-3) + \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}(x+3) = \dfrac{\pi}{4}$.

^{1}Exercice$^{\flat}$ 771. Lorsque elle est définie, simplifier l'expression $\operatorname{Argth} \dfrac{1+xy+yz+xz}{x+y+z+xyz}$.

$^{3}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 772. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, f\circ f(n) = n+2003$.

^{1}Exercice$^{\flat}$ 773. Graphe de la fonction $x\mapsto \dfrac{2x-\mathrm{e}^{-x}}{\ln(1+\operatorname{ch}(x))+\mathrm{e}^{-x}}$ et asymptotes

^{1}Exercice$^{\flat}$ 774. Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions bornées et $\lambda\in\mathbb{R}$. Prouver que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$$

et que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 775. On note $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{1+|y|}, \frac{y}{1+|x|}\right).$$

Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$, montrer que f est bijective et exprimer sa bijection réciproque.

$^{3}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 776. Trouver les couples (x,y) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $x^y = y^x$.

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 777. Pour $(a,b,x)\in\mathbb{R}^3$, calculer les sommes

$$C(a,b) := \sum_{0\leqslant p\leqslant n} \operatorname{ch}(a+pb), \qquad S(a,b) := \sum_{0\leqslant p\leqslant b} \operatorname{sh}(a+pb) \qquad \text{et} \qquad D(x) := \sum_{0\leqslant p\leqslant n} p\operatorname{ch}(px).$$

^{1}Exercice$^{\flat}$ 778. Etudier la fonction $f:x\mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

^{1}Exercice$^{\flat}$ 779. Etudier la fonction $f:x\mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$.

$^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 780. Etudier la fonction $f:x\mapsto \operatorname{Argth}\left(\dfrac{1+3\operatorname{th}(x)}{3+\operatorname{th}(x)}\right)$.

$^{2}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 781. Etudier la fonction $f:x\mapsto \operatorname{Argth}\left(4x^3-3x\right)$.

$^{3}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 782. Trouver les solutions $f\in\mathcal{C}\left([0,1[\,,\mathbb{R}\right)$ de l'équation fonctionnelle

$$\forall x\in[0,1[\,, \qquad f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2)f(x).$$

^{1}Exercice$^{\flat}$ 783. Trouver les couples (x,y) d'éléments de $]0,+\infty[$ vérifiant $\begin{cases} xy = 256, \\ 7(\log_y x + \log_x y) = 50. \end{cases}$

$^{3}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 784. Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivables en 0, vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}.$$

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 785. Etudier la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 786. Etudier la fonction $x \mapsto \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 787. Calculer $u := \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ puis $v := \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 788. Calculer $u := \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{8}\right)$ puis $v := \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8)$.

^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 789. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = -\dfrac{\pi}{4}$.

^{1}<u>Exercice</u>$^\flat$ 790. Montrer que l'équation

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

admet une unique solution, qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$. En déduire cette solution.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 791. Soit $\mathcal{D} := \mathcal{D}(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et soit $\mathcal{P}$ le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{P} := \{z \in \mathbb{C} : \Im m\ (z) > 0\}$.
a) Démontrer que la fonction $\psi : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{D}$.
b) Quelle est l'image par ψ du cercle de centre 0 et de rayon 1 privé de $-i$?

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 792. Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$. Trouver une équation différentielle faisant intervenir x, f, f, f'' afin d'en déduire $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(MP) $^{3}_{2}$<u>Exercice</u> 793. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant $f(x) \leqslant x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prouver que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 794. Étudier la fonction de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et en déduire une expression simplifiée.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 795. Montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 796. En étudiant une fonction, trouver tous les couples $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $x^y = y^x$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 797. Étudier les fonctions $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 798. On pose $\operatorname{Argth}(u) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}$ pour $-1 < u < 1$ et $\operatorname{Argch} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)$ pour $u \geqslant 1$.

Étudier les fonctions $f : x \mapsto \operatorname{Argth}\left(\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \operatorname{Argch}\bigl(4x^3 - 3x\bigr)$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 799. On pose $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Argth}(u) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right)$ pour $-1 < u < 1$.

Étudier la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Argth}\left(\dfrac{1 + 3\operatorname{th} x}{3 + \operatorname{th} x}\right)$.

50. Trigonométrie hyperbolique

(Λ) $^2_2$Exercice$^\flat$ 800. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hyperbolique).

a) Prouver que sh est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Notant Argsh la bijection réciproque de la fonction sh, exprimer argsh u à l'aide des fonctions élémentaires (exp, ln, sin, cos...)

(Λ) $^2_2$Exercice$^\flat$ 801. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hyperbolique).

a) Prouver que ch est une bijection continue de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

b) Notant Argch la bijection réciproque de la fonction ch, exprimer Argch u à l'aide des fonctions élémentaires (exp, ln, sin, cos...)

(Λ) $^2_2$Exercice$^\flat$ 802. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (tangente hyperbolique).

a) Prouver que th est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

b) Notant Argth la bijection réciproque de la fonction th, exprimer Argth u à l'aide des fonctions élémentaires (exp, ln, sin, cos...)

Exercice$^\flat$ 803. Pour $(a, b, c, x) \in \mathbb{R}^4$, calculer les sommes suivantes :

$$C(a,b) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{ch}(a + pb), \qquad S(a,b) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{sh}(a + pb) \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} p \operatorname{ch}(px).$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 804. Etudier la suite $u_n := \operatorname{th}(1) + \operatorname{th}(2) + \cdots + \operatorname{th}(n) - \ln\big(\operatorname{ch}(n)\big)$.

^{1}Exercice$^\flat$ 805. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\prod_{1 \leqslant p \leqslant n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^p}\right)$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 806. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} 2^{-p} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^p}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ après avoir montré, dans un premier temps, que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 807. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 3$.

51. Courbes paramétrées cartésiennes

1 Exercice$^\flat$ 808. Étudier et tracer la courbe d'équation

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

1 Exercice$^\flat$ 809. Étudier et tracer la courbe d'équation

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+\cos t}{1-\cos t-\sin t} \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

1 Exercice$^\flat$ 810. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit f_λ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f_\lambda(x) := (x-\lambda)\mathrm{e}^{1/x}.$$

a) Etudier f_λ au voisinage de 0.
b) Etudier les branches infinies de la fonction f_λ.
c) Calculer la dérivée de f_λ et étudier son signe.
d) Si $\lambda < \mu$, que peut on dire des graphes des fonctions f_λ et f_μ.
e) Dessiner sur un même graphique les graphiques de plusieurs fonction f_λ.

Exercice$^\flat$ 811. Étudier la fonction définie par

$$h : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$$

puis tracer son graphe.

Exercice$^\flat$ 812. Étudier et tracer la courbe $t \mapsto \Big(\cos t, \sin t(1+\cos t)\Big)$.

Exercice$^\flat$ 813. Étudier et tracer la courbe $x = \cos(4t) + 4\cos t$ et $y = \sin(3t)$.

Exercice$^\flat$ 814. Étudier et tracer la courbe $\vec{OM}(t) = (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j}$.

Exercice$^\flat$ 815. Étudier et tracer la courbe $x = 2\cos t + \cos(2t)$ et $y = 2\sin t - \sin(2t)$.

Exercice$^\flat$ 816. Étudier et tracer la courbe $x = \sin t$ et $y = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}$.

Exercice$^\flat$ 817. Étudier et tracer la courbe $t \mapsto \left(\dfrac{t-\sin t}{t^2}, \dfrac{1-\cos t}{t^2}\right)$.

Exercice$^\flat$ 818. Étudier et tracer la courbe $x = t^2 + \dfrac{2}{t}$ et $y = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Étude des points doubles.

Exercice$^\flat$ 819. Étudier et tracer la courbe

$$\begin{cases} x = 3\cos t + 3\cos(2t) + \cos(3t) \\ y = 3\sin t + 3\sin(2t) + \sin(3t) \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 820. Étudier et tracer la courbe $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Exercice$^\flat$ 821. a) Tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 4t, \\ y(t) = 2t^2 - 3 \end{cases}$$

b) Calculer l'angle des tangentes au point double.

Exercice$^\flat$ 822. Branche infinies, points doubles de la couirbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t-1}{t^2-4}, \\ y(t) = \dfrac{t^2-3}{t+2} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 823. Étudier et tracer la courbe paramétrée donnée par

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(2t). \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 824. Étudier et tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t}, \\ y(t) = \ln(t). \end{cases} \qquad (t > 0).$$

On commencera par chercher une symétrie...

Exercice$^\flat$ 825. Déterminer les points multiples de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}, \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 826. Déterminer les points multiples de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t, \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 827. Déterminer les points multiples de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(1+t)^3}{t}, \\ y(t) = \dfrac{t^2-1}{t} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 828. Déterminer les points multiples de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t^2+t-2, \\ y(t) = \dfrac{t^3-3t}{t-1} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 829. Déterminer le support de la courbe paramétré

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = 2-3t^2, \\ y(t) = -1+t^2 \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 830. Déterminer le support de la courbe paramétré

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{1-t}, \\ y(t) = \dfrac{2-3t}{1-t} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 831. Déterminer le support de la courbe paramétrée

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x(t) = 2\sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = 2+\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 832. Déterminer les points doubles, les asymptotes et la position par rapport aux asymptotes de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t^2-2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2-3}{t} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 833. Déterminer les points doubles, les asymptotes et la position par rapport aux asymptotes de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t+1}{t^3} \\ y(t) = \dfrac{t-1}{t^2} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 834. Etudier les branches infinies, les points doubles et représenter la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t^2-4} \\ y = \dfrac{t^2-3}{t+2} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 835. Etudier les branches infinies, les points doubles et représenter la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^3}{u^2-9} \\ y = \dfrac{u(u-2)}{u-3} \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 836. Tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t), \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

Exercice$^\flat$ 837. Tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y(t) = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

52. Courbes paramétrées polaires

$\frac{1}{2}$Exercice$^\flat$ 838. Étudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \tan\vartheta + \tan\frac{\vartheta}{2}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

$\frac{1}{2}$Exercice$^\flat$ 839. Étudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sqrt{1-\sin\vartheta}}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

$\frac{1}{2}$Exercice$^\flat$ 840. Étudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{\cos(2\vartheta)}{2\cos\vartheta - 1}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

$^{1}_{2}$Exercice$^\flat$ 841. Étudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \sqrt{1-\cos(2\vartheta)} + \sqrt{1-\sin(2\vartheta)}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

$^{1}_{2}$Exercice$^\flat$ 842. Étudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{1+\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

en précisant l'allure locale en chaque point singulier, les branches infinies et les éventuels points d'inflexions ainsi que les points doubles.

Exercice$^\flat$ 843. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = 1 + \tan\dfrac{\vartheta}{2}$.

Exercice$^\flat$ 844. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \cos\vartheta\cos(2\vartheta)$.

Exercice$^\flat$ 845. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = 1 - \sin\dfrac{\vartheta}{2}$.

^{1}Exercice$^\flat$ 846. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \dfrac{\sin(3\vartheta/2)}{1-2\cos\vartheta}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 847. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin(2\vartheta)}+\sqrt{1-\sin(2\vartheta)}}$. Quelle figure obtient-on ?

Exercice$^\flat$ 848. Comportement au voisinage de 0 de $\varrho = \dfrac{\sin^3\vartheta}{1+\cos^2\vartheta}$.

Exercice$^\flat$ 849. Étude de la cochléoïde $\varrho = \dfrac{\sin\vartheta}{\vartheta}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 850. On considère un limaçon de Pascal d'équation polaire $\varrho = a + b\cos\vartheta$. Une droite coupe le limaçon en quatres points de rayons ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 et ϱ_4.
a) Calculer $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\varrho_4$.
b) Démontrer que le produit $\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4$ est constant lorsque la droite est tangente à un cercle fixe de centre O.

Exercice$^\flat$ 851. Etude et nature de la courbe paramétrée

$$\varrho := \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(2\vartheta)}.$$

^{1}Exercice$^\flat$ 852. Déterminer la nature des courbes d'équation polaire

$$a: \qquad \varrho(\vartheta) = \frac{2}{2+\cos\vartheta+\sin\vartheta} \qquad\qquad b: \qquad \varrho(\vartheta) = \frac{2}{2+\cos\vartheta+\sin\vartheta}$$

Exercice$^\flat$ 853. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = 1 + 2\cos(3\vartheta)$.

Exercice$^\flat$ 854. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \ln\big(|\cos\vartheta|\big)$.

Exercice$^\flat$ 855. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \dfrac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \sin\vartheta}$.

Exercice$^\flat$ 856. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \sin^3\left(\dfrac{\vartheta}{3}\right)$.

Exercice$^\flat$ 857. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = 1 + 2\cos(3\vartheta)$.

Exercice$^\flat$ 858. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \dfrac{1}{\cos(\vartheta/2)}$.

Exercice$^\flat$ 859. On considère le *Folium de Descartes* $\mathcal{F}$ d'équation polaire

$$(\mathcal{F}) \qquad \varrho := \frac{\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta) - \cos(\vartheta)}.$$

a) Déterminer $\mathcal{D}\varrho$ et réduire l'ensemble d'étude.

b) Etudier le signe et les variations de ϱ. Faire figurer les tangentes dans le tableau de variation.

c) Branches infinies et position de $\mathcal{F}$ par rapport à ses asymptotes ?

d) Tracer la courbe.

Exercice$^\flat$ 860. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = 1 + 2\cos\vartheta - 4\cos^2\vartheta$.

Exercice$^\flat$ 861. Étudier et tracer la courbe polaire $\varrho = \dfrac{\sin(3\vartheta)}{\sin(\vartheta)}$.

Exercice$^\flat$ 862. Reconnaitre les courbes d'équations polaires $r = \dfrac{1}{\cos\vartheta + 3\sin\vartheta}$ et $r = 3\cos\vartheta - 4\sin\vartheta$.

Exercice$^\flat$ 863. Tracer la courbe paramétrée polaire

$$r = \cos(\vartheta) - \cos(2\vartheta)$$

Exercice$^\flat$ 864. Tracer la courbe paramétrée polaire

$$r = \frac{\cos(\vartheta)}{1 + \sin(\vartheta)}.$$

Exercice$^\flat$ 865. Tracer la courbe paramétrée polaire

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sin(2t)}}.$$

Exercice$^\flat$ 866. Tracer la courbe paramétrée polaire

$$r = \frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}.$$

53. Normes

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 867. Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $N(A) := \sqrt{\operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AA)}$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Démontrer que N est une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, prouver que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 868. Soit $\| \,.\, \|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$|||A||| := \sup_{|X|=1} \| AX \| = \sup X \neq 0 \frac{\| AX \|}{\| X \|}.$$

a) Montrer que l'appliation $A \mapsto |||A|||$ définit une norme de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, prouver que $|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||$.

$^{1}_{1}$Exercice 869. Prouver que l'application $f \mapsto \int_0^1 \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 870. Soient $n \geqslant 1$, N une norme de l'espace $E := \mathbb{R}^n$ et $\| \,.\, \|_\infty$ la norme infinie.
a) Prouver que $\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y)$ pour $(x, y) \in E^2$.
b) En déduire que $x \mapsto N(x)$ est une application continue de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
c) Montrer que la sphére $\{x \in E : \| x \|_\infty = 1\}$ est un compact de (E, N).
d) En déduire que les normes N et $\| \,.\, \|_\infty$ sont équivalentes sur E.

$^{1}_{1}$Exercice 871. Prouver que l'application $P \mapsto \| P \| := \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|P(t) - P'(t)\big|$ définit une norme de $\mathbb{R}[X]$.

$^{1}_{1}$Exercice 872. Prouver que l'application $(x, y) \mapsto \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$ définit une norme de l'espace $\mathbb{R}^2$ et déssiner la boule unité.

$^{2}_{1}$Exercice 873. On pose $E := \mathcal{C}^1\,([-1, 1], \mathbb{R})$ et

$$N(f) := \sqrt{2f(0)^2 + \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)^2}{\sqrt{1 - t^2}} \,\mathrm{d}t}$$

a) Prouver que N est une norme de E.
b) N est elle une norme euclidienne ?

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 874. On pose $\| x \|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|x_i|\}$ pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour chaque norme N de $\mathbb{R}^n$, prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N(x) \leqslant \alpha \| x \|_\infty \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

54. Suites

(Λ) Exercice$^\flat$ 875. Prouver que la suite de terme général $u_n := (\frac{1}{3e^n+2}, \frac{2n}{n+1}, 1)$ converge vers $(0,2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(Λ) $^{1}_{1}$Exercice 876. Prolonger par continuité en $(0,0)$ pour l'application f définie par

$$\forall (x,y) \neq (0,0), \qquad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Exercice$^\flat$ 877. Soit u une suite convergeante d'entiers relatifs. Montrer qu'elle est stationnaie (i.e. constante à partir d'un certain rang).

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 878. Soit u_n une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Traduire en français les phrases mathématiques suivantes :

$$\begin{array}{lllll} a: & \exists \varepsilon > 0, & \exists N \in \mathbb{N}, & \forall n \geqslant N, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon, \\ b: & \exists N \in \mathbb{N}, & \forall \varepsilon > 0, & \forall n \geqslant N, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ c: & \forall \varepsilon > 0, & \forall n \in \mathbb{N}, & \exists N \in \mathbb{N}, & (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon) \end{array}$$

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 879. Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Prouver que les suites $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2}$$

convergent vers la même limite.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 880. Soient $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f_0 := f$ et $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie par $f_{n+1}(x) := \big(f_n(x/2) + f_n(x/2+1/2)\big)/2$ pour $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$. Démontrer qu'il existe une constante $\ell \in \mathbb{R}$ pour laquelle $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \big|f_n(x) - \ell\big| = 0$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 881. Pour $n \geqslant 2$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 882. Etudier la limite de la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} := \sin(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 883. Soit $u_0 \in \,]0, \pi/2[$ et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_{n+1} := \sin u_n$ pour $n \geqslant 0$.
a) Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle tends vers 0.
b) En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^3$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$.
c) Trouver un nombre $\alpha > 0$ et une constante $\beta > 0$ tels que

$$\frac{1}{(u_n)^\alpha} - \frac{1}{(u_{n+1})^\alpha} \sim \beta \qquad (n \to \infty).$$

d) En sommant la relation précédente, trouver un équivalent simple de la suite u_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice$^\flat$ 884. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+4n^2}}{n+3}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice$^\flat$ 885. Soit $\alpha \in \,]0,\pi[$. Prouver la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(n\alpha)$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice$^\flat$ 886. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.
a) Prouver que u_n et v_n sont adjacentes.
b) Notant e leur limite commune, trouver une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 887. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} := \sqrt{2+u_n}$ pour $n \geqslant 0$.
a) Prouver que $u_n \in [0,2]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers ℓ à déterminer.
c) En étudiant la suite $x_n = \operatorname{Arccos}(u_n/2)$ retrouver le résultat précédent.
d) trouver une constante $a \in [0,1[$ telle que $|u_{n+1}-2| \leqslant a\,|u_n - 2|$ pour $n \in \mathbb{N}$ et retrouver le résultat des questions b) et c).

