Chapitre 1 : Fonctions de références.

1. Rappels.

1.1. Application et fonction.

Déf 1 :

Soient E et F deux ensembles.

- Une application f est définie par la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et d'une relation qui à tout élément x de E associe un unique élément y de F noté $f(x)$ et appelé image de x par f.
- Si $y = f(x)$, on dit que x est un antécédent de y par f.
- On note $\mathcal{A}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Pour symboliser une application f de E dans F, on note généralement f : $\begin{matrix} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$.

Déf 2 :

Soient E et F deux ensembles.

- Une fonction f est définie par la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et d'une relation qui à tout élément x de E associe au plus un élément y de F noté $f(x)$ et appelé image de x par f.
- Une fonction f de E dans F est donc une application définie sur une partie de E.
- L'ensemble des points de E où f est définie est l'ensemble de définition de f , noté D_f.

1.2. Encadrement de fonctions.

On considère une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

1.2.1. Maximum et minimum.

Déf 3 : Soit x_0 unélément de A ($x_0 \in A$) .

- On dit que f atteint un maximum absolu ou global en x_0 si $\forall x \in A$(lire pour tout x de A), $f(x) \leq f(x_0)$.

On note $\max\limits_A (f) = f(x_0)$.

- On dit que f atteint un minimum absolu ou global en x_0 si $\forall x \in A,\ f(x) \geq f(x_0)$.

On note $\min\limits_A (f) = f(x_0)$.

Un extremum de f sur A est soit un minimum soit un maximum.

Si cette propriété est simplement vérifiée sur un voisinage de x_0, on parle d'extremum relatif ou local.

1.2.2. Majorant et minorant.

Déf 4 :

- f est majorée sur A ssi il existe un réel M tq $\forall x \in A, f(x) \leq M$.

On dit que M est un majorant de f sur A.

- f est minorée sur A ssi il existe un réel m tq $\forall x \in A, f(x) \geq m$.

On dit que m est un minorant de f sur A.

- f est bornée sur A ssi f est minorée et majorée sur A.

1.3. Monotonie.

Déf 5 :

- f est croissante sur A ssi $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est strictement croissante sur A ssi $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur A ssi $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(resp\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.

- f est monotone sur A ssi f est croissante ou décroissante sur A.

Prop 1 :

Si f et g sont croissantes sur A (resp décroissantes), alors $f+g$ est croissante sur A (resp décroissante).

Prop 2 : (composition de fonctions)

Si f est une fonction croissante sur A et si g est croissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est croissante sur A.
Si f est une fonction décroissante sur A et si g est croissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur A.
Si f est une fonction croissante sur A et si g est décroissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur A.
Si f est une fonction décroissante sur A et si g est décroissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est croissante sur A.

1.4.Périodicité.

Déf 6 :

f est périodique de période T $(T > 0)$ ssi $\forall x \in D_f,\ x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

Pratique :

La périodicité d'une fonction f nous permet de limiter son étude à un intervalle de longueur T ($[0,T] \cap D_f, \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \cap D_f \ldots$).

On obtient ensuite la représentation graphique de f sur D_f dans un repére orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en effectuant des translations de vecteurs $nT\vec{i}$ avec $n \in Z$.

Remarque : Le nombre T n'est pas unique . D'ailleurs, si un réel T convient, il est évident que $2T, 3T, \ldots, nT$ conviennent. En général, l'ensemble des périodes d'une fonction périodique admet un plus petit élément. On dit alors que ce réel est la période de f.

2. Fonctions puissances entières.

Déf 7 :

-. On définit, par récurrence, les puissances successives du réel x par :

$x^1 = x$ et, pour tout entier naturel non nul n, $x^{n+1} = x^n \times x = x \times x^n$.

- Soit n un entier naturel non nul.

On appelle fonction puissance p_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{array}{rl} p_n : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^n \end{array}$.

Remarque :

Pour $n = 0$, la fonction puissance p_0 est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{array}{rl} p_0 : & \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ & x \mapsto 1 \end{array}$

Propriétés algébriques :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \begin{array}{l} x^a x^b = x^{a+b}, \quad (xy)^a = x^a y^a, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \\ x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}, \quad x^0 = 1 \quad \text{et} \quad \dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \end{array}.$$

Propriétés analytiques :

- Les fonctions puissances entières sont continues, dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $p_n'(x) = nx^{n-1}$.