Exercice$^\flat$ 888. Soient $(a,b) \in \,]0,\infty[^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n-1}} \qquad (n \geqslant 0).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice$^\flat$ 889. a)Établir une condition nécéssaire et suffisante sur deux suites u_n et v_n pour que $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
b) trouver deux suites $u_n \not\sim v_n$ telles que $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ et deux suites $u'_n \sim v'_n$ telles que $\mathrm{e}^{u'_n} \not\sim \mathrm{e}^{v'_n}$.

Exercice$^\flat$ 890. Démontrer que les suites $u_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = u_n(1+\frac{1}{n})$ sont adjacentes.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 891. Etudier la suite $u_n := \operatorname{th}(1) + \operatorname{th}(2) + \cdots + \operatorname{th}(n) - \ln\big(\operatorname{ch}(n)\big)$.

(Maple) $_1$Exercice$^\flat$ 892. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } u_n = 1 \\ \dfrac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{est pair} \\ 3u_n + 1 \text{ si } u_n \text{ est impair et différent de } 1 \end{cases}$$

a) Définir une fonction f (**avec piecewise**) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
b) Ecrire une procédure **CalculUn** prenant en entrée n et u_0 et renvoyant en sortie u_n

$^1_1$Exercice$^\flat$ 893. Étudier la suite de terme général $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+5}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 894. Étudier la suite de terme général $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 12}{3u_n - 5}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 895. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$.

${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 896. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{K}$. Prouver que la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k$$

converge et déterminer sa limite.

${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 897. Démontrer que les suites $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sont adjacentes

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 898. Prouver que les suites $u_n = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = u_n + \frac{u_n}{n}$ sont adjacentes

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 899. Soient $a > 0$, $b > 0$ et soient u et v les suites de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (a + bk)$ et $v_n = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (a + bp)^{1/n}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 900. Montrer que $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{e}^{k^2} \sim \mathrm{e}^{n^2}$.

${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 901. Démontrer que la suite $u_n = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge vers une limite L et donner un équivalent simple de $u_n - L$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 902. Etudier l'existence d'un plus grand et d'un plus petit élément, d'une borne inférieure et d'une borne supérieure pour l'ensemble

$$A := \left\{ (-1)^n (1 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Les déterminer en cas d'existence.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 903. On définit la suite u par $u_0 = 1$ et par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$$

Montrer que la suite u est convergeante et déterminer sa limite.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 904. Établir que

$$\forall x > 0, \qquad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{ka}{n^2}\right)$$

Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 905. Soit u la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n := \sum_{n \leqslant k \leqslant 2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que la suite u est convergente et prouver que sa limite ℓ vérifie $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 906. Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx], \qquad v_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{n}{n^2+k}, \qquad w_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$$

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 907. a) Etablir que

$$\forall x>0, \qquad \frac{1}{x+1}\leqslant \ln(1+x)-\ln(x)\leqslant\frac{1}{x}$$

b) Soient u et v les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n) \qquad \text{et} \qquad v(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$

Montrer que u et v admettent la même limite, que l'on ne calculera pas, c'est la constante d'Euler γ.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 908. Soient u et v les deux suites définies par la donnée de $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$ et par

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases}$$

Montrer que u et v convergent vers la même limite, que l'on determinera.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 909. Soit u la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que les suites de termes général $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont adjacentes. En déduire la nature de la suite u.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 910. soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{3+u_{n-1}}$$

Soient α et β les deux solutions de l'équation $x = \frac{1}{3+x}$ avec $\alpha>\beta$. Montrer que la suite z de terme général $z_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est géométrique, puis conclure que la suite u converge vers α.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 911. Etude graphique de la suite u définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n-\ln(1+u_n)}{u_n^2}$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 912. Que dire de deux suites (u_n) et (v_n) de $[0,1]$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty}u_nv_n = 1$?

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 913. Soit (u_n) une suite bornée vérifiant

$$\forall n\geqslant 1, \qquad 2u_n\leqslant u_{n-1}+u_{n+1}.$$

Montrer la suite u_n est convergente.

Exercice$^\flat$ 914. Soient a, b et c trois réels distincts, a étant non nul. On suppose que a, b, c sont en progression arithmétique et que $3a, b, c$ sont en progression géométrique. Que dire de la raison de cette progression géométrique?

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 915. On se donne une suite réelle (u_n). On suppose que les suites de terme général respectif $a_n = u_{2n}$, $b_n = u_{2n+1}$ et $c_n = u_{3n}$ sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 916. On considère la suite de terme général $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad , u_{n+1}^2 \leqslant 1 + \sqrt{2} u_n.$$

La suite (u_n) est-elle convergente?

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 917. Soit $k \geqslant 2$ un entier. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 918. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad v_n := \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1} \right)$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 919. Soit $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$$

a) si $u_0 := 1$ et $u_1 := 2$, prouver que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = 2^n.$$

b) si $u_0 := 0$ et $u_1 := 1$, prouver que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_n = 3^n - 2^n.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 920. Trouver une formule pour le terme u_n de la suite définie par récurence par $u_0 = -\pi$ et

$$\forall n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = (2n+1)u_n.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 921. a) Simplifier quand elle a un sens l'expression $\dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

b) Calculer $P_n := \displaystyle\prod_{k=0}^{n} c_k$ où $c_n := \cos \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ (relation de Viète).

c) En déduire la valeur de l'expression

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}.$$

d) Simplifier (lorsqu'elle a un sens) l'expression $\dfrac{1}{\tan(\alpha)} - \dfrac{2}{\tan(2\alpha)}$.

e) En déduire une expression simple (sans le signe somme) de $S_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ en fonction de n et de $t_n := \dfrac{1}{2^n} \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ (relation de Descartes).

f) En admettant que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$ et que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\tan(u)}{u} = 1$, que peut-on en déduire quant aux limites éventuelles de S_n et de P_n ?

Exercice 922. Pour $n \geqslant 3$, on pose $S_n := \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$.
a) Prouver que $S_n \sim \ln(\ln n)$ lorsque $n \to \infty$.
b) On pose $S_n = \ln(\ln n) + r_n$ pour $n \geqslant 3$. Prouver que la suite r_n est bornée.
c) Prouver que la suite r_n converge vers une limite ℓ.

$^{2}_{2}$Exercice 923. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $v_1 := \alpha$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sqrt{1 + v_{n-1}^2} \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{v_k}.$$

Etudier les suites de terme général $u_n = s_n - 2v_n$, v_n, s_n et $\dfrac{s_n}{v_n}$.

$^{1}_{2}$Exercice$^\flat$ 924. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, établir la convergence de la suite $\{z_n\}_{n \geqslant 1}$ définie par $z_{n+1} := \frac{z_n + |z_n|}{2}$ pour $n \geqslant 0$ et déterminer sa limite.

55. Topologie

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 925. Pour chaque $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de l'espace $E = \mathbb{R}^n$, on pose

$$N_1(x) := |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad \text{et} \qquad N_\infty(X) := \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

a) Dans cette question $n = 2$. Représenter sur le même dessin, la boule (ouverte) unité de centre 0 pour les normes N_1, N_2, N_∞ de $\mathbb{R}^2$.
b) Dans cette question, $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives a, b, α et β telles que

$$\forall x \in E, \qquad aN_2(x) \leqslant N_\infty(x) \leqslant bN_2(x) \qquad \text{et} \qquad \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x).$$

c) en déduire que les trois boules précédentes sont des ouverts.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 926. Montrer que l'ensemble $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 1\}$ est ouvert.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 927. Prouver que l'ensemble $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$ est fermé.

$^{1}_{1}$Exercice 928. Soient $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $\varrho \geqslant 0$.
Prouver que la boule ouverte $B(x, r) := \{y \in E : \| x - y \| < r\}$ est une partie ouverte de E et que la boule fermée $\overline{B(x, \varrho)} := \{y \in E : \| x - y \| \leqslant \varrho\}$ est une partie fermée de E.

$^2_2$Exercice 929. Montrer que $F \subset \mathbb{R}^p$ est fermé si, et seulement si, pour toute suite convergente $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n \in A$ (i.e. F est stable par passage à la limite).

^{1}Exercice 930. Montrer que $\{(x,y) \in]0,\infty[^2 : 2x+5y > 10 \text{ et } x^2+y^2 < 9\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

$_1$Exercice 931. Soient A un ouvert de $\mathbb{R}$ et B un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

$_1$Exercice 932. Prouver que l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2 < 1\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 933. a) Prouver que $f : (x,y) \mapsto \sin(xy)+\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) En déduire que l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \sin(xy)+\cos(x) < 5\}$ est ouvert.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 934. Dans $E = \mathbb{R}$ muni de sa norme euclidienne classique.
a) Que vaut $\| x \|$ pour $x \in \mathbb{R}$?
b) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, quel objet géomètrique est $B(a,r)$?
c) Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts/fermés ?

$$\begin{array}{llllllll} a: &]-\infty,0[& b: &]-\infty,0] & c: &]0,1[& d: & [0,1[\\ e: & [0,1] & f: &]1,\infty[\setminus [2,3] & g: & \mathbb{R} & h: &]0,1[\cup]2,3[\end{array}$$

$^2_2$Exercice 935. Prouver que $\mathbb{Z}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$.

56. Connexité

$^2_2$Exercice$^\flat$ 936. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.
a) Démontrer qu'il existe $x \in [0,1/2]$ tel que $f(x+1/2) = f(x)$.
b) Pour chaque entier $p \geqslant 3$, montrer qu'il existe $x \in [0,1-1/p]$ tel que $f(x+1/p) = f(x)$.

57. Compacité

(MP) $^2_2$Exercice 937. Soient $n \geqslant 1$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application vérifiant $f(K) \subset K$ et

$$\| f(y) - f(x) \|_2 < \| y - x \|_2 \qquad (x \neq y).$$

a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^n$.
c) En déduire que l'application $g : x \mapsto \| x - f(x) \|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
d) Montrer que f admet un unique point fixe a dans K.

58. Fonctions de plusieurs variables

$^2_2$Exercice 938. Existence et calcul de la limite $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{xy}{2x^2+y^2}$.

$^2_2$Exercice 939. Étudier si la fonction $f(x,y) := \dfrac{xy}{(2x^2+y^3)}$ est bornée sur $]0,\infty[^2$.

$^2_2$Exercice 940. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Prouver que l'on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } \ x \neq y \\ f'(x) & \text{si } \ x = y \end{cases}$$

$^2_2$Exercice 941. Existence et calcul de la limite $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x>0}} \frac{x^2y^2}{x^3+y^4}$.

$^2_2$Exercice 942. Existence et calcul de la limite $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x>0}} \frac{x^2y^2}{x^3+2y^6}$.

$^2_2$Exercice 943. Étudier si la fonction $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^4}$ est bornée sur $]0,\infty[^2$.

$^2_2$Exercice 944. Étudier si la fonction $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^6}$ est bornée sur $]0,\infty[^2$.

$^2_2$Exercice 945. Étudier si la fonction $f(x,y) := \dfrac{xye^{x+y}}{e^{x^2+y^2}-1}$ est bornée sur $]0,\infty[^2$.

$^2_1$Exercice 946. Soit f l'application définie par $f(x,y,z) := \mathrm{d}s\frac{z^3}{(x+y+z)(y+z)}$ pour $(x,y,z) \in\,]0,\infty[^3$.
a) Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $D := \{(x,y,z) \in [0,+\infty[^3 : x+y+z \leqslant 1\}$.
b) Calculer $\int\int\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$^2_1$Exercice 947. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $F(x,y) := \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et par $F(x,y) := f'(x)$ si $x = y$. Étudier la continuité et la différentiabilité de F sur $\mathbb{R}^2$.

$^1_1$Exercice 948. Déterminer si l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$^1_1$Exercice 949. Soit $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) : t \leqslant 0\}$. En procédant à un changement de variable polaire, déterminer les solutions $f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_1^2 f(x,y) + \partial_2 f^2(x,y) = 0 \qquad \big((x,y) \in E\big).$$

Exercice 950. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) := x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
a) Déterminer les points critiques de f.
b) Parmi ces points critiques, lesquels sont des extrémums locaux/globaux de f.

Exercice 951. Soit $E := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,s,t) : s \leqslant 0, t \in \mathbb{R}\}$. En procédant à un changement de variable sphérique, déterminer les solutions $f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_1^2 f(x,y,z) + \partial_2 f^2(x,y),z + \partial_3 f^2(x,y,z) = 0 \qquad \big((x,y,z) \in E\big).$$

Exercice 952. Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})^2$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $h(x,y) := f\big(x^2 - y^2, y^2 - g(x,y)^2\big)$.
a) Calculer $\partial_1 h$ et $\partial_2 h$ en fonction de $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_1 g$ et $\partial_2 g$.
b) Si f ne possède aucun point critique et si $h(x,y) = 0$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, établir que

$$yg(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + xg(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Exercice 953. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, prouvez que

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad (\lambda > 0, x \neq 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i \partial_i f(x) = \alpha f(x) \quad \big(x := (x_1, \cdots, x_p) \neq 0\big)$$

Exercice 954. On pose $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} (x,y) \neq (0,0), \\ 0 (x,y) = (0,0). \end{cases}$.

a) Continuité de f sur $\mathbb{R}^2$?
b) Existence des dérivées partielles ?
c) f est elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 955. Prouver que $f : (x,y,z) \mapsto (x, xy, xyz)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0,\infty[^3$ dans $]0,\infty[^3$.

Exercice 956. Prouver que l'application $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 957. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $r := \sqrt{x^2+y^2}$ et $f(x,y) := \begin{cases} -r^2 r \leqslant 1 \\ 1 - 2r r > 1 \end{cases}$.
Quel est le plus grand entier k tel que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$?

Exercice 958. Pour $x \in]0,2\pi[$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose $P(x,y) := \dfrac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}$ et $Q(x,y) := \dfrac{\sin x \operatorname{sh} y}{(\operatorname{ch} y - \cos x)^2}$.
Calculer $\Delta P := \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ et $\Delta Q := \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$.

Exercice 959. Soit $f \in \mathcal{C}^3(U,\mathbb{R})$ une fonction harmonique sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ (i.e. tq $\forall (x,y) \in U, \Delta f(x,y) = 0$).
Prouver que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $(x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sont harmoniques sur U.

$^{2}_{2}$Exercice 960. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice jacobienne de l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (f(x, y), 2xy)$ est de la forme $\begin{pmatrix} v_{x,y} & -w_{x,y} \\ w_{x,y} & v_{x,y} \end{pmatrix}$ en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 961. Pour chaque $(x, y, z) \in]0, \infty[^3$, on pose $f(x, y, z) = \text{Arctan}(x/y) + \text{Arctan}(y/z) + \text{Arctan}(z/x)$. Calculer $\Delta f(x, y, z) := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$.

$^{2}_{1}$Exercice 962. Soit $f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(x, y) = F(y/x)$ pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.
a) Calculer Δf.
b) Lorsque $\Delta f(x, y) = 0$ pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, déterminer f.
c) Même question en supposant que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

$^{2}_{1}$Exercice 963. Trouver toutes les fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que la fonction f définie pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - 3y\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y) \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R}).$$

^{1}Exercice 964. Calculer la limite de de $(x, y) \mapsto \dfrac{2y^3 + 2y^2 - 2xy^2 + 3x^2y + x^2 + x^3}{x^2 + 2y^2}$ en $(0, 0)$.

Exercice 965. Déterminer une fonction $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (un potentiel scalaire) telle que

$$\mathrm{d}f = (2x \cos y - y^2 \sin x)\,\mathrm{d}x + (2y \cos x - x^2 \sin y)\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 966. a) Déterminer un potentiel vecteur $f = (P, Q, R)$ tel que

$$\vec{\text{rot}} f = \big(x^2, y^2, -(2z + a)(x + y)\big) \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

b) Si S désigne une surface orientée de bord ∂S, en déduire que

$$\iint_S \big(x^2\,\mathrm{d}y \Lambda\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z \Lambda\,\mathrm{d}x - (2z + a)(x + y)\,\mathrm{d}x \Lambda\,\mathrm{d}y\big) = \int_{\partial S} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z).$$

$^{1}_{1}$Exercice 967. Déterminer $f \in \mathcal{C}^2\big(]-1, 1[, \mathbb{R}\big)$ pour que

$$g(x, y) = f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$$

ait un laplacien nul.

$^{1}_{1}$*Exercice* 968. Résoudre l'équation suivante sur l'ouvert $U : 0 < y < x$.

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} - y^2\frac{\partial f}{\partial y} = (y^2 - x^2)\sin(x + y)$$

Exercice 969. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On pose $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Calculer

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Exercice 970. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $g(x,y) := f(x^2 - y^2, 2xy)$. Calculer $\Delta(g)$ en fonction de $\Delta(f)$.

(A) $^1_1$Exercice 971. Prolonger par continuité en $(0,0)$ pour l'application f définie par

$$\forall (x,y) \neq (0,0), \qquad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

$^1_1$Exercice 972. Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2y^2 + xy^2}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$^1_1$Exercice 973. Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$^1_1$Exercice 974. Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

59. Continuité

(MP) $^2_2$Exercice 975. Soient p, q deux entiers supérieurs à 1 et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.
1) Montrer que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \iff f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ pour chaque ouvert O de $\mathbb{R}^q$.
2) En déduire que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Prouver que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \iff f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$ pour chaque fermé O de $\mathbb{R}^q$.
4) En déduire que l'ensemble des matrices symétriques est fermé.

Exercice 976. Prouver que l'application $(x,y,z,t) \mapsto \left(\dfrac{\cos(zy)}{1+t^2+x^2}, 1, txyz \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^4$.

$^{2}_{2}$Exercice 977. Soient p, q deux entiers supérieurs à 1 et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.
1) Montrer que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \iff f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ pour chaque ouvert O de $\mathbb{R}^q$.
2) En déduire que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \iff f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$ pour chaque fermé O de $\mathbb{R}^q$.
3) Prouver que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4) De même, prouver que l'ensemble des matrices symétriques est fermé.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 978. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 979. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0, contrairement à $x \mapsto \sqrt{|x|}\sin(1/x)$.

$_{1}$Exercice$^\flat$ 980. Que peut-on dire d'une fonction périodique f de période $T > 0$ admettant une limite en $+\infty$?

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 981. étudier la continuité de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\sin x)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 982. a) Soit I un intervalle réel et soit $k \geqslant 0$. Prouver qu'une fonction k-lipshitzienne $f : I \to \mathbb{C}$ est continue.
b) Montrer que $x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0, 1]$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 983. Peut-on prolonger par continuité en -1, en 0, en 1 la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \qquad f(x) := \frac{\big(\ln|x|\big)^n}{x^2 - 1}.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 984. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f(x) := x - [x] - \frac{1}{2}$. Montrer que f est périodique et bornée sur $\mathbb{R}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 985. a) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est bornée sur $[a, +\infty[$.
b) Montrer qu'une fonction périodique et continue $f : \setminus \to \mathbb{R}$ est nécéssairement bornée.
c) Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

$^{1}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 986. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = c$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 987. Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$. On suppose que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 0 < f(x) < 1.$$

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n := f(x_n)^n$.
a) Montrer qu'il existe $m \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 0 < f(x) \leqslant m.$$

En déduire que la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 988. Prouver que l'on définit une fonction continue en posant $f(0, 0) = 0$ et

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \qquad f(x, y) := \frac{xy}{|x| + |y|}.$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 989. Prouver que l'application définie par $f(0,0) = 0$ et

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 990. L'application définie par $f(0,0) := 0$ et

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad f(x,y) := \frac{xy^2}{x^4+y^2}$$

est elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

$^2_1$Exercice 991. Soient $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux applications continues en $a \in \mathbb{R}^p$. Prouver que l'application $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ est continue en a.

Exercice 992. Étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x>0}} \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}$.

$^2_1$Exercice 993. Trouver une condition sur $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \in [0, +\infty[^2$ pour que $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x>0, y>0, z>0}} \dfrac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{x^a + 2y^b + 3z^c}$ existe.

$^2_1$Exercice 994. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(2x+a) = f(x)$.

$^2_1$Exercice 995. Étudiez la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ \dfrac{\sin(xy)}{x+y} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

$^2_1$Exercice 996. Calculer $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$.

$^1_1$Exercice 997. Montrer que l'application $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}$ est bornée sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$.

$_1$Exercice 998. Étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$.

$^3_1$Exercice$^\flat$ 999. Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],]0, \infty[\big)$. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^x \,\mathrm{d}t \right)^{1/x}$.

$^1_2$Exercice$^\flat$ 1000. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 = f(x).$$

$^2_2$Exercice$^\flat$ 1001. Montrer que les fonctions constantes sont les seules fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = f(x).$$

60. Dérivation

$^{1}_{2}$Exercice 1002. On pose $f(0,0) := 0$ et

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

d) En déduire que f n'est par de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$_{1}$Exercice 1003. Déterminer si l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$_{1}$Exercice 1004. Déterminer si l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(0,0) := 0$ et

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

$_{1}$Exercice 1005. Déterminer si l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(0,0) := 0$ et

$$f(x,y) := \frac{x^3+xy^2+y^4}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

$_{1}$Exercice 1006. Déterminer si l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(x,x) := 2x$ si $x \in \mathbb{R}$ et

$$f(x,y) := \frac{\sin(y^2-x^2)}{y-x} \qquad (y \neq x).$$

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 1007. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ application continue en 0 telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = L.$$

Démontrer que f est dérivable en 0.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1008. Soit f la fonction définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{|x|}{x}\ln\big(1-|x|\big)$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, noté $\tilde{f}$. La fonction $\tilde{f}$ est elle dérivable en 0 ?

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1009. Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1010. Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1011. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ suivante : $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(x^2(1+x)^n\Big)$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1012. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(x^n \mathrm{e}^{1/x}\Big) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{1/x}$$

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1013. i) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, calculer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x-a)^n(x-b)^n\Big)$.
ii) En utilisant ce qui précède pour $a = b$, calculer

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1014. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, prouver que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1015. Soit D l'ensemble défini par les inégalités $(x+y)^2 \leqslant 2x$ et $y \geqslant 0$. Calculer l'intégrale double

$$I := \iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

61. Extrema

${}^{2}_{2}$Exercice 1016. Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle.

${}^{1}_{1}$Exercice 1017. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
a) Déterminer les points critiques de f.
b) Lesquels sont des extrema locaux et lesquels sont des extrema absolus/globaux.

${}^{1}_{1}$Exercice 1018. Étudier les extrema de $f : (x,y) \mapsto 4x^4 + 4y^4 - (x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

${}^{1}_{1}$Exercice 1019. Étudier les extremas de la fonction $f : (x,y) \mapsto 2\sqrt{x^2+y^2} - x - y$ sur la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 2.

${}^{1}_{1}$Exercice 1020. Étudier les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x\sin y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

${}^{2}_{1}$Exercice 1021. Étudier les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^2$.

${}^{1}_{1}$Exercice 1022. Trouver les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + \cos(x^2+y^2)$ sur $\left]-1/2, 1/2\right[^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 1023. Trouver les extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $]0, \infty[^2$

$^{2}_{2}$Exercice 1024. Montrer qu'il existe un minimum global et un maximum global de l'application $f : (x, y) \mapsto (y-x)^3 + 6xy$ sur l'ensemble $\Delta = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : x \leqslant y\}$. Les calculer.

$^{1}_{1}$Exercice 1025. Extrema globaux et locaux de $(x, y) \mapsto -(x-1)^2 - (x - \mathrm{e}^y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 1026. Trouver à volume égal les parallélépipèdes de moindre surface.

$^{1}_{1}$Exercice 1027. Étudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 1028. Étudier les extrema de l'application $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ sur $\mathbb{R}^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 1029. Étudier les extrema de l'application $f : (x, y) \mapsto x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$ sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1030. Extremums de $\sin x + \sin y + \cos(x+y)$ sur $]0, \pi[^2$?

$^{1}_{1}$Exercice 1031. Parmi les triangles dont le périmètre est fixé, quels sont ceux dont l'aire est maximale ?

$^{1}_{1}$Exercice 1032. Chercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

$^{1}_{1}$Exercice 1033. Chercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x, y) \mapsto (x-y)\mathrm{e}^{xy}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1034. Chercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$.

$^{1}_{1}$Exercice 1035. Chercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x \sin y}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1036. Chercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$.

$^{1}_{1}$Exercice 1037. Déterminer les extremums sur $[0, 1]^2$ de l'application

$$f : (x, y) \mapsto xy(1 - x^2 - y^2).$$

$^{1}_{1}$Exercice 1038. Trouvez les points critiques et déterminer si ce sont des extrema locaux de

$$f(x, y, z) = \cos(2x)\sin(y) + z^2$$

$^{1}_{1}$Exercice 1039. Trouvez les points critiques et déterminer si ce sont des extrema locaux de l'application

$$f(x, y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$$

62. Equation aux dérivées partielles

$^{1}_{1}$Exercice 1040. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

$^{1}_{1}$Exercice 1041. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 0 \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1042. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\Delta f(x,y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \big((x,y) \neq (0,0)\big).$$

On suppose qu'il existe une application $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad \big((x,y) \neq (0,0)\big).$$

a) Prouver que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$.

b) Exprimer $\Delta f(x,y)$ en fonction des dérivées g au point $r := \sqrt{x^2+y^2}$.

c) En déduire une équation différentielle satisfaite par g

d) En déduire f.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1043. Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\Delta f(x,y,z) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \qquad \big((x,y,z) \neq (0,0,0)\big).$$

On suppose qu'il existe une application $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y,z) = g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \qquad \big((x,y,z) \neq (0,0,0)\big).$$

a) Prouver que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$.

b) Exprimer $\Delta f(x,y,z)$ en fonction des dérivées g au point $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

c) En déduire une équation différentielle satisfaite par g

d) En déduire f.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1044. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}^1\big(]0,\infty[\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(*) \qquad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha f(x,y) \qquad \big(x>0, y \in \mathbb{R}\big).$$

a) Procéder au changement de variable polaire, en posant $f(x,y) = g(r,\vartheta)$.

b) exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\vartheta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \vartheta}(r,\vartheta)$.

c) En déduire une équation aux dérivées partielles simple satisfaite par g

d) La résoudre et en déduire qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[,\mathbb{R})$ telle que

$$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})\exp\left(\alpha \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right) \qquad (x>0, y \in \mathbb{R}).$$

e) Réciproquement, remarquer que les fonction de ce type sont solutions de $(*)$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1045. A l'aide des coordonnées polaires, déterminer les solutions $f \in \mathcal{C}^1\big(]0,\infty[\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ de l'équation aux dérivés partielles $x\partial_2 f(x,y) - y\partial_1(x,y) = kf(x,y)$ $(x>0, y \in \mathbb{R})$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 1046. Trouver les applications $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telles que la fonction $g : (x,y) \mapsto \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie

$$\Delta g(x,y) := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \big((x,y) \in [a,b]^2\big).$$

$^{2}_{1}$Exercice 1047. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ telles que la fonction g_f : $(x,y) \mapsto f\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$ vérifie $\Delta g_f(x,y,z) = 0$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z > 0$.

$^{1}_{1}$*Exercice* 1048. Déterminer les solutions $f \in \mathcal{C}^2\big(\,]0,\infty[^2\,,\mathbb{R}\big)$ de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

$^{1}_{1}$*Exercice* 1049. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[^2$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \qquad (x>0, y>0).$$

$^{2}_{2}$Exercice 1050. Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\Delta f(x,y,z) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \qquad \big((x,y,z) \neq (0,0,0)\big).$$

On suppose qu'il existe une application $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y,z) = g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \qquad \big((x,y,z) \neq (0,0,0)\big).$$

a) Exprimer $\Delta f(x,y,z)$ en fonction des dérivées g au point $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

b) En déduire une équation différentielle satisfaite par g

c) En déduire f.

$^{2}_{1}$Exercice 1051. A l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$, trouver les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

$^{2}_{1}$Exercice 1052. Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$^{2}_{1}$Exercice 1053. Résoudre à l'aide du changement de variable $x = u$, $y = uv$ l'équation

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

$^{2}_{1}$Exercice 1054. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$.

63. Théorème De Rolle

$^2_2$Exercice$^\flat$ 1055. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1\big([a,+\infty[\,,\mathbb{R}\big)$ telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$.
a) Démontrer qu'il existe $c \in\,]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
b) En déduire que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction Arctan s'annule $n-1$ fois et calculer ces zéros.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 1056. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) := x \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que f' s'annule pour une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ de valeurs vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - n\pi| < \pi/2$.
Posant $u_n := x_n - n\pi + \pi/2$ pour $n \geqslant 0$, démontrer que $\lim\limits_{n\to 0} u_n = 0$ et donner un équivalent simple
de la suite $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$.

$^2_2$Exercice$^\flat$ 1057. Soit $f \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

$^2_2$*Exercice*$^\flat$ 1058. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$ vérifiant $g^{(n)} = f$ et $g^{(k)}(0) = 0 \;\; (0 \leqslant k < n)$.

(MP) $^4_3$Exercice$^\flat$ 1059. Soient $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{C}^n\big([0,1]\big)$ tels que $f(k/n) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
a) prouver qu'il existe $c \in\,]0,1[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
b) S'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que $f \in \mathcal{C}^{n+\ell}\big([0,1]\big)$ et tel que $f^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$, prouver qu'il existe $d \in\,]0,1[$ tel que $f^{(n+\ell)}(d) = 0$.

(MP) $^2_2$Exercice$^\flat$ 1060. Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,+\infty[\,,\mathbb{R}\big)$ telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(0)$. Prouver qu'il existe $c \in\,]0,\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

$^1_1$*Exercice*$^\flat$ 1061. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

$^3_3$Exercice$^\flat$ 1062. a) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Montrer que si I s'annule en n points de I, alors f' s'annule en $n-1$ points de I.
b) Soit f une fonction trois fois d$\hat{}$erivable qur $[a,b]$ telle que f s'annule $(n+1)$ fois sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que

$$f^{(n)}(c) = 0.$$

c) Pour $p \geqslant 3$ eyt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, quel est le nombre maximal de racines réelles de l'équation $x^p + ax + b = 0$

$^2_2$Exercice$^\flat$ 1063. Soient f et g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ et

$$\forall x \in [a,b], \qquad f''(x) \leqslant g''(x).$$

Montrer alors que

$$\forall x \in [a,b], \qquad g(x) \leqslant f(x).$$

$^1_1$*Exercice*$^\flat$ 1064. Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et f' ne s'annule pas sur $[0,1]$.
Montrer que f garde un signe constant sur $[0,1]$.

64. Développement limités

[1][1]Exercice$^\flat$ 1065. Calculer la limite lorsque x tends vers $+\infty$ de

$$u(x) = \left((x^3 + ax^2 + 2)^{1/3} - (x^3 + 1)^{1/3}\right)^x$$

lorsque $a > 0$ et lorsque $a = 0$.

[2][1]Exercice$^\flat$ 1066. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(0) := 0$ et par $f(x) := \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ pour $x \neq 0$.
a) Démontrer que f admet une fonction réciproque g.
b) Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de g en 0.

[2][2]Exercice$^\flat$ 1067. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) := x \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que f' s'annule pour une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ de valeurs vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - n\pi| < \pi/2$.
Posant $u_n := x_n - n\pi + \pi/2$ pour $n \geqslant 0$, démontrer que $\lim\limits_{n\to 0} u_n = 0$ et donner un équivalent simple de la suite $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$.

[2][2]Exercice$^\flat$ 1068. Soit $x_0 \in [0, \pi/2]$ et soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, la suite définie par $x_{n+1} := \sin x_n$ pour $n \geqslant 0$.
a) Pour chaque suite convergente $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de limite ℓ, déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k$.
b) Déterminer un nombre réel α tel que la quantité $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha$ ait une limite non nulle.
c) En déduire un équivalent simple de la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$.

[2][2]Exercice$^\flat$ 1069. Soit $\{u_{a,n}\}_{a>1,n\geqslant 0}$ la famille de nombres réels définie par $u_{a,0} := e$ et $u_{a,n+1} := \log_{u_{a,n}} a$ pour $a > 1$ et $n \geqslant 0$.
a) Pour $a > e^e$, démontrer que la limite $\ell_a := \lim_{n\to\infty} u_{a,n}$ existe.
b) Démontrer que l'application $a \mapsto \ell_a$ est continue sur $]e^e, +\infty[$.

[2][2]Exercice$^\flat$ 1070. Déterminer un équivalent simple lorsque n tends vers $+\infty$ de la suite $\{I_n\}_{n\geqslant 0}$ définie par $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t + \cdots + t^n}$ pour $n \geqslant 0$.

[2][1]Exercice$^\flat$ 1071. Pour $x \in]0, e[$, on pose $f(x) := x^{1/x}$.
a) Prouver que f est une bijection de $]0, e[$ dans $\left]0, e^{1/e}\right[$.
b) Existence et calcul du développemet limité en 1^+ de g à l'ordre 2.

Exercice$^\flat$ 1072. Calculer un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \sqrt{2 + \sin x}$ en 0.

[1]Exercice$^\flat$ 1073. Déterminer la limite $\ell = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$.
Trouver une meilleure estimation que $o(1)$ pour la vitesse de convergence vers ℓ.

[1]Exercice$^\flat$ 1074. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 5.

Exercice$^\flat$ 1075. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{k^2} \sim e^{n^2}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice$^\flat$ 1076. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^k}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice$^\flat$ 1077. Soient $a \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n) = a$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Exercice$^\flat$ 1078. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - ax - b\right)$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1079. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}\right)^x$.

Exercice$^\flat$ 1080. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$.

${}_{1}$Exercice$^\flat$ 1081. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\cos \pi x}{\sin(3\pi x)}$

(MP) ${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1082. Calculer un développement limité en $+\infty$ à l'ordre 4 de $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(1/n)}{1+\cos(1/n)}}\right)$.

Exercice$^\flat$ 1083. Calculer un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{x}$ en 1.

Exercice$^\flat$ 1084. Calculer un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}$ en 0.

^{1}Exercice$^\flat$ 1085. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4.

^{1}Exercice$^\flat$ 1086. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 5.

^{1}Exercice$^\flat$ 1087. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = (1+x)^x$ à l'ordre 5.

^{1}Exercice$^\flat$ 1088. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = \exp \frac{x}{\tan x}$ à l'ordre 5.

^{1}Exercice$^\flat$ 1089. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 5.

^{1}Exercice$^\flat$ 1090. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = (\tan x)^2$ à l'ordre 7.

^{1}Exercice$^\flat$ 1091. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = e^{x \sin x}$ à l'ordre 6.

^{1}Exercice$^\flat$ 1092. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = (1+x)^{1/Fx}$ à l'ordre 3.

^{1}Exercice$^\flat$ 1093. Effectuer un développement limité au voisinage de 0 pour $f(x) = \sqrt{1+e^{2x}}$ à l'ordre 3.

${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 1094. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{\operatorname{Arctan} n}\right)^{n^2}$.

${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1095. Démontrer que la suite $u_n = \prod_{1\leqslant k\leqslant n} \cos\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge vers une limite L et donner un équivalent simple de $u_n - L$.

(MP) $\frac{1}{1}$Exercice 1096. Démontrer que $\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\ln k}\sim\frac{n}{\ln n}$ lorsque $n\to+\infty$.

$\frac{2}{1}$Exercice 1097. Développement limité au voisinage de 0 de $f(x) := \operatorname{Arcsin}\big(\exp(-x^2)\big)$.

$\frac{2}{1}$Exercice 1098. Développement limité au voisinage de 0 de $f(x) = \operatorname{Arccos}\dfrac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4.

(A) $\frac{2}{1}$Exercice 1099. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$ en $x = 1^-$.

(MP) $\frac{2}{1}$Exercice$^\flat$ 1100. Soit $f\in\mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0)=0$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

(MP) $\frac{3}{1}$Exercice$^\flat$ 1101. Soit $f\in\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle la limite $\lim_{t\to0^+}\frac{f(2t)-f(t)}{t}$ existe. Démontrer que f est dérivable en 0.

65. Limites

[1]Exercice$^\flat$ 1102. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x\mathrm{e}^x(x+1)}-\frac{1}{x\cos x}\right)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1103. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1104. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}\right)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1105. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\mathrm{e}^-}(\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)}$.

[1]Exercice$^\flat$ 1106. Calculer $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{ch}\sqrt{x+1}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)^{1/\sqrt{x}}$.

[1]Exercice$^\flat$ 1107. Calculer $\lim_{x\to0}x^2\left(\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{1/(x-1)}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{1/(x-1)}\right)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1108. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{4}{\pi-4\operatorname{Arctan}x}+\frac{2}{x-1}\right)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1109. Calculer la limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x\right)^{\tan x}$.

[1]Exercice$^\flat$ 1110. Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty}\big(\operatorname{sh}(\operatorname{ch}x)-\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x)\big)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1111. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\neq0\neq b$. Calculer $\lim_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b}\right)$.

[1]Exercice$^\flat$ 1112. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}x}\right)^{x^2}$.

[1]Exercice$^\flat$ 1113. Determiner la limite de la suite de terme général $u_n=\left(3\times2^{1/n}-2\times3^{1/n}\right)^n$

[1]Exercice$^\flat$ 1114. Déterminer la limite $\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ pour $a,b\in\mathbb{R}^*$.

[1]Exercice$^\flat$ 1115. Calculer $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

Exercice$^\flat$ 1116. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{Arctan}(x)^2-\pi^2/16}{x^2-1}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1117. Calculer les limites $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin^2 x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$.

Exercice$^\flat$ 1118. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(2x + \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}}$.

Exercice$^\flat$ 1119. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, calculer la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos(ax) - \cos(a^2)}{x^2 - a^2}$.