3. Fonction valeur absolue.

Déf 8 :

On appelle fonction valeur absolue la fonction, notée $x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

Remarques :
- la valeur absolue du réel x correspond à la distance entre x et 0.
- $|x| = \max(-x, x)$.

Propriétés algébriques :
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0)$.
- $\forall (x,l) \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \left(|x - l| \leq \varepsilon \right) \Leftrightarrow (l - \varepsilon \leq x \leq l + \varepsilon)$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$
- $|xy| = |x||y|$.

Propriétés analytiques :
La fonction valeur absolue est une fonction paire, positive et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et non en 0.

4. Fonction racine carrée.

Déf 9 :

- Soit a un réel positif. On appelle racine carrée du réel a le réel positif noté $\sqrt{a}$ tel que $(\sqrt{a})^2 = a$, c'est à dire l'unique solution dans $[0;+\infty[$ de l'équation $x^2 = a$.

- On appelle fonction racine carrée la fonction : $\sqrt{} : \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$.

Propriétés algébriques :
- $\forall (a,b) \in ([0;+\infty[)^2, \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{a^2} = |a|$.

Propriétés analytiques :
- La fonction racine carrée est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif, on a : $\left(\sqrt{}\right)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. Logarithme et exponentielle.

5.1. Fonction exponentielle.

Déf 10 :

On appelle fonction exponentielle, notée $\exp$, la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, prenant la valeur 1 en 0 et dont la fonction dérivée est égale à elle même. Autrement dit, $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ (\exp)'(x) = \exp x$.

Propriétés algébriques :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) > 0$.
- $\exp(x + y) = \exp x \times \exp y$.
- $\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x - y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}, \exp(qx) = (\exp x)^q$.

Remarques : Notons $\exp(1) = e$.

- Ces propriétés sont les propriétés habituelles des fonctions puissances. Elles justifient la notation de la fonction exponentielle par : $\exp(x) = e^x$.

- La fonction exponentielle va nous permettre de définir les fonctions puissances pour des puissances réelles.

Propriétés analytiques :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est continue ,dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Conséquence : comme la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. L'application $\exp$ admet une application réciproque, appelée logarithme népérien, notée $\ln$.

5.2. Logarithme népérien.

Déf 11 :

On appelle fonction logarithme népérien, notée $\ln$, la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est à dire la fonction :

$$\ln \;:\; \begin{array}{c}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array} \quad \text{tel que } \exp(\ln x) = x.$$

Remarque :

on peut définir la fonction logarithme népérien comme étant la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1.

Pour $x > 0,\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$

Propriétés algébriques :

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$

- $\ln 1 = 0$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall q \in \mathbb{Q},\ \ln(a^q) = q \ln a.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x.$

Propriétés analytiques :

- La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue ,dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\forall x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exercices corrigés :

Exercice 1 : (**Fractions**)

Objectif : revoir les opérations sur les fractions.

Sous réserve d'existence (dénominateurs non nuls) réduire les fractions sous la forme $\left(\frac{x}{y}\right)$:

1. $A_1 = \frac{\frac{a}{b}}{c}$ 2. $A_1 = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{c}{a}}$ 3. $A_1 = \frac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{a}{b} + 1}$ 4. $A_1 = \frac{\frac{b}{a+b} - 1}{\frac{b}{a-b} - 1}$.

Exercice 2 : (**puissances et racine**)

Objectif : revoir les opérations algébriques sur les puissances et la racine, propriétés à connaître parfaitement. (voir 2 et 4)

1. Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $A = (3 + \sqrt{2})^2$ b. $B = \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2$ c. $C = (a + b + c)^2$ d. $D = (x - 2y)^3$

2. Ecrire les expressions suivantes sous la forme $(x)^n$:

a. $A = \dfrac{(6)^3(3)^3}{8}$ b. $B = (5)^5(5)^{-2}$ c. $C = \sqrt{3} \