66. Equivalents

Exercice$^\flat$ 1120. Déterminer la limite (ou un équivalent simple en cas de limite nulle ou infinie) pour $f(x) = (1 - \ln x)^x$ en 0^+.

^{1}Exercice$^\flat$ 1121. Trouver un équivalent simple de $\tan x - \sqrt{\tan x^2}$ en 0^+.

^{1}Exercice$^\flat$ 1122. Trouver un équivalent simple de $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}\right)$ en 0.

^{1}Exercice$^\flat$ 1123. Trouver un équivalent de $\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$ en 0.

Exercice$^\flat$ 1124. Déterminer la limite (ou un équivalent simple en cas de limite nulle ou infinie) pour $f(x) = (\sin x - 1)\mathrm{e}^{\tan x}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice$^\flat$ 1125. Déterminer la limite (ou un équivalent simple en cas de limite nulle ou infinie) pour $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^{\sin x}$ en 0^+.

Exercice$^\flat$ 1126. Déterminer la limite (ou un équivalent simple en cas de limite nulle ou infinie) pour $f(x) = (x+1)^{(x+1)/x} - (x-1)^{(x-1)/x}$ en $+\infty$.

67. Equations différentielles

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1127. Trouver toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)f(-x) = 1.$$

On pourra considérer l'application $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.

68. Equations différentielles à variables séparables

(Λ) ${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1128. Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2$.

${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1129. Résoudre l'équation différentielle à variables séparables

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}$$

(Λ) ${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1130. Résoudre l'équation différentielle $y' - 1 - ty^2 = t + y^2$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1131. a) Ensemble de définition de $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et calcul de sa dérivée. Résoudre l'équation différentielle $y'\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}$ sur $\mathbb{R}$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1132. Résoudre l'équation différentielle $y'\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2}$ sur $]-1,1[$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1133. Résoudre l'équation différentielle $2x^2y' + y^2 = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1134. Résoudre l'équation différentielle $(E) \quad y' = \mathrm{e}^{x+y}$. Préciser la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1135. Résoudre l'équation différentielle $2x^2y' + y^2 = 1$.

69. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice$^\flat$ 1136. Résoudre $y' + y\cos x = \cos x$.

(Λ) ${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 1137. Résoudre l'équation différentielle $xy' = 2y + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1138. Résoudre l'équation différentielle $2y' - 3y = x$.

Exercice$^\flat$ 1139. Résoudre l'équation différentielle $iy' + y = \sin(x)$ avec la condition initiale $y'(0) = 1$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1140. Résoudre $\cos(x)y' + \sin(x)y = \tan(x)$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1141. Résoudre $(x^2-1)y' + xy = x^3 - x$.

${}^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1142. Résoudre $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$.

${}^{1}_{2}$Exercice$^\flat$ 1143. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(\dagger) \qquad \forall x > 1, \qquad 2f'(x) + \frac{x}{x^2-1}f(x) - xf(x)^3 = 0.$$

a) Vérifier que la fonction nulle est solution de $(\dagger)$.
b) En cherchant les solutions de $(\dagger)$ sous la forme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$, quelles solutions nous échapent ?
c) En procédant au changement de fonction inconnue $f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$, montrer que g satisfait l'équation

$$(\ddagger) \qquad -g'(x) + \frac{x}{x^2-1}g(x) - x = 0.$$

d) Résoudre l'équation différentielle $(\ddagger)$ et en déduire **des** solutions f de $(\dagger)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1144. Trouver toutes les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation différentielle

$$x - y + xy' = 0$$

a) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.
b) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1145. Résoudre l'équation différentielle $2y' - 3y = x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1146. Résoudre le problème de Cauchy $y(0) = 1$ et $iy' + y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1147. Résoudre l'équation différentielle $\cos(x)y' + \sin(x)y = \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice$^\flat$ 1148. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 1)y' + xy = x^3 - x$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1149. Résoudre l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1150. Résoudre l'équation différentielle $y' - 3\tan x = -\cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1151. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x = 2y \cos x$ sur $]0, \pi[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1152. Résoudre l'équation différentielle $2x\big(1 + \sqrt{x}\big)y'' + \big(2\sqrt{x} + 1\big)y = 0$.

Exercice$^\flat$ 1153. Résoudre l'équation différentielle $y'(3x^2 - 2x) = y(6x - 2)$.

Exercice$^\flat$ 1154. Résoudre l'équation différentielle $|x|y' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R}^-$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice$^\flat$ 1155. Résoudre l'équation différentielle $y' + y\cos x = \cos x$.

Exercice$^\flat$ 1156. Résoudre l'équation différentielle $y' - y\tan x = \frac{1}{\cos^3 x}$.

Exercice$^\flat$ 1157. Résoudre l'équation différentielle $3x^3 \ln^2 x = y'x \ln x - y$.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 1158. Résoudre l'équation différentielle $(x - y) + xy' = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 1159. Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 1160. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 1161. Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $2y' + \frac{xy}{x^2-1} - xy^3 = 0$.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 1162. Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $5y' - y\sin x + y^4 \sin x = 0$.

$^{3}_{1}$Exercice$^\flat$ 1163. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Pour chaque solution y de $y' + a(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$, démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto y(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$ soit périodique.

$^{3}_{2}$Exercice$^\flat$ 1164. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que l'application ϕ définie par $\phi(x) = 2xf'(x) - f(x)$ sur $\mathbb{R}$ soit paire. Prouver que f est paire.

Exercice$^\flat$ 1165. Résoudre sur $]-\pi/2, \pi/2[$ le problème différentiel $\begin{cases} y' \cos x + y \sin x = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Exercice$^\flat$ 1166. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \sin(2x)\mathrm{e}^x$.

Exercice$^\flat$ 1167. Résoudre $y' - y\tan(x) = -\cos^2(x)$.

Exercice$^\flat$ 1168. Résoudre $y' \sin(x) = 2y \cos(x)$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1169. Résoudre $2x(1+\sqrt{x})y'' + (1+2\sqrt{x})y' = 0$.

^{1}Exercice$^\flat$ 1170. Résoudre $(3x^2-2x)y' = (6x-2)y$.

Exercice$^\flat$ 1171. Résoudre $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

^{1}Exercice$^\flat$ 1172. Résoudre $3x^3 \ln^2 x = y'x\ln x - y$.

$^1_1$*Exercice*$^\flat$ 1173. Trouver les solutions ne s'annulant pas de l'équation différentielle de Bernouilli

$$5y'(x) - y(x)\sin(x) + y(x)^4 \sin(x) = 0.$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1174. Résoudre l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' - 2xy = x^3.$$

Trouver la solution $y(x)$ telle que la courbe $(x, y(x))$ passe par le point $(0, n)$ ou $0 \leqslant n \leqslant 5$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1175. Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1-x)y = \frac{x\mathrm{e}^x}{x^4+1}$$

Tracer quelques courbes intégrales $x \mapsto (x, y(x))$. Solutions continues sur $\mathbb{R}$?

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1176. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = |x|$.

70. Equations différentielles linéaires du second ordre

$^1_2$Exercice 1177. Dans cet exercice, nous cherchons à résoudre l'équation d'Euler

$$(*) \qquad x^2 f''(x) + 3xf'(x) + f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad (x > 0).$$

en procédant au changement de variable (bijectif)

$$x = \mathrm{e}^t,$$

dont nous détaillons les étapes, car il y a quelques subtilités théoriques. En bref, nous cherchons les solutions f de l'équation différentielle $(*)$ sous la forme

$$f(x) = g(t).$$

a) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) := f(\mathrm{e}^t).$$

Justifier que l'application g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
b) Exprimer $f(x)$ en fonction de g et de $x > 0$.
c) En déduire l'expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$ en fonction de g, g', g'' et $x > 0$.
d) En reportant ces expressions dans $(*)$ puis en substituant e^t à x, prouver que l'équation différentielle $(*)$ est équivalente à

$^2_2$Exercice 1178. Soit $m \in \mathbb{R}$. En procédant au changement de variable $x = \tan(t)$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1+x^2)^2 f''(x) + 2x(1+x^2)f'(x) + mf(x) = 0.$$

Exercice 1179. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1180. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x^2 \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1181. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1182. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \mathrm{e}^{-ix}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1183. Résoudre le problème de Cauchy $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ et $y'' + y' + y = \cos(x)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1184. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

^{1}Exercice 1185. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1186. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = x^2\mathrm{e}^{x/2}$ sur $\mathbb{R}$.

^{1}Exercice 1187. Soit $\vartheta \in]0, \pi/2[$. Résoudre l'équation différentielle $y'' \cos^2 \vartheta - y' \sin(2\vartheta) + y = x(\cos\vartheta)^2\mathrm{e}^{x\tan\vartheta}$. Déterminer la solution φ qui s'annule ainsi que sa dérivèe en 0. Calculer les primitives de φ.

Exercice 1188. Résoudre l'équation différentielle $4xy'' + 2y' + y = 0$.

$^1_1$Exercice 1189. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$.

^{1}Exercice 1190. a) Chercher les solutions communes à $(H) \quad (1+\cos x)y'' + \sin x y' + y = 0$ et $(G) \quad y'' + y = 0$.
b) Chercher les solutions communnes à $(E) \quad (1+\cos x)y'' + \sin x y' + y = 1$ et (G).
c) Résoudre (E).

$^2_2$*Exercice* 1191. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$.

$^2_2$*Exercice* 1192. Résoudre l'équation différentielle d'Euler $x^2y'' + 3xy' + y = \ln x$.

$^2_1$Exercice 1193. Pour $x > 0$, on pose $v(x) = \dfrac{1}{4x}$. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[)$ telles que $f'(x) = f\big(v(x)\big)$ pour $x > 0$. (on pourra déterminer $v \circ v$).

Exercice 1194. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2x)$ et en déterminer les solutions vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

^{1}Exercice 1195. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{\frac{-2x}{1+x^2}}$.

^{1}Exercice 1196. Résoudre sur $]0, \infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$ dans les cas suivants :
a) $a = 2$ et $b = -6$.
b) $a = -1$ et $b = 1$.
c) $a = 7$ et $b = 25$.

$^2_2$Exercice 1197. On considère l'équation différentielle $(E) \quad (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.
a) Déterminer les polynômes solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les solutions de (E) de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}$.
c) Résoudre (E) sur un intervalle ne contenant pas $-1/2$.

^{1}Exercice 1198. Résoudre l'équation différentielle $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^x$ sur un intervalle ou $1+x$ ne s'annule pas.

$^{2}_{2}$Exercice 1199. Résoudre $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ sur $]-1,1[$ via le changement de variable $x = \sin t$.

^{1}Exercice 1200. Résoudre l'équation différentielle

$$x(x^2+1)f''(x) - 2(x^2+1)f'(x) + 2xf(x) = 0$$

en cherchant d'abord une solution polynômiale.

(Λ) $^{1}_{1}$Exercice 1201. Résoudre $y'' - 2y' + y = \cos t$ sur $\mathbb{R}$.

(Λ) Exercice 1202. Courbes intégrales de $y' = y+1$ et de $y'' + y = 0$.

$^{2}_{1}$Exercice 1203. Soit $\vartheta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' \cos^2(\vartheta) - y' \sin(2\vartheta) + y = x\cos^2(\vartheta)e^{x\tan\vartheta}.$$

Puis, déterminer la solution φ qui s'annule ainsi que sa dérivée en $x = 0$. Enfin, calculer les primitives de ϕ.

$^{2}_{1}$*Exercice* 1204. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' + y'' - y' - y = xe^{-x}$$

$^{1}_{1}$Exercice 1205. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est solution de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

Trouver toutes solutions de cette équation différentielle.

$^{1}_{1}$Exercice 1206. On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = xe^{-x}\cos x$.
Résoudre l'équation avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, on notera f cette solution.
b) Vérifier que f est bien solution de l'équation.
c) Tracer le graphe de f sur $[-3, 2]$.
d) Résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1207. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 4y = \sin(x)e^{2x}$
a) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$.
b) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$.

Exercice 1208. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt.$$

Exercice 1209. Résoudre l'équation différentielle $(1-\cos 4x)y'' + 2y'\sin(4x) - 8y = 0$ sur $]0, \pi/2[$ en sachant qu'elle admet deux solutions u et v vérifiant $uv = 1$.

71. Primitives

$^2_2$Exercice$^\flat$ 1210. Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ puis donner une primitive réelle (préciser sur quel ensemble) des fractions rationnelles suivantes :

$$A(x) := \frac{1}{1-x^2}, \qquad B(x) := \frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)}, \qquad C(x) := \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$$
$$D(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}, \qquad E(x) := \frac{1}{(x^2-1)^2},$$
$$F(x) := \frac{x}{x^4+x^2+1}, \qquad G(x) := \frac{x^5}{(x^4-1)^2}, \qquad H(x) := \frac{x^7-x^6-x+1}{(x-1)^5},$$
$$I(x) := \frac{x^2}{x^4-2x^2\cos(\alpha)+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice$^\flat$ 1211. Calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+2}+1)(x+3)}$.

^{1}Exercice$^\flat$ 1212. Calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - \cos 3x}$.

^{1}Exercice$^\flat$ 1213. Calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

Exercice$^\flat$ 1214. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis donner une primitive (préciser sur quel ensemble) de la fraction rationnelle suivantes :

$$F(x) = \frac{X+2}{(X+1)(X^2+1)}$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1215. Calculer les primitives suivantes

$$a : \quad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}, \qquad b : \quad \int \mathrm{e}^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad c : \quad \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

72. Intégrales

^{1}Exercice$^\flat$ 1216. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

^{1}Exercice$^\flat$ 1217. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

(MP) $^2_2$Exercice$^\flat$ 1218. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$.

(MP) $^2_1$Exercice$^\flat$ 1219. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1220. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.
a) Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
b) En déduire une expression de I_n ne faisant intervenir que des factorielles.

Exercice$^\flat$ 1221. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$.

^{1}Exercice$^\flat$ 1222. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$.

${}^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 1223. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{Arctan}^2 x \,\mathrm{d}x$.

^{1}Exercice$^\flat$ 1224. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$.

Exercice$^\flat$ 1225. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

(MP) ${}^{2}_{2}$Exercice 1226. Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t$.
Prouver que $f(t) \geqslant 0$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ ou $f(t) \leqslant 0$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Et avec $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$?

(MP) ${}^{1}_{1}$Exercice 1227. Soit $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$, une bijection croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Trouver une expression simple pour

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Interpretation géométrique ?

73. Sommes de Riemann

${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1228. Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{C}\big)$. Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} f(k/n) f'\big((k+1)/n\big)$.

(MP) ${}^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1229. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0 \leqslant k < n} f\left(\frac{n}{k^2+n^2}\right).$$

(MP) ${}^{1}_{2}$Exercice$^\flat$ 1230. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
a) Déterminer la limite ℓ de la suite $u_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
b) Équivalent de la suite $n(u_n - \ell)$ lorsque n tends vers $+\infty$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1231. Calculer les limites $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \tan\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \tan\left(\dfrac{k}{n^2+k^2}\right)$

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1232. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

$_{1}$<u>Exercice</u> 1233. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(MP) $_{1}$<u>Exercice</u> 1234. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.
a) Déterminer la limite ℓ de la suite $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)$.
b) Équivalent de la suite $n^2(u_n - \ell)$ lorsque n tends vers $+\infty$.

74. Intégration

(MP) $^{2}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1235. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

(MP) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1236. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{C})$. Donner un développement limité à l'ordre 2, selon les puissances de $1/n$, de la suite de terme général $u_n := \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ $(n \in \mathbb{N})$.

(MP) $^{3}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1237. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0$.
a) En supposant que f est constante par morceaux.
b) En supposant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
c) *Théorique et difficile :* en supposant que f est continue par morceaux.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1238. Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\mathbb{R}\big)$ et soit $S : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l(application définie par $S(t) := 4[t] - 2[2t] + 1$ pour $t \geqslant 0$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(u)S(nu)\,\mathrm{d}u = 0$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1239. Déterminer un équivalent simple lorsque n tends vers $+\infty$ de la suite $\{I_n\}_{n\geqslant 0}$ définie par $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\cdots+t^n}$ pour $n \geqslant 0$.

$^{3}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1240. Calculer la limite $\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^1 f(t)^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$.
a) Pour les applications $t \mapsto t^\alpha$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $\alpha \geqslant 0$.
b) lorsque $f \in \mathcal{C}\big([0,1],]0,\infty[\big)$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1241. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, non constante, telle que f, f' et f'' soient positives sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\frac{1}{1}$Exercice$^\flat$ 1242. a) Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

b) En utilisant la formule de Taylor, montrer que

$$\forall x < 0, \qquad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} < \mathrm{e}^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

^{1}Exercice$^\flat$ 1243. Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$I_n := \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Après avoir justifié l'existence de I_n, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\frac{2}{2}$*Exercice*$^\flat$ 1244. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $u_n = \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$ converge vers $f(0)$ quand $n \to +\infty$.

$\frac{1}{1}$*Exercice*$^\flat$ 1245. Chercher un équivalent de la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

Exercice$^\flat$ 1246. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on pose $u_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{k+1}$. En applicant la formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que la suite u_n converge et déterminer sa limite.

$\frac{1}{1}$Exercice$^\flat$ 1247. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, prouver que $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. Encadrer la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ puis montrer que $u_n \sim \ln n$.

$\frac{2}{2}$*Exercice*$^\flat$ 1248. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ puis en déduire que $\ln(n!) \sim n \ln n$.

$\frac{3}{3}$Exercice$^\flat$ 1249. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I_n pour $n \in_o bN$. Comparer I_n et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$.
b) Utiliser Chasles pour intégrer que $[0,\alpha]$ et $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ plutot que sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et démontrer que I_n converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
c) Chercher une relation de récurence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
d) Démontrer que $nI_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour $n \geqslant 0$.
e) Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de $\binom{2n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1250. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{1-t} \, \mathrm{d}t$.

a) Étudier la limite de I_n lorsque n tends vers $+\infty$.

b) Trouver une relation de récurence entre I_n et I_{n+1}. En déduire I_n en fonction de n.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, c'est à dire de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^\flat$ 1251. Étudier la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_3^{x^2+x} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{3 + \ln(\ln t)}$.

$^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1252. Lemme de Riemann-Lebesgue :

a) Montrer que pour chaque fonction en escalier φ sur $[a, b]$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t = 0.$$

b) En déduire que pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t = 0.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1253. En procédant au changement de variable $u = \sin(x)$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)^3 + 3\cos(x)}{\sin(x)^4 + 4\sin(x)^2 + 4} \, \mathrm{d}x.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1254. a) Pour $x \not\equiv \pi \ [2\pi]$, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir que

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{2u}{1-u^2}$$

b) En procédant au changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(x) + \cos^2(x)}{(1 + \sin x)(1 + \cos x)} \, \mathrm{d}x.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1255. En procédant au changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer

$$\int_0^1 \frac{2x^2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x} + 2)(6 + 5\sqrt{x} + x)^2} \, \mathrm{d}x.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1256. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir que

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

b) En procédant au changement de variable $u = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer l'intégrale

$$\int^{\mathrm{e}} \frac{1 + \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}^2(x)}{(1 + \mathrm{sh}\, x)(1 + \mathrm{ch}\, x)} \, \mathrm{d}x.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 1257. Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $[-a, a]$.
a) Si f est paire, prouver que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{puis que} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Si f est impaire, prouver que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{puis que} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

c) on suppose desormais que la fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet la période $T > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}$, prouver que

$$\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{puis que} \qquad \int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En bref, l'intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T ne dépend pas de l'intervalle choisi.

$^{2}_{2}$*Exercice*$^{\flat}$ 1258. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Calculer la limite de la suite

$$u_n := \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Exercice$^{\flat}$ 1259. Calculer $\int_{-3}^{0} \left|x^2 - x - 2\right|\,\mathrm{d}x$.

Exercice$^{\flat}$ 1260. Montrer qu'il existe des nombres réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = a\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} + b$$

Pour $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$, en déduire l'intégrale

$$I(\alpha) := \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 1261. Étudier la fonction (tableau de variation complet) définie par

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\int_{1}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,\mathrm{d}t.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^{\flat}$ 1262. Étudier la fonction (tableau de variation complet) définie par

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 1263. Lorsque $x \not\equiv 0\ [\pi]$, calculer l'intégrale

$$J(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+\cos(x)\cos(\vartheta)}.$$

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1264. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)^2}$ en posant $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan(t)$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1265. Calculer $\displaystyle\int_{\ln(5)}^{\ln(13)} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$ en posant $t = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1266. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)+\sin(x)}{3+\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$.

$^{3}_{2}$Exercice$^\flat$ 1267. **Pour les mathématiciens-padawan du coté obscur uniquement**. Pour $x>1$, montrer qu'il existe un unique nombre $f(x) \in\,]1,+\infty[$ tel que

$$\int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = 1.$$

Prouver que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, étudier f sur son ensemble de définition et trouver une équation différentielle (non-linéaire) satisfaite par f.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1268. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\,\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1269. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln\left(1-\cos(x)\right)\mathrm{d}x$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1270. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$.

$^{1}_{1}$Exercice$^\flat$ 1271. Pour $n \in_o bN^*$, calculer $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)^n}$.

$^{2}_{2}$Exercice 1272. Soit $f :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\forall x \in\,]-1,1[, \qquad f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que f ne s'annule pas sur $]-1,1[$.
b) En déduire f.

(MP) $^{3}_{1}$Exercice$^\flat$ 1273. Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Quel est le nombre minimal de zéros de f sur $[0,1]$?

(MP) $^{2}_{1}$Exercice$^\flat$ 1274. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \big|\sin(nt)\big|\,\mathrm{d}t$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice$^\flat$ 1275. Soit $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n := \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.
a) Démontrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
b) Lorsque $n \to +\infty$, démontrer que $I_n \sim K/n$ pour une certaine constante $K > 0$.

(MP) $^{2}_{2}$<u>*Exercice*</u>$^\flat$ 1276. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, déterminer $I_n := \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

(MP) $^{3}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 1277. Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit $M_1 := \sup_{a\leqslant t\leqslant b}\big|f'(t)\big|$.
a) Démontrer que $\big|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leqslant \frac{M_1}{2}(x-a)^2$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.
b) En déduire que $\big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leqslant \frac{M_1}{4}(b-a)^2$.

(MP) $^{3}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 1278. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction telle que f et f'' soient bornées.
a) Posant $M_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$, démontrer que $|f'(t)| \leqslant \frac{2M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2$ pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.
b) Posant $M_1 := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$, en d'eduire que $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

<u>Exercice</u> 1279. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

75. Intégrales généralisées

$^{4}_{2}$<u>Exercice</u> 1280. Convergence et calcul de $\int_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 1281. Représentez l'ensemble des points (α,β) du plan pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|1-x^\alpha|^\beta}$ converge, avec $\alpha \neq 0$.

$^{3}_{3}$<u>Exercice</u> 1282. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on pose $a_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nx+x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $b_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nx+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
a) Étudier $a_{n+1}-a_n$ puis calculer a_n.
b) Déterminer $\lim_{n\to\infty} b_n$ en utilisant le résultat de l'exercice 1237 et la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ pour $0 < x \leqslant \pi/2$ et par $g(0) := 0$.
c) En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi/2$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 1283. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $\int_0^\infty f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^\infty f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Démontrer que $\int_0^\infty f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$ et que $\int_0^\infty f'(x)^2\,\mathrm{d}x$ convergent.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 1284. Convergence et calcul de $\int_0^\infty \int_x^\infty \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 1285. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 1286. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

^{1}<u>Exercice</u> 1287. Nature de $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

^{1}<u>Exercice</u> 1288. Nature de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

[1]Exercice 1289. Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} x^{\beta}\,\mathrm{d}x$.

[1]Exercice 1290. Nature de $\displaystyle\int_2^{\infty} x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$ pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

[1]Exercice 1291. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{1-t}}$.

[1]Exercice 1292. Nature de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

[1]Exercice 1293. Nature et calcul de $\displaystyle I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$

[1]Exercice 1294. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

[1]Exercice 1295. Nature et calcul de $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

[1]Exercice 1296. Nature et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Arctan}(x+a) - \operatorname{Arctan} x)\,\mathrm{d}x$

[1]Exercice 1297. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

[1]Exercice 1298. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

[1]Exercice 1299. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, nature et calcul de $\displaystyle I_n := \int_{-\infty}^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ sachant que $I_0 = \pi/2$.

[1]Exercice 1300. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{\ln t}}$.

[2,1]Exercice 1301. Pour $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)t^n \ln t\,\mathrm{d}t$

[2,1]Exercice 1302. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{1+t+t^2+\cdots+t^n}$.

[1,1]Exercice 1303. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

[1,1]Exercice 1304. Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

[1,1]Exercice 1305. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-\operatorname{Arctan} x}{x(x^2+1)\operatorname{Arctan} x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1306. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t+1)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1307. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Arctan}(1+1/x)}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1308. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1309. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{th} t)^2}{t\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$?

$^2_1$Exercice 1310. On pose $E := \left\{ f \in \mathcal{C}\left(]0,1]\,,\mathbb{R}\right) : \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)^2}{\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$.
a) Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Prouver que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \langle f, g\rangle = -\int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

c) prouver que

$$\left(\int_0^1 |\ln t|^{\alpha}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 |\ln t|^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \int_0^1 |\ln t|^{\alpha+1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0.)$$

Exercice 1311. Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$?

Exercice 1312. Existence et calcul de $f(y) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$.

(Fac) $^1_1$***Exercice*** 1313. Convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(Fac) -1***Exercice*** 1314. Convergence de $\int_1^{\infty} x^x\,\mathrm{d}x$.

(Fac) 1***Exercice*** 1315. Convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

(Fac) ***Exercice*** 1316. Nature et calcul de $I := \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

(Λ) $^1_1$Exercice 1317. Prouver que $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2)$ sans écrire d'horreur.

(Λ) $^1_1$Exercice 1318. Calculer $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$ et montrer que $I \neq 0$.

(Λ) $^2_1$Exercice 1319. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$ en $x = 1^-$.

(Fac) 1***Exercice*** 1320. Convergence de $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^{12}+1}$.

(Fac) 1***Exercice*** 1321. Nature et calcul de $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}(x)}$.

(Fac) $^2_1$***Exercice*** 1322. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $I(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(Fac) $^2_1$***Exercice*** 1323. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la nature de $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

(Fac) ^{1}***Exercice*** 1324. Convergence et calcul de $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(Fac) ^{1}***Exercice*** 1325. Convergence et calcul de $I := \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

(Fac) ^{1}***Exercice*** 1326. Convergence et calcul de $I := \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

(Fac) $^2_1$***Exercice*** 1327. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(Fac) ***Exercice*** 1328. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(Fac) ***Exercice*** 1329. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

(Fac) ***Exercice*** 1330. Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

(Fac) ***Exercice*** 1331. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos\left(\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$.

(Fac) $^4_1$***Exercice*** 1332. Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$.

(Fac) $^3_1$***Exercice*** 1333. Pour $a>0$, nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(x)\ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

(Fac) $^2_1$***Exercice*** 1334. Nature et calcul de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^{1/n}}\,\mathrm{d}x$.

(Fac) ^{1}***Exercice*** 1335. Nature et calcul de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

(Fac) $^1_1$***Exercice*** 1336. Nature et calcul de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$.

(MP) $^3_1$Exercice 1337. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante telle que $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Démontrer que $\lim_{x\to\infty} xf(x)=0$.

(MP) $^3_2$Exercice 1338. Soit $f \in \mathcal{C}\left(]0,1],\mathbb{R}\right)$ une fonction décroissante telle que $I := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f(k/n) = I$.

76. Fonctions définies par une intégrale

(MP) $\frac{1}{1}$Exercice 1339. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ telle que l'application $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$ pour chaque $\alpha > 0$.
Démontrer que l'application $F : x \mapsto \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$.

(MP) $\frac{3}{2}$*Exercice* 1340. Pour chaque nombre réel $x \notin \{-1, 1\}$, on pose $I(x) := \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t$.
a) Vérifier que I est bien définie pour $|x| \neq 1$.
b) Calculer $I'(x)$ puis $I(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
c) Calculer $I(x)$ pour $|x| > 1$.

$\frac{2}{2}$Exercice 1341. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Prouver que l'on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 1342. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t^3}}$.
Préciser le domaine de définition, les variations et la limite en $+\infty$.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 1343. Déterminer la limite lorsque $x \to 0^+$ de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\tan(t)^2}$.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 1344. Déterminer la limite lorsque $x \to 0^+$ de $\displaystyle\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t + \mathrm{e}^{3t}}$.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 1345. soit f la fonction f définie sur $[0, +\infty[\smallsetminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^8}}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 1346. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $I(x) := \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\,\mathrm{d}t$.
a) Justifier l'existence de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 1\}$.
b) En approchant l'intégrale à l'aide de sommes de Riemann, calculer $I(x)$ pour $|x| < 1$ et pour $|x| > 1$.

$\frac{2}{2}$*Exercice*$^\flat$ 1347. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) := t\ln(t)$ si $t > 0$ et $g(0) := 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \geqslant 0)$$

et la suite (v_n) définie par

$$v_n := \int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (n \geqslant 1).$$

1) Justifier l'existence de u_n puis calculer ensuite sa valeur pour chaque entier n.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de v_n et déterminer la limite de la suite (v_n).
3) Démontrer la relation

$$\forall t \in [0,1[\,, \qquad \frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$$

puis en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right] = -4\int_0^1 \frac{t\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 1348. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Calculer la limite de la suite

$$u_n := \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,\mathrm{d}x.$$

$^{2}_{2}$<u>*Exercice*</u>$^\flat$ 1349. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t$.
1) Déterminer l'ensemble de définition E de la fonction I.
2) Pour $x \in E$, montrer que $I(-x) = I(x)$.
3) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, calculer $I(1/x)$ en fonction de $I(x)$.
4) Pour $x \in E$, calculer $I(x^2)$ en fonction de $I(x)$.
5) On admet que la fonction I est continue. En déduire $I(x)$ pour $x \in E$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u>$^\flat$ 1350. Soient A, B, C et D quatres sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A+B$, $A \subset C$ et $B \subset D$.
a) On suppose que $C \oplus D$. Prouver que $A = C$ et $B = D$.
b) pourquoi cela ne marche t-il pas si on a seulement $E = C + D$?

(MP) $^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1351. Pour chaque nombre réel $x > 0$, on pose $f(x) := \int_1^\infty \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
a) Démontrer que f est définie, continue et décroissante sur $]0,\infty[$.
b) Relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$?
c) Équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$?

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1352. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2-itx}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $f'(x) + xf(x) = 0 \ \ (x \in \mathbb{R})$.
b) En remarquant que $f(0)^2 = \int\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ prouver que $f(x) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 1353. Prouver que la fonction $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 1354. Existence, continuité, dérivabilité et calcul de $g(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

$^{2}_{2}$<u>Exercice</u> 1355. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $J_n(x) := \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa parité ?
b) Exprimer J_{-n} en fonction de J_n.
c) Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
d) Montrer que J_n est solution de l'équation différentielle homogène

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$_1$Exercice 1356. Calculer $f(x) = \int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$^2_2$Exercice 1357. Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1),\mathbb{C}\big)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) := \int_0^1 xf(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ ainsi que la limite de cette intégrale lorsque $x \to +\infty$.
c) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ (On commencera par supposer que $f(0) = 0$).

$^2_2$Exercice 1358. Pour $x > 0$, on pose $F(x) := \int_0^{\pi/2} \ln\big(x\cos^2 t + \sin^2 t\big)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que F est définie et dérivable sur $]0,\infty[$.
b) Calculer F', simplifier et en déduire $F(x)$.
c) Pour $(a,b) \in\,]0,\infty[^2$, calculer $\int_0^{\pi/2} \ln\big(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\big)\,\mathrm{d}t$.

$^2_2$Exercice 1359. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Trouver une équation diférentielle vérifiée par f.
c) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{4}\cos x + \frac{\ln 2}{2}\sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$ où g est une fonction que l'on déterminera (Utiliser la méthode de variation de la constante).

$^1_1$Exercice 1360. Trouver un équivalent de $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{\sqrt{x+t}}\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to +\infty$

$^2_2$Exercice 1361. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$.
b) En intégrant au besoint par partie, prouver que g est de clase $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$.
c) Montrer que f et g vérifient $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0,\infty[$.
d) Montrer que f et g sont continues en 0.
e) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.

$^2_2$Exercice 1362. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.
a) Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f ?
b) On pose $\phi(x) := xf(x)f(x-1)$. Prouver que ϕ est 1-périodique.
c) Montrer que $x \mapsto \dfrac{\phi(x)}{x}$ est décroissante.
d) Montrer que ϕ est constante.
e) Équivalent de f en -1^+ et en $+\infty$?

$^1_2$Exercice 1363. On pose $G(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Prouver que G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Dérivabilité de G ?

$^{1}_{2}$Exercice 1364. On pose $f(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.
a) Pour quels x la fonction f est elle définie ?
b) Calculer f' et en déduire une expression simple pour $f(x)$.

$^{1}_{2}$Exercice 1365. On pose $f(x) := \int_0^\infty \operatorname{ch}(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et satisfait $y' - 2xy = 0$.
b) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{ch}(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$^{1}_{2}$Exercice 1366. Soit f continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^\infty \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$^{2}_{2}$Exercice 1367. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
a) Ensemble de définition $\mathcal{D}\Gamma$ de Γ ?
b) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x \in \mathcal{D}\Gamma$.
c) Prouver que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}\Gamma$.

$^{1}_{2}$Exercice 1368. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $F(x) := \int_0^x f(t,x)\,\mathrm{d}t$. Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$^{2}_{2}$Exercice 1369. On pose $F(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$.
a) Démontrer que F est définie sur $]0, \infty[$.
b) Démontrer que F est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$.
c) Démontrer que $F(x)$ est équivalent en 0^+ à $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+x)}$ et donc à $-\ln x$.

$^{2}_{2}$Exercice 1370. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) := \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) On suppose que la limite $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.
b) On suppose que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty F(x)\,\mathrm{d}x$.

$^{2}_{2}$Exercice 1371. **Intégrales Eulériennes.** On pose

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

a) Quels sont les ensembles de définition de Γ et de B.
b) Effectuer le changement de variable $t = u^2$ dans les deux intégrales.
c) Effectuer ensuite le changement de variable $u = \cos\vartheta$ dans B.
Pour $k \in \{1,2,3\}$, $\Delta_1 := [0, a/\sqrt{2}] \times [0, a/\sqrt{2}]$, $\Delta_2 := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2 : x^2+y^2 \leqslant a^2\}$ et $\Delta_3 := [0,a] \times [0,a]$, on pose

$$\Gamma_a(s) = \int_0^a \mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_k = \iint_{\Delta_k} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^\alpha y^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

d) Démontrer que $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$ puis calculer I_1, I_2, I_3.
e) En passant à la limite lorsque $a \to +\infty$, trouver une relation entre $\Gamma(x)$, $\Gamma(y)$ et $\Gamma(x+y)$.
f) Calculer $\Gamma(1/2)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp -\frac{x^2}{2\sigma}\,\mathrm{d}x$ pour $\sigma > 0$.

$^1_1$Exercice 1372. On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est définie, continue et décroissante sur $]0,\infty[$.
b) Relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$?
c) Équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$?

$^1_1$Exercice 1373. Pour $x > 0$, on pose $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^2+x}\,\mathrm{d}t$.
a) Existence de F ?
b) Déterminer $\lim_{x\to\infty} F(x)$.
c) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$.

$^2_2$Exercice 1374. On pose $J_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ix\sin t}\,\mathrm{d}t$ (fonction J_0 de Bessel).
a) Développer $J_0(x)$ en série entière de x à l'aide de l'intégrale de Wallis

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2k} t\,\mathrm{d}t = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

b) Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
c) En dérivant terme à terme, calculer $J_0''(x) + J_0(x) + \dfrac{1}{x}J_0'(x)$ et en déduire que J_0 vérifie une équation différentielle du second ordre.

$^2_1$Exercice 1375. En dérivant(sous l'intégrale), établir l'identité suivante

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\cos t}\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (w \in \mathbb{R}).$$

En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

$^2_2$Exercice 1376. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.
a) Dériver $h = f + ig$ sur $\mathbb{R}$
b) En déduire une équation différentielle vérifiée par $h = f + ig$.
c) En déduire f et g.

$^2_2$Exercice 1377. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2 - x^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Prouver que f satisfait l'équation différentielle

$$(E) \qquad f'(x) + 2xf(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Réciproquement, démontrer que la série entière associée à la suite du b) est de rayon de convergence infini et satisfait (E).
d) En déduire un développement en série entière de f.

$^1_1$Exercice 1378. Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \min\left\{x, \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right\} \mathrm{d}t$.

$^2_1$Exercice 1379. Déterminer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(nt)}{1+t^2} \mathrm{d}t$ lorsque $n \to \infty$.

$^2_2$Exercice 1380. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt) \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' à l'aide d'une intégrale impropre.
c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire une expression de f simple. On pourra utiliser que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$^1_1$Exercice 1381. Prouver que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} \operatorname{th} t \, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$.

$^2_2$Exercice 1382. a) Pour $0 < a < b$, montrer que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t} \,\mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a} + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-bu} - \mathrm{e}^{-au}}{u} \,\mathrm{d}u.$$

b) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-bu} - \mathrm{e}^{-au}}{u} \,\mathrm{d}u$.

$^1_1$Exercice 1383. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer leurs dérivées.
b) Vérifier que $g + h^2$ est une constante sur $\mathbb{R}^+$ que l'on determinera.
c) Vérifier que $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ pour $x \geqslant 0$. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

$^1_1$Exercice 1384. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

a) Prouver que $F : x \mapsto \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$ est prolongeable en une fonction $\tilde{F}$ continue sur $\mathbb{R}$.
b) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, prouver que $\tilde{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$^1_1$Exercice 1385. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que la limite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(t) = \ell$ existe.

Étudier la limite de $F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to +\infty$.

$^1_1$Exercice 1386. Soient $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $g(x) := \dfrac{1}{2h} \displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t) \,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^1 f(x + hu) \,\mathrm{d}u$.
b) En déduire que, si f est croissante (resp. convexe), alors g est croissante (resp. convexe).

$^1_1$Exercice 1387. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n := \displaystyle\int_0^n \sqrt{1 + (1 - x/n)^n} \,\mathrm{d}x$.

Montrer que $a_n \sim n$ lorsque $n \to \infty$.

$^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 1388. Pour $(a,b) \in]0,\infty[$, montrer que

$$\int_0^1 (1-x^a)^{1/b}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x^b)^{1/a}\,\mathrm{d}x.$$

^{1}<u>Exercice</u> 1389. Ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1 - x\sin t}$$

Développer f en série entière au voisinage de 0.

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 1390. pour $n \geqslant 0$, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.
a) Prouver que I_n converge ves 1.
b) Démontrer que $I_n - 1$ est équivalent à $-\dfrac{\ln 2}{n}$

$^{2}_{1}$<u>Exercice</u> 1391. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) := \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$?

(MP) $^{3}_{2}$<u>Exercice</u> 1392. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On pose $f(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin]a,b[\\ \exp \dfrac{1}{(x-a)(x-b)} \text{ si } x \in]a,b[\end{cases}$.
Prouver que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

(MP) $^{1}_{1}$<u>Exercice</u> 1393. Soient $\alpha > 0$ et F_α l'application définie par $F_\alpha(x) := \int_0^{\pi} \exp\big(-x^{\alpha}\sin t\big)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.
Allure des courbes représentatives des fonctions F_α.

(MP) $^{4}_{3}$<u>Exercice</u> 1394. Pour chaque nombre réel $x > 0$, on pose $f(x) := \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$.
a) Démontrer que f est définie et continues sur $]0,\infty[$.
b) Démontrer que $f(x) \sim \pi/\sqrt{x}$ lorsque $x \to +\infty$.
c) Démontrer que $f(x) \sim \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+x)}\,\mathrm{d}t \sim -\ln x$ lorsque $x \to 0^+$.

77. Intégrales multiples

$_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1395. Soit D le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,-1)$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_D (x+2y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1396. Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geqslant 1, x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calculer l'intégrale $I := \displaystyle\int_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$_{1}$<u>Exercice</u>$^{\flat}$ 1397. Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0, x^2+y^2-x \geqslant 0, x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$. Calculer $I = \displaystyle\int_D \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$_1$Exercice$^\flat$ 1398. Soient $R > 0$ et

$$D := \left\{(x, y) \in [0, +\infty[^2 : x^2 + y^2 - 2Rx \leqslant 0, x^2 + y^2 - 2Ry \leqslant 0\right\}.$$

Calculer l'intégrale $\int_D (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

$_1$Exercice$^\flat$ 1399. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leqslant 0, x^2 + y^2 - x \leqslant 0\}$. Calculer l'intégrale

$$\int_D (x + y)^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

$^1_2$Exercice$^\flat$ 1400. Soient $a > 0$ et $^b > 0$. Calculer $\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ pour

$$D := \{(x,) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}.$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1401. Calculer $\int_D \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ pour

$$D := \{(x,) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{x}\}.$$

en utilisant le changement de variable $x = u$ et $y = \frac{v}{u}$.

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1402. Calculer $\int_D \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}ydz}{(x+y+z+1)^3}$ pour

$$D := \{(x, y, z) \in [0, +\infty[^3 : x + y + z \leqslant 1\}.$$

$_1$Exercice$^\flat$ 1403. Calculer $\int_D \cos(x + y - z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}ydz$ pour

$$D := \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^3.$$

$^1_1$Exercice$^\flat$ 1404. Calculer $I = \int_D xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}ydz$ pour

$$D := \{(x, y, z) \in [0, +\infty[^3 : x + y + z \leqslant 1\}$$

en utilisant le changement de variables $x + y + z = u$, $y + z = uv$ et $z = uvw$.

$^2_1$Exercice 1405. Calculer $\int\int_D \exp \frac{x^3+y^3}{xy}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ pour $p > 0$ et $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leqslant 2px$ et $x^2 \leqslant 2py\}$.

$^2_1$Exercice 1406. Soit $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer $\int_D xy\partial_1^2\partial_2^2 f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ pour $D := [0, a] \times [0, b]$.

$^2_1$Exercice 1407. Calculer $\displaystyle\int\int_D x^2 y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ pour $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \leqslant 0$ et $x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$.

$^{2}_{1}$Exercice 1408. Soit f l'application définie par $f(x,y,z) := \mathrm{d}s\frac{z^3}{(x+y+z)(y+z)}$ pour $(x,y,z) \in]0,\infty[^3$.
a) Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $D := \{(x,y,z) \in [0,+\infty[^3 : x+y+z \leqslant 1\}$.
b) Calculer $\int\int\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$^{2}_{1}$Exercice 1409. Centre d'inertie d'un domaine homogene limité par une sphère et deux plans parallèles.

$^{1}_{1}$Exercice 1410. Pour $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$ et $a > R$, calculer le potentiel Newtonnien

$$V(a) := \iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+(z-a)^2}.$$

$^{1}_{1}$Exercice 1411. Centre d'inertie d'un domaine tridimensionnel homogène limité par une sphère et deux plans parallèles ?

$^{1}_{1}$Exercice 1412. $f(x,y,z) = \dfrac{z^3}{(x+y+z)(y+z)}$ et $D := \big\{(x,y,z) \in [0,+\infty[^3 : x+y+z \leqslant 1\big\}$.
a) Démontrer que f est continue ou prolongeable par continuité sur D.
b) Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$^{1}_{1}$Exercice 1413. Soit (Γ) courbe du plan Oxy d'équation polaire $\varrho^2 = a^2\cos(2\vartheta)$ limitée à $x \geqslant 0$ et soit S la surface (homogène) engendrée par la révolution de (Γ) autour de Ox.
a) Aire de S.
b) Centre d'inertie géomètrique de (S).
c) Moment d'inertie de (S) par rapport à ox.

$^{1}_{1}$Exercice 1414. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 1415. Soit D l'ensemble défini par les inégalités $(x+y)^2 \leqslant 2x$ et $y \geqslant 0$. Calculer l'intégrale double

$$I := \iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$^{1}_{1}$Exercice 1416. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ pour $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\big\}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1417. Pour $a > 0$ et $b > 0$, calculer l'intégrale double $I := \displaystyle\iint_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pour le domaine

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

$^{1}_{1}$Exercice 1418. Pour $a > 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D \frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a^2+y^2}$ pour le domaine

$$D := \{(x,y) \in [0,+\infty[^2 : x^2+y^2 \leqslant a^2\}.$$

Exercice 1419. Pour $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leqslant x^2 + xy + y^2 \leqslant 4\}$. Calculer $I := \displaystyle\iint_D x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 1420. Calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}$ à l'aide du théorème de Green-Riemann pour

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Exercice 1421. Déterminer le centre d'inertie du solide homogène délimité par le tore (un pneu à section circulaire) de rayons $R > r$ et par deux demi-plans méridiens (dont le bord est l'axe de révolution du pneu).

Exercice 1422. Soit T le tétraèdre défini par les inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ et $x+y+z \leqslant 1$.
a) Calculer $\displaystyle\iint_S x^2 \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ en prenant successivement pour S chacune des faces du tétraèdre.
b) En déduire le centre d'inertie du tétraèdre.

Exercice 1423. Déterminer le centre d'inertie du huitième de boule unité $D := \{(x,y,z) \in [0,+\infty[^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 1424. Soient $a > 0$, O le point $(0,0,0)$ et M_0 le point $(0,0,a)$ de $\mathbb{R}^3$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on note M le point (x,y,z) et on pose

$$F(x,y,z) = \frac{OM^2 - OM_0^2}{M_0M^3}.$$

Calculer l'intégrale $\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où B désigne la Boule de centre O et de rayon a.

(MP) Exercice 1425. Calculer $\displaystyle\int\int_D \frac{x^3+y^3}{\exp(xy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pour $D := \{(x,y) : y^2 \leqslant 2px \text{ et } x^2 \leqslant 2py\}$.
On pourra poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$.

Exercice 1426. Calculer le moment d'inertie du solide

$$\Delta : \quad \begin{cases} 1 \leqslant z \leqslant 2 \\ z(x^2+y^2) \leqslant 2x \end{cases}$$

par rapport à l'axe (Oz).

78. Intégrales curvilignes

Exercice 1427. Calculer $\int_\gamma \omega$ pour $\omega := (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$ et γ la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Exercice 1428. Calculer $\int_\Gamma (z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z)$, où Γ est un paramètrage de la courbe déterminée par

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1, \\ x+y = 1. \end{cases}$$

79. Aires

$^{2}_{1}$Exercice 1429. Aire du domaine plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant \frac{x^2}{b}$ et $\frac{c^2}{x} \leqslant y \leqslant \frac{d^2}{x}\}$ pour $0 < b < a$ et $0 < c < d$.

$^{2}_{1}$Exercice 1430. S surface d'équation $xy - az = 0$. Aire de la partie de S dont la projection orthogonale sur Oxy est à l'intérieur de la boucle de la courbe d'équation polaire $\varrho^2 = a\cos(2\vartheta)$ avec $|\vartheta| \leqslant \pi/4$.

$^{2}_{1}$Exercice 1431. Soient $a > 0$, $S := \{(x, y, z) \in [0, +\infty[^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, $t \in [0\pi/2]$, $H := \{(a\cos t, a\sin t, at/(2\pi)) : t \in \mathbb{R}\}$ et E l'hélicoïde droit d'axe Oz et de directrice H. Aire de la partie de S située au dessus de E.

$^{1}_{1}$Exercice 1432. Aire du domaine plan $\left\{(x, y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \leqslant 1\right\}$ pour $b \geqslant a > 0$.

$^{1}_{1}$Exercice 1433. S surface d'équation $xy = az$. Aire de la partie de S dont la projection orthogonale sur Oxy est à l'intérieur de la boucle de la courbe d'équation polaire $\varrho^2 = a\cos(2\vartheta)$ avec $|\vartheta| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1434. Soient $a < b$ et $c < d$ des nombres réels strictement positifs. Calculer l'aire du domaine
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax \leqslant y^2 \leqslant bx \text{ et } cx \leqslant x\right\}.$$

$^{1}_{1}$Exercice 1435. Calculer l'aire de la partie du cone $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ intérieur à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

$^{1}_{1}$Exercice 1436. Pour $a > b > 0$, calculer l'aire de la partie de la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ intérieure au cylindre d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$^{1}_{1}$Exercice 1437. Calculer l'aire de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ à l'aide du théorème de Green-Riemann.

$^{1}_{1}$Exercice 1438. Aire du domaine plan délimité par les paraboles $y = x^2$ et $y = 2x^2$ d'une part et les hyperboles $y = \frac{2}{x}$ et $y = \frac{5}{x}$ d'autre part.

80. Volumes

$_{1}$Exercice$^{\flat}$ 1439. Calculer le volume D limité par la sphère de centre $(0, 0, 0)$ de rayon 2 et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = y$.

$^{2}_{1}$Exercice 1440. Soit $p > 0$. Volume limité par les surfaces d'équation $x^2 + y^2 = 2pz$ et $z^2 = x^2 + y^2$.

$^{1}_{1}$Exercice 1441. Volume limité par les surfaces $x^2 + y^2 = 2pz$ et $z^2 = x^2 + y^2$?

$^{1}_{1}$Exercice 1442. Pour $a > 0$, calculer le volume de l'ensemble
$$D_a := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant a^2 \text{ et } y^2 + z^2 \leqslant a^2\right\}.$$

$^1_1$Exercice 1443. Déterminer un plan qui coupe une boule en deux domaines dont l'un a un volume double de l'autre.

$^1_1$Exercice 1444. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux cylindres de révolution égaux dont les axes se rencontrent et font un angle $\alpha \in]0, \pi/2]$. Calculer le volume de leur intersection.

$^1_1$Exercice 1445. Déterminer le volume de $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant az \text{ et } x + y + z \leqslant a\}$.

$^1_1$Exercice 1446. Déterminer le volume de l'intersection de deux cylindres de rayon R et d'axes (Ox) et (Oy).

81. Séries

(MP) $^2_3$Exercice 1447. Soient $u_0 \in]0, 1[$ et $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_{n+1} := u_n - u_n^2$ pour $n \geqslant 1$.
a) Démontrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
b) Nature des séries de terme général u_n^2, $\ln(1 - u_n)$ et u_n.

(MP) $^1_1$Exercice 1448. Soit $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n := 2\sqrt{n} - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} 1/\sqrt{k}$ pour $n \geqslant 1$. En étudiant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ montrer que la suite $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ et fournir un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Exercice 1449. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$?

Exercice 1450. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$?

Exercice 1451. Nature des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$?

Exercice 1452. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 2}\right)$?

Exercice 1453. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}\sin(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n} + (-1)^n}$?

Exercice 1454. Pour $a > 0$, nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^{-(\ln n)^2}$?

Exercice 1455. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n!}$?

Exercice 1456. Pour $a > 0$, nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^a}$?

Exercice 1457. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$?

Exercice 1458. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$?

Exercice 1459. Pour $\alpha > 0$, nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \big(n\sin(1/n)\big)^{n^\alpha}$?

$^{2}_{1}$Exercice 1460. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x$?

$^{2}_{1}$Exercice 1461. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right)$.

$^{3}_{1}$Exercice 1462. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Arcsin}\Big(\sin\Big(2\pi(4+\sqrt{15})^k\Big)\Big)$.

$^{2}_{1}$Exercice 1463. Convergence de la série de terme général $u_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) - \operatorname{Arcsin}\frac{n^2+}{n^2+2}$.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 1464. Nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n)^\alpha/n$ où $\varrho(n)$ désigne le nombre de chiffres de n.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 1465. Soient $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.
a) Démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n v_n}$ converge si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent.
b) Lorsque $v_n + n^2 u_n v_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, montrer que les séries de terme général u_n et v_n ne peuvent converger simultanément.

(MP) $^{3}_{1}$Exercice 1466. Soient $(a,b) \in]0,\infty[^2$ et $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} 1/(k+b)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer la nature de la série de terme général a^{u_n}.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 1467. Soient $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite positive et $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $v_n = u_n \prod_{1\leqslant k\leqslant n}(1+u_k)^{-1}$ pour $n \geqslant 1$.
a) Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
b) Démontrer que $\sum_{n\geqslant 1} v_n < 1$ si $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\sum_{n\geqslant 1} v_n = 1$ sinon.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 1468. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n n/\ln n}$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 1469. Soit $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite complexe telle que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et soit $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $v_n := \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k u_k$ pour $n \geqslant 1$.
a) Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = 0$.
b) Convergence et somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{v_n}{n^2+n}$.

(MP) Exercice 1470. Nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

(MP) ^{1}Exercice 1471. Nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^2}$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 1472. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2n}\right)$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 1473. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$.

(MP) $^{2}_{2}$Exercice 1474. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}+1}$ lorsque $\alpha > 0$.

82. Séries numériques

$^2_2$Exercice 1475. a) Montrer que la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$ diverge.
b) Prouver que $u_n \sim nu_n - (n-1)u_{n-1}$ et en déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{k} u_n$ lorsque $k \to \infty$.

Exercice 1476. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$?

Exercice 1477. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$ est équivalent en $+\infty$ à $\displaystyle\frac{n}{\ln n}$.

Exercice 1478. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-1/n}$?

Exercice 1479. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$?

Exercice 1480. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$?

Exercice 1481. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$?

Exercice 1482. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$?

Exercice 1483. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$?

Exercice 1484. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arccos}\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$?

Exercice 1485. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha n)$ diverge grossièrement.

$^2_1$Exercice 1486. Étudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ pour

$$u_n := \operatorname{Arccos} \frac{1}{n} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 1487. Pour $\alpha > 0$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 1488. Calculer si elle existe la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 1489. Calculer si elle existe la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

Exercice 1490. Calculer si elle existe la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 1491. Pour $\vartheta \in [0, \pi/2[$, calculer si elle existe la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{2^k}\right)\right)$.

Exercice 1492. Soit F une fraction rationelle sans pôles dans $\mathbb{N}$. Nature de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F(n)$.

Exercice 1493. Soit P un polynôme. Nature de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\mathrm{e}^{-n}$?

Exercice 1494. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n!}$?

Exercice 1495. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2^k}\right)$?

Exercice 1496. Les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2$ étant convergente, prouver que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Exercice 1497. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de limite ℓ et soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

Étudier la convergence de la suite (v_n) puis de la suite (w_n).

Exercice 1498. a) Prouver que

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}^*).$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge.

c) En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'infini.

Exercice 1499. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}^2}$ et $v_n = \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}$. Étudier les suites u_n, v_n, $v_n - 2u_n$ et v_n/u_n.

[1] Exercice 1500. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

[2,1] Exercice 1501. La suite de Fibonacci est la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défine par

$$\phi_0 = 0, \qquad \phi_1 = 1 \quad \text{et} \quad \phi_{n+2} = \phi_n + \phi_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Convergence et somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\phi_{n-1}\phi_{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n\phi_{n+1}}$.

$\frac{2}{2}$Exercice 1502. On pose $u_1 = -1$ et pour $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n := (n - 1/2)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - 1$$

a) Démontrer que la série de terme général (u_n) converge.
b) Calculer sa somme pour montrer que $A_n = \dfrac{n!}{n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}}$ a une limite L.
c) Déterminer L sachant que $\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n}$ est équivalent à $1/\sqrt{\pi n}$.
d) En déduire la formule de Stirling.

83. Séries de fonctions

$\frac{2}{1}$Exercice 1503. Soit $a > 0$, soit f une fonction paire, 2π-périodique, telle que $f(x) = a^2x^2/2$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) := 2a^2 \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Série de Fourier de g.
b) Démontrer que $g - f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
c) Étudier $g'' - f''$ et en déduire une équation différentielle satisfaite par g sur $]-\pi, \pi[$.
d) Calculer $A := \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n/(n^2 + a^2)$ et $B := \sum_{n\geqslant 0} 1/(n^2 + a^2)$.

84. Séries entières

(A) $\frac{1}{1}$Exercice 1504. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 2$.

(A) $\frac{1}{1}$Exercice 1505. Calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(n)z^n$.

$\frac{2}{2}$Exercice 1506. Soit f l'unique fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(x) - 2xf(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
a) Prouvez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. b) Développer f en série entière de deux manières différentes. c) En déduire que $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k \frac{c_n^k}{2k+1} = \frac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)}$.

(A) $\frac{1}{1}$Exercice 1507. Calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\sin(n)}z^n$.

$\frac{2}{2}$Exercice$^\flat$ 1508. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^\pi \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.
a) Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} en intégrant par partie.
b) En procèdant par récurence sur n, établir que

$$I_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi \qquad (n \in \mathbb{N})$$

c) En déduire un développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t$.

$^{1}_{1}$Exercice 1509. Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^{\cos(n\pi)} x^n$.

Exercice 1510. Développez la fonction $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^3}$ en série entière au voisinage de 0.

$^{2}_{1}$Exercice 1511. Déterminer la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k u_{n-k}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 1512. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{3n}/(3n)!$.

^{1}Exercice 1513. Soit $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Prouver que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)\right|^2 \,\mathrm{d}\vartheta = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} \qquad (0 < r < R).$$

$^{2}_{1}$Exercice 1514. Soit $S :]-R, R[\to \mathbb{C}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que toute solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $y'''' + y = S(x)$ est développable en série entière sur $]-R, R[$.

Exercice 1515. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n} z^{2n+1}$.

^{1}Exercice 1516. Calculer la somme de la série entıère $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+3)x^n$.

^{1}Exercice 1517. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Que peut on dire du rayon de convergence R des séries entières suivantes :
a) $\sum_{n\geqslant 0}(-2)^n a_n z^{n+1}$ b) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n a_n}{n^2+1}$ d) $\sum_{n\geqslant 0} n^2 a_n z^n$ e) $\sum_{n\geqslant 0} n^{\log n} a_n z^n$
f) $\sum_{n\geqslant 0}(1+i^n) a_n z^n$.

$^{2}_{2}$Exercice 1518. En développant $t \mapsto (1+t^2)/(1+t^4)$ en série entière, prouver que

$$\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

$^{2}_{2}$Exercice 1519. A l'aide de la formule de Taylor, prouver que la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

$^{1}_{1}$Exercice 1520. Pour chaque nombre complexe z, prouver que $\left|\mathrm{e}^z - 1\right| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} - 1 \leqslant |z|\mathrm{e}^{|z|}$.

$^{1}_{1}$Exercice 1521. Soit S la série entière définie par $S(x) := \sum_{n\geqslant 0} x^{3n+2}/(3n+2)$. a) Rayon de convergence et somme de S.
b) En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n/(3n+2)$.

$^{2}_{2}$Exercice 1522. On pose $F(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $S(x) := \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
a) Montrer que S est définie et continue sur $[-1, 1]$.
b) prouver que $F(x) = S(x)$ pour $|x| < 1$.
c) En déduire la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

$^{2}_{2}$Exercice 1523. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J_0(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ix\sin t}\,\mathrm{d}t$ (fonction J_0 de Bessel).
a) Développer $J_0(x)$ en série entière de x à l'aide de l'intégrale de Wallis $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2k} t\,\mathrm{d}t = \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$ $(k \geqslant 0)$.
b) Prouver que $xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1524. Développez la fonction $f(x) = \ln^2(1+x)$ en série entière au voisinage de 0.

$^{1}_{1}$Exercice 1525. Développez en série entière au voisinage de 0 la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{Argth\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 1526. Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} z^n$?

Exercice 1527. Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(n)}{\operatorname{ch}^2(n)} z^n$?

Exercice 1528. Pour $a > 0$, rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(\operatorname{ch} na)}$?

Exercice 1529. Pour $\alpha \geqslant 0$, rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos(1/n)\big)^{n^\alpha} z^{n^2}$?

Exercice 1530. Pour $a > 0$, rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [a^n] z^n$?

$^{2}_{1}$Exercice 1531. Soit (a_n) une suite de nombres non nuls telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soit de rayon de convergence $R > 0$.
a) Prouver que le rayon de convergence R' de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a_n}$ vérifie $RR' \leqslant 1$.
b) Pour $\alpha \in \,]0,1[$, donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lequel $RR' = \alpha$.

Exercice 1532. Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} z^n$?

Exercice 1533. Pour $a \in \mathbb{R}$, rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+2}{n} z^n$?

Exercice 1534. Pour $a > 1$, rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n(-1)^n} z^n$?

Exercice 1535. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R. Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$?

Exercice 1536. Pour $a > 0$, rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$?

Exercice 1537. Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$?

Exercice 1538. Rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^n$?

Exercice 1539. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$?

Exercice 1540. On pose $T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
a) Domaine de définition et calcul de $T(x)$.
b) En déduire l'égalité

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

c) Trouver une série absolument ayant pour somme π.
d) Donner une estimation rationnelle de π à 10^{-6} près.

Exercice 1541. Pour $a > 0$, développer la fonction $f(x) = \log(a + x)$ en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1542. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

Exercice 1543. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) x^n$.

Exercice 1544. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Exercice 1545. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}} x^n$.

Exercice 1546. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.

Exercice 1547. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Que peut-on dire du rayon de convergence R des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^2+1} z^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} a_n z^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 + i^n) a_n z^n$

Exercice 1548. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
a) Montrer que S est définie et continue sur $[-1, 1]$.
b) Quel est le domaine de définition de F ?
c) Montrer que $F(x) = S(x)$ pour $x \in \,]-1, 1[$.
d) Montrer que F est continue en -1.
e) En déduire la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

$\frac{2}{2}$Exercice 1549. On pose $J_0(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ix\sin t}\,\mathrm{d}t$ (fonction J_0 de Bessel).
a) Développer $J_0(x)$ en série entière de x à l'aide de l'intégrale de Wallis

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2k} t\,\mathrm{d}t = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

b) Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
c) En dérivant terme à terme, calculer $J_0''(x) + J_0(x) + \dfrac{1}{x} J_0'(x)$ et en déduire que J_0 vérifie une équation différentielle du second ordre.

Exercice 1550. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.
a) Pour $-1 < x < 1$, montrer que

$$S(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{x\sqrt{3}}{2+x}.$$

b) En déduire la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

Exercice 1551. En développant $\displaystyle\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ en série entière pour $-1 < x < 1$, établir l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

Exercice 1552. Calculer la somme de la série $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}$.

Exercice 1553. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 1554. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^n$.

Exercice 1555. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n=0}^{\infty} \big(2 + (-1)^n\big)^n x^n$.

Exercice 1556. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$.

Exercice 1557. Pour $\alpha > 0$, Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$.

Exercice 1558. On pose $f(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $f(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$. Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1559. Développer la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1560. On pose $f(0) := -\frac{1}{6}$ et $f(x) := \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ si $x \in \left]-\pi, \pi\right[\smallsetminus \{0\}$. Prouver que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $\left]-\pi, \pi\right[$.

Exercice 1561. Déterminer les solutions f développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ de

$$4xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 1562. Étude de la série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} x^n$.
a) Rayon de convergence de S.
b) Donner une valeur de N pour que

$$S_N(x) := \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} 2^{\sqrt{n}} x^n$$

soit une valeur approchée de $S(x)$ à 10^{-8} près pour tout $|x| \leqslant 1/3$.
c) Graphe de $x \mapsto S_N(x)$ pour $x \in [-1/3, 1/3]$.

Exercice 1563. Déterminer le rayon de convergence et étudier la convergence en $x = -R$ et $x = R$ de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n.$$

Exercice 1564. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=0} (n^2 + n + 1) \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 1565. Pour $\alpha > 0$ et $x \in \left]-1, 1\right[$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\alpha) x^n$.

Exercice 1566. Pour $a \in \mathbb{R}$, développer la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x + a)$ en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenu ?

[1]Exercice 1567. Calculer un développement en série entière de $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ au voisinage de 0.

$\frac{2}{2}$Exercice 1568. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2 - x^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Prouver que f satisfait l'équation différentielle

$$(E) \qquad\qquad f'(x) + 2xf(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Réciproquement, démontrer que la série entière associée à la suite du b) est de rayon de convergence infini et satisfait (E).
d) En déduire un développement en série entière de f.

Exercice 1569. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

Exercice 1570. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $x \mapsto \cos^4 x$.

Exercice 1571. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$.
a) Rayon de convergence et domaine de définition de S ?
b) Calculer la somme sur $]-1,1[$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Exercice 1572. a) Développer la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ en série entière au voisinage de 0.
b) En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
c) Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n=10}^{\infty} \ln\left(\tan \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right).$$

Exercice 1573. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Rayon de convergence de la série entière $S_\alpha(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$?
b) Prouver que S_α satisfait l'équation différentielle

$$(1+x)S'_\alpha(x) = \alpha S_\alpha(x) \qquad (-R < x < R).$$

c) En déduire S_α pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
d) Que se passe-t-il lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$?

Exercice 1574. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs tels que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \ell_1$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \ell_2$.

Lorsque $(\ell_1, \ell_2) \in]0, \infty[^2$, quel est la rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

<u>Exercice</u> 1575. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{2n+1}}{1.3.5...(2n+1)}$$

<u>Exercice</u> 1576. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
a) Calculer le rayon de convergence R de S et montrer que

$$(E') \qquad S'''(x) = S(x) \qquad (-R < x < R)$$

b) Déterminer S. (les solutions de (E') sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{jx} + \nu e^{j^2 x}$ où $j = e^{2i\pi/3}$).

<u>Exercice</u> 1577. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \big(\cos(\pi/\sqrt{n})\big)^{n^3} x^{n^2}$?

<u>Exercice</u> 1578. Prouver que l'application $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 1579. Pour $\alpha \geqslant 0$, rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\operatorname{Arctan} n\big)^{n^\alpha} z^{n^2}$?

<u>Exercice</u> 1580. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$. Calculer sa somme $S(x)$ pour $-R < x < R$ et étudier $S(x)$ en $x = \pm R$.

<u>Exercice</u> 1581. Rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^n}{1 + n^{\sqrt{n}}} x^n$?

<u>Exercice</u> 1582. Rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n!}}{n^{\exp n \ln n}} x^n$?

<u>Exercice</u> 1583. Nous cherchons à résoudre $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
a) Chercher une solution $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 0$. (determiner la suite a_n en fonction de a_1 puis en déduire f).
b) sur quel intervalle la fonction trouvée est t-elle solution ?
c) Procéder à une variation de la constante pour trouver les autres solutions.
d) Existe t'il des solutions sur $\mathbb{R}$?

<u>Exercice</u> 1584. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 1)y'' - 12y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 1585. On considère l'équation différentielle $(E) \quad 4xy'' + 2y' - y = 0$.
a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
b) Ensemble solution de (E).

$\frac{2}{2}$<u>Exercice</u> 1586. Résoudre l'équation différentielle

$$(x + x^2)f''(x) + (3x+1)f'(x) + f(x) = 0 \qquad \big(x \in]0, \infty[\big)$$

en cherchant une solution développable en série entière.

(MP) $^{2}_{1}$Exercice 1587. Résoudre $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ en cherchant d'abbord une solution développable en série entière.

$^{2}_{2}$Exercice 1588. Développer la fonction

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

en série entière au voisinage de 0 et calculer $f(1)$ à 10^{-3} près.

Exercice 1589. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et soient R, R' et R'' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \Re e(a_n) z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \Im m(a_n) z^n$. Prouver que $R=\min(R',R'')$.

(A) $^{1}_{1}$Exercice 1590. Calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^n z^{n^2}$.

(A) $^{1}_{1}$Exercice 1591. Calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} z^n$.

Exercice 1592. Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n} x^n$.

$^{2}_{1}$Exercice 1593. Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \big(\cos(1/n)\big)^{n^\alpha} x^n$.

Exercice 1594. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{3/2}\mathrm{e}^n z^{n^3}$.

Exercice 1595. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

Exercice 1596. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^{n^2}$.

^{1}Exercice 1597. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n/(n+2)$.

^{1}Exercice 1598. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

^{1}Exercice 1599. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n-x}{n!} x^n$.

^{1}Exercice 1600. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$.

^{1}Exercice 1601. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n^2+3n+1)x^n$.

^{1}Exercice 1602. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$.

^{1}Exercice 1603. Calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{4n^2-1}$.

$^{3}_{1}$Exercice 1604. Déterminer un équivalent en 1^- de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^{n^2}$.

$^{2}_{1}$Exercice 1605. Soit $f :]-\pi/2, \pi/2[$ l'application définie par $f(x) := 1/(\cos x)$ pour $|x| < \pi/2$.
a) Démontrer qu'il existe une suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ de polynômes à coefficients positifs tels que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\cos x)}{\cos^{n+1} x} \qquad (n \geqslant 0, -\pi/2 < x < \pi/2).$$

b) Calculez $P_n(1)$
c) Démontrez que f est développable en série entière dans un voisinage de 0.

85. Séries de Fourier

(A) $^{1}_{1}$Exercice 1606. a) Trouver six relations entre les nombres

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad C = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad D = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

i.e. trouver toutes les relations exprimant l'un deux en fonction d'un autre de ces nombres.

b) En utilisant Parseval, on a montré que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire B, C et D.

Exercice 1607. Soit f l'application définie par $f_\alpha(x) := \big|\sin(x)\big|$ pour $x \in \mathbb{R}$.
a) Série de Fourier de f
b) Montrer que

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

^{1}Exercice 1608. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit f_α une fonction 2π-périodique telle que $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-i\alpha x}$ pour $-\pi < x < \pi$.
a) Série de Fourier de f_α.
b) Calculer $A_\alpha := \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1/(n+\alpha)^2$ et $B_\alpha := \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1/(n+\alpha)^3$.

$^{1}_{1}$Exercice 1609. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
a) Démontrer que $\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.
b) Cas dégalité ?

$^{1}_{1}$*Exercice* 1610. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = |\sin x|$ en cherchant une solution particulière deux fois dérivable, développable en série trigonométrique.

Exercice 1611. A l'aide de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ pour $|x| \leqslant \pi$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 1612. Soit f et g les fonction 2π périodiques définies par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leqslant 0) \\ 1 & (0 < x \leqslant \pi) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \pi + x & (-\pi < x \leqslant 0) \\ \pi - x & (0 < x \leqslant \pi) \end{cases}$$

a) Faire un dessin.
b) Calculer les coefficients de Fourier des fonctions f et g.
c) En déduire les sommes des séries $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$, $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
d) En déduire les sommes des séries $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ en bidouillant.

Exercice 1613. En utilisant la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2(2\pi - x)^2$ pour $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, calculer les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$.

Exercice 1614. A l'aide de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \alpha^2)^2}.$$

Exercice 1615. On pose $f(t) = |\cos t|$ pour $t \in \mathbb{R}$.
a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
b) En déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Exercice 1616. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de période T sur $\mathbb{R}$. Prouver que

$$\int_0^T \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi} \int_0^T \left[f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \left| \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t \right|^2.$$

Question subsidiaire : étudier les cas d'égalité.

Exercice 1617. Soit Montrer que les seules fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. On suppose qu'il existe deux constantes $\lambda > 1$ et $M > 1$ telles que

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M\lambda^n \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}).$$

Montrer que f est un polynôme trigonométrique (i.e. une somme finie de fonctions du type $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \cos(nx)$). Réciproque ?

<u>Exercice</u> 1618. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$ pour $|t| \leqslant \pi$. Étudier la convergence de la sériee de Fourier de f et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

<u>Exercice</u> 1619. Soit $r \in \left]-1, 1\right[$ et soient f_r et g_r les fonctions définies par

$$f_r(t) = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} \quad \text{et} \quad g_r(t) = \frac{r \sin t}{1 - 2r\cos t + r^2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a) Sans faire de calculs d'intégrales, montrer que

$$f_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nt) \qquad \text{et} \qquad g_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(nt) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

b) En déduire les coefficients de Fourier de f_r et g_r.
c) On pose $G_r(t) := \frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos t + r^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^{2\pi} G_r(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 0$.

[1]<u>Exercice</u> 1620. Pour deux applications $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques, on pose

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a) Montrer que la fonction $f \star g$ est définie, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de $f \star g$ en fonctions de ceux de f et de g.

$\frac{1}{2}$<u>Exercice</u> 1621. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
a) Trouver une relation entre les coefficients de Fourier de f et de f'.
b) Lorsque $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, prouver que

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

c) Étudier les cas d'égalités.

<u>Exercice</u> 1622. Soit f l'application impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
a) Étudier le développement en série de Fourier de f.
b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

<u>Exercice</u> 1623. Pour chaque nombre réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on note f_x l'unique fonction paire et 2π-périodique vérifiant $f(t) = \max\{0, 1 - \frac{t}{2x}\}$ lorsque $0 \leqslant t \leqslant \pi$.
a) Développer f_x en série de Fourier.
b) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(kx)}{k^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^4(kx)}{k^4}.$$

Exercice 1624. a) Établir l'identité

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) En déduire que

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 1625. a) En justifiant soigneusement, calculer la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

b) En utilisant la fonction impaire et 2π-périodique g définie par $g(x) = xf(1)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et par $g(x) = f(x)$ pour $1 \leqslant x \leqslant \pi$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$$

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n}{n^4}$.

Exercice 1626. Soit $\alpha \in [0, +\infty[$ et soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $-\pi < x \leqslant \pi$.
a) Montrer que f est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
b) Déterminer le développement en série de Fourier de f (faire 2 cas selon que $\alpha \in \mathbb{N}$).
c) Pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-\alpha^2}$.
d) En déduire que

$$\frac{1}{\tan t} = \frac{1}{t} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{(n\pi)^2 - t^2} \qquad (0 < t < \pi)$$

Exercice 1627. a) Pour $r \in]-1, 1[$, calculer $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx)$.
b) Soit $a > 0$. Utiliser le calcul précédent pour trouver le développement en série de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x) + \operatorname{ch} a} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

c) En déduire $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\cos t + \operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1628. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) := \max\{0, \sin x\}$.
a) Série de Fourier de f ?
b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

[1]Exercice 1629. a) Développer la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\sin x)$ en série de Fourier.
b) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

86. Champs de vecteurs

(MP) ¡Exercice 1630. Calculer le flux du champ $\vec{V}(x,y,z) := (x,y,-z)$ au travers de la surface

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

(MP) ¡Exercice 1631. Calculer le flux du champ vectoriel $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ traversant la sphère de centre O et de rayon 1.

87. Potentiel scalaire

Exercice 1632. Déterminer une fonction $f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (un potentiel scalaire) telle que

$$\mathrm{d}f = (2x\cos y - y^2 \sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

88. Potentiel vecteur

Exercice 1633. a) Déterminer un potentiel vecteur $f = (P,Q,R)$ tel que

$$\vec{\mathrm{rot}} f = \big(x^2, y^2, -(2z+a)(x+y)\big) \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).$$

b) Si S désigne une surface orientée de bord ∂S, en déduire que

$$\iint_S \big(x^2\,\mathrm{d}y\Lambda\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\Lambda\,\mathrm{d}x - (2z+a)(x+y)\,\mathrm{d}x\Lambda\,\mathrm{d}y\big) = \int_{\partial S}(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z).$$

(MP) ¡Exercice 1634. Déterminer $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour que $\vec{V}(x,y,z) := \big(1-x^2, f(y), z(2x-y)\big)$ soit un champ de rotationnels. Trouver alors un potentiel vecteur.

89. Indications

104. Introduire la perpendiculaire commune à D et D'.

122. On pourra travailler dans le repère de centre M d'axes la tangente et la normale en M à la parabole.

123. On pourra travailler dans le repère de centre M d'axes la tangente et la normale en M à l'ellipse.

170. choisir un bon repère et paramétrer.

173. utiliser les symétries et paramétrer.

321. Au besoin, on pourra procéder à un changement d'indices.

322. a) On pourra chercher une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
b) Au besoin, représenter $f(m,n)$ pour $0 \leqslant m \leqslant 4$ et $0 \leqslant n \leqslant 4$.
d) Étant donnée une surjection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on pourra poser

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n := \begin{cases} \text{si le } n+1^{\text{ième}} \text{ chiffre après la virgule de } f(n) \text{ est } 6 \\ 6 \text{ sinon} \end{cases}$$

et obtenir une contradiction en considérant le nombre réel.

333. c) On pourra se ramener au cas d'une matrice $M(x,y,z)$ pour lesquels les nombres x, y et z sont des entiers n'ayant aucun facteur premier en commun.

373. On commencera par établir cette propriété pour $P = X$.

479. Utiliser la méthode diabolique

494. Faire apparaitre une récurence linéaire et en déduire une expression de u.

496. Résoudre la récurrence linéaire sans second membre, puis trouver une solution particulière constante.

508. b) on rappelle que les $\{E_{i,j}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

542. développer par rapport à la première colonne puis procéder par récurrence.

543. Notant $M := (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, Introduire le polynôme $P := \text{dét}(A + XM)$, dont l'on determinera le degré puis l'expression.

544. Introduire le polynôme $P := \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & X & X^2 & \dots & X^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ dont on cherchera le degré, puis les racines et l'expression factorisée, avant de faire une récurrence

545. Développer par rapport à la première colonne pour obtenir une récurrence linéaire

548. essayer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

552. Transformer en matrice diagonale

553. Faire $L_2 - L_1 \to L_2$, $L_3 - L_1 \to L_3$, $L_1 - C_2 - C_3 \to C_1$, $L_1 - bL_2 \to L_1$ puis développer

554. Utiliser les formules de trigo pour $\cos p - \cos q$ et $\sin p - \sin q$

557. Faire $L_1 - \sum_{2\leqslant k\leqslant n} L_k \to L_1$

558. Faire $L_k - L_1 \to L_k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$ puis $L_1 - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{L_k}{k+1} \to L_1$

561. Montrer que $D_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \lambda_1 D_{n-1}(\lambda_2 - \lambda_1, \cdots, \lambda_n - \lambda_1)$ puis intuiter une proposition de récurrence

562. Remarquer que l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda D + I_n \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})\}$ est non vide.

566. faire $L_k - L_{k-1} \to L_k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$

567. développer par rapport à la première colonne puis procéder par récurrence.

568. Décomposer la matrice A comme un produit $A = BC$ de matrices dont le déterminant est facile à calculer.

569. b) Remarquer que l'ensemble $\{\mu \in \mathbb{C}^* : \mu A + I_n \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})\}$ est non vide.

571. Faire $C_k - C_1 \to C_k$ pour $\leqslant k \leqslant n$ puis $L_k + L_n \to L_k$ pour $1 \leqslant k < n$

607. 2) Utiliser la seconde caractérisation des matrices diagonalisables.

622. Diagonaliser !

625. c) Utiliser la seconde caractérisation des matrices diagonalisables

689. 2) On pourra écrire $\| p(x_1 + \lambda x_2) \| \leqslant \| x_1 + \lambda x_2 \|$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

751. Utiliser Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell$ en remarquant que les colonnes de A forment une famille orthonormale

752. Utiliser Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} y_{i,j}$

740. On pourra utiliser au moment opportun le résultat de l'exercice 732.

751. Utiliser Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell$ en remarquant que les colonnes de A forment une famille orthonormale

752. Utiliser Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} y_{i,j}$

968. On pourra utiliser le changement de variable défini par

$$\begin{cases} u = x^{-1} + y^{-1} \\ v = x + y \end{cases}$$

986. On pourra utiliser la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) := f(x) - x$.

1048. Procéder au changement de variable $u = xy$ et $v = x/y$ (poser $f(x, y) = g(u, v)\Big)$.

1049. Procéder au changement de variable $u = xy$ et $v = x/y$.

1058. On pourra vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1061. On pourra utiliser la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1064. On pourra raisonner par l'absurde.

1158. Procéder au changement de fonction inconnue $y = xz$.

1159. Procéder au changement de fonction inconnue $y = xz$.

1160. Procéder au changement de fonction inconnue $y = xz$.

1161. Procéder au changement de fonction inconnue $z = y^{-2}$.

1162. Procéder au changement de fonction inconnue $z = y^{-3}$.

1173. On procédera au changement de fonction inconnue $f(x) = y(x)^{-3}$.

1191. Procéder au changement de variable $x = \tan t$.

1192. Procéder au changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

1204. On pourra remarquer que la fonction $g = y'' - y$ satisfait une équation différentielle plutôt sympathique.

1244. On utilisera chasles pour écrire que $u_n = \int_0^a + \int_a^1$ en utilisant un nombre $a < 1$ proche de 1.

1245. Faire une intégration par partie.

1248. Commencer par encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1251. On pourras scinder l'intégrale en deux et utiliser la formule de la moyenne.

1258. On pourra poser $\alpha_n := \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ et majorer séparément les intégrales $\int_0^{\alpha_n}$ et $\int_{\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}}$.

1276. On pourra calculer $J_n := I_{n+1} - I_n$ et $K_n := J_{n+1} - J_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1313. Faire un DL en 0 et majorer en $+\infty$

1314. Minorer par 1

1315.
En 0 : majorer en module par $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ puis trouver un équivalent.
en $+\infty$: trouver un équivalent.

1316. Utiliser une primitive du cours ou procéder au changement de variable $x = \operatorname{ch} t$.

1320. procéder au changement de variable $t = x^6$.

1321. Multiplier en haut et en bas par $\operatorname{sh} x$, utiliser que $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$, procéder au changement de variable $u = \operatorname{ch} x$, puis primitiver.

1322.
En 0 : Utiliser que $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et le théorème d'intégration des équivalents
En $+\infty$: intégrer deux fois par parties et utiliser la majoration $0 \leqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \quad (x \to +\infty)$.

1323.
En 0 : trouver un équivalent
En $+\infty$: pour $\alpha \geqslant 0$, intégrer par partie et utiliser la convergence absolue.
Pour $\alpha < 0$, prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2n\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k<n} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(t)}{(t+2k\pi)^\alpha} - \frac{\sin(t)}{(t+2k\pi+\pi)^\alpha} \right) \mathrm{d}t =$ $+\infty$.

1324. Pour la convergence, trouver une limite en 0. Pour le calcul, intégrer par partie puis primitiver une fraction rationnelle.

1325. Intégrer par partie, en dérivant $\ln(1+1/x^2)$, puis primitiver une fraction rationnelle.

1326. Intégrer par partie

1327.
En 0 : trouver une limite.
En $+\infty$: Trouver un développement asymptotique de $\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ avec un reste $o(1/x^2)$, intégrer par partie puis utiliser la convergence absolue

1328. Minorer pr $\frac{1}{\mathrm{e}x}$

1329. Trouver un développement asymptotique de $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ en $+\infty$ avec un reste $o(1/x)$.

1330. Procéder au changement de variable $x = \mathrm{e}^u$ puis utiliser que $\cos(u) = \frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}$.

1331. Procéder au changement de variable $x = \ln(u)$, intégrer par partie puis utiliser la convergence absolue.

1332. Procéder au changement de variable $x = \frac{1}{u}$, puis utiliser Chasles pour écrire que

$$I = \int_1^\infty \frac{u - [u]}{u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{k\geqslant 1} \int_0^1 \frac{u}{(u+k)^2}\,\mathrm{d}u.$$

Enfin on sommera en utilisant les sommes telescopiques

1333. Intégrer par partie pour montrer que $I = 2a^2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - \pi a$ puis procéder aux changements de variables $x = au$ puis $u = \frac{1}{x}$.

1334. Procéder au changement de variable $x = u^n$ puis intégrer par partie $n-1$ fois l'exponentielle.

1335. Procéder au changement de variable $x = \mathrm{e}^u$, décomposer la fraction rationnelle en éléments simples puis primitiver.

1336. Multiplier en haut et en bas par $\operatorname{ch} x$, utiliser que $1+\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$, procéder au changement de variable $u = \operatorname{sh} x$, puis primitiver.

1340. c) étudier $I(1/x)$.

1347. 2) On pourra introduire la fonction $t \mapsto \frac{t \ln t}{1-t^2}$.

1349. 1) Commencer par fixer $x \in \mathbb{R}$, puis étudier l'existence de $I(x)$.

1583. $f(t) = \frac{x}{1-x}$

1610. Utiliser le résultat a) de l'exercice 1607.

90. Notions

490 : Déterminant

530 : Opérations élémentaires—$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

542 : développement par rapport à une colonne—récurrence—n-linéarité

543 : Polynômes—Opérations élémentaires—Développement par rapport à une colonne—degré

544 : Polynômes—Racines—Factorisation—Récurrence

545 : Développement par rapport à une colonne—Determinant par bloc—Récurrence linéaire—Sommes geometriques

549 : Operations Elementaires

550 : Operations Elementaires

551 : Operations Elementaires

552 : Operations elementaires

553 : Operations Elementaires

554 : Operations elementaires—Trigonometrie

555 : Operations elementaires

556 : Operations Elementaires

561 : Operations elementaires—determinant par blocs—Recurrence

567 : développement par rapport à une colonne—récurrence—n-linéarité

568 : binôme de Newton

91. Solutions

1.
a. Faux : prendre $x = 0$.
b. Vrai.
c. Faux : prendre $x = 1$; alors $x^2 - 4 < 0$ ne peut pas être gal à une racine carrée.
d. Vrai.
e. Vrai.
f. Vrai.
g. Vrai : prendre $x = \frac{1}{4}$.
h. Vrai : prendre $x = 0$.
i. Vrai : utiliser les variations de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - e^x$.
j. Faux : car $\forall x > 0, \ln x - \ln(2x) = -\ln 2 \neq 3$.
k. Faux : car $\forall x \geqslant 0, 3x + 5 \geqslant 5$.
l. Vrai : prendre $x = -\sqrt{e^6 + 1}$.

2.
a. $\Longrightarrow$ directement, et $\Longleftarrow$ par la contraposée.
b. Montrer que n^2 est pair $\Longleftrightarrow$ n est pair, et que n est pair $\Longleftrightarrow$ n^3 est pair, puis transitivité de l'équivalence.
c. Implication sans problème, réciproque fausse en prenant $2 \times 3^2 + 1 = 10$ impair, alors que 3 est impair.
d. Aligner les implications. Réciproque fausse : il suffit de prendre $x = -\frac{3}{2}$.
e. Aligner les équivalences.

3.
$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=1}^{n} 3k + 5 = 3\sum_{k=1}^{n} k + 5\sum_{k=1}^{n} 1 = 5n + 3\sum_{k=1}^{n} k = 5n + 3\frac{n(n+1)}{2},\\
S_2 &= \sum_{i=1}^{2n} 3^{i+n} = 3^n \sum_{i=1}^{2n} 3^i = 3^n \frac{3^{2n+1} - 3^1}{2},\\
S_3 &= \sum_{n=0}^{50} \left(\frac{5}{n+3} - \frac{5}{n+4}\right) = 5\sum_{n=0}^{50} \frac{1}{n+3} - 5\sum_{n=0}^{50} \frac{1}{n+4}\\
&= 5\sum_{n=3}^{53} \frac{1}{n} - 5\sum_{n=4}^{54} \frac{1}{n} = \frac{5}{3} - \frac{5}{54} = \frac{85}{54},\\
S_4 &= \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \left(3(-1)^n + \frac{4}{n+1}\right) = (n+1)\left(3(-1)^n + \frac{4}{n+1}\right) = 4 + 3(n+1)(-1)^n,\\
S_5 &= \sum_{3 \leqslant k \leqslant n+3} \left((k-3)^2 + \frac{5}{k-2} - (k-3)\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(j^2 + \frac{5}{j+1} - j\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n} j^2 - \sum_{j=0}^{n} j + 5\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}.
\end{aligned}
$$

4. $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{49} (2k+1)$, $S_2 = \sum_{i=0}^{n} x^i$, $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{n+2} \frac{k}{3^k}$, $S_4 = \sum_{i=0}^{n+2} 3^{2i}$, $S_5 = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2j\sqrt{2j}}$.

103. a) $\Omega : (1,1,1)$, $R = \sqrt{5}$.
b) $(ABC) : x + y + z = 6$. $(ABD) : 4x - 2y + z = 3$. $(ACD) : x + 4y - 2z = 3$. $(BCD) : 7x + y - 5z = 12$.
c)
$$
I : (a,b,c) \iff \begin{aligned} 6 - a - b - c &= r\sqrt{3}\\ 4a - 2b + c - 3 &= r\sqrt{21}\\ a + 4b - 2c - 3 &= r\sqrt{21}\\ 12 - 7a - b + 5c &= r\sqrt{75} \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2a &= 9 - 2\sqrt{7}\\ 2b &= 6 - \sqrt{7}\\ 2c &= 3\\ 2r &= \sqrt{21} - 2\sqrt{3}. \end{aligned}
$$

104. $d = 4\sqrt{19}$ avec $H : (-2/19, 28/19, 35/19)$ et $K : (-6/19, 40/19, 23/19)$ les points de la perpendiculaire commune appartenant respectivement à D et D'.

148. Soit O' ce centre. Les triangles MPQ et MAB sont semblables, donc O' est l'image de O par l'homothétie de centre M qui transforme A en P.

Soit $(A'B')$ la symétrique de (AB) par rapport O. D'après l'homothétie,
$$\frac{O'M}{\mathrm{d}(O',\Delta)} = \frac{OM}{\mathrm{d}(O,(AB))} = (cste) = \frac{OM - O'M}{\mathrm{d}(O,(AB)) - \mathrm{d}(O',\Delta)} = \frac{OO'}{\mathrm{d}(O',(A'B'))}.$$
Donc O' décrit une partie d'une conique de foyer O et de directrice $(A'B')$.

474. $\mathrm{rang}(\{a,b,c,d\}) = 2$.

481. $\mathrm{rang}(A) = 3$.

482. $\mathrm{rang}(A) = 4$.

483. $\mathrm{rang}(A) = 2$.

484. $\mathrm{rang}(A) = 3$.

485. $\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ si } \lambda \notin \{-20,-3\} \\ 2 \text{ si } \lambda \in \{-20,-3\} \end{cases}$ et $\begin{cases} 5C_2 + C_3 = 0 \text{ si } \lambda = -20 \\ L_1 + L_3 = 0 \text{ si } \lambda = -3 \end{cases}$

490. Comme (E) admet une solution si, et seulement si ($\lambda \notin \{1,-3\}$) ou ($\lambda = 1$ et $a = 1$) ou ($\lambda = -3$ et $a \in \{i,-1,-i\}$)

496. $u_n = -1 + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

530. $D = 0$ car $C_1 + C_3 = 2\cos(a)C_3$ pour tout a, d'après la relation $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

540. $D = 1$.

543. $D = \begin{cases} \dfrac{c}{c-b}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) - \dfrac{b}{c-b}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - c) \text{ si } c \neq b \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) + b\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\lambda_j - b) \text{ si } c = b \end{cases}$

544. $V_n(a_0,\cdots,a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$

545. $D_n(a) = \begin{cases} \dfrac{1-a^{2n+2}}{1-a^2} \text{ si } a^2 \neq 1 \\ n+1 \text{ si } a^2 = 1 \end{cases}$

549. $D = 0$.

550. $D = (a+b+c)^3$.

551. $D = (b-a)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$.

552. $D = (-1)^{[n/2]}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

553. $D = 2abc(a+b+c)^3$.

554. $D = 4\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)$

555. $D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

556. $D := 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$

557. $D = 2 - n$.

558. $\left(3 + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2}{k}\right)\frac{(n+1)!}{2}$

559. S'il existait un tel endomorphisme, on aurait
$$\mathrm{dét}(f)^2 = \mathrm{dét}(f^2) = \mathrm{dét}(-\mathrm{Id}_E) = -1\mathrm{dim}(E) = -1,$$
ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

561. $D_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = \lambda_1\prod_{i=2}^{n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})$

566. $detA_p = \text{dét}\, A_{p-1} = \cdots = \text{dét}\, A_0 = 1$

571. $(-2)^{n-2}(1-n)$

576. 1 est valeur propre de multiplicité 3 et -1 est valeur propre de multiplicité 1.

577. Le spectre de T est $]-1,1]$, la fonction $x \mapsto \lambda^{[x]}$ est un vecteur propre pour la valeur propre λ.

584. Les valeurs propres sont $\sin\alpha + \sin 2\alpha$, $-\sin\alpha$ et $-\sin 2\alpha$.

585. $\lambda \in]0,1[$ de vecteur propre associé $f(x) = Cx^{1/\lambda - 1}$

597. $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

598. $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

599. $P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

600. $P := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

602. $P := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

604. $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

605. $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

606. $P := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

616. $A = PDP^{-1}$ avec $P := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, d'ou
$A^k = \begin{pmatrix} -4(-2)^k + 5 & (-2)^k - 4 & 2(-2)^k - 2 \\ -2(-2)^k + 2 & 2(-2)^k - 1 & (-2)^k - 1 \\ -6(-2)^k + 6 & 6(-2)^k - 6 & 3(-2)^k - 2 \end{pmatrix}$

635. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

636. $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

640. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

641. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

642. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

643. $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

644. $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

645. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

646. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

655. $\begin{cases} x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t} \\ y = (\gamma t + \beta)e^{2t} \\ z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t} \end{cases}$

656. $\begin{cases} x = \dfrac{-3\cos t - 13\sin t}{25} + (at + b)e^{2t} \\ y = \dfrac{-4\cos t - 3\sin t}{25} + (at + a + b)e^{2t} \end{cases}$

730. $P := \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1313. L'intégrale converge.

1314. L'intégrale diverge

1315. L'intégrale converge

1316. $I := \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

1320. $I := \frac{\pi}{12}$

1321. $I := \ln \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e} + 1}$.

1322. $I(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ et $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1323. l'intégrale I converge si, et seulement si $0 < \alpha < 2$.

1324. $I = \dfrac{\pi}{2} - \ln 2$

1325. $I = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$

1326. L'intégrale I diverge pour $n \in \{0, 1\}$. Pour $n \geqslant 2$, on a $I = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.

1327. L'intégrale est semi-convergente

1328. L'intégrale diverge

1329. L'intégrale diverge

1330. $I := \dfrac{1}{2}$.

1331. l'intégrale converge.

1332. $I = \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \left(\ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \gamma$, la constante d'Euler γ étant définie par $\gamma := \displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$.

1333. $I = -\pi a + \pi \ln(a)$.

1334. $I = n!$.

1335. $I = \frac{\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}}$.

1336. $I = \pi$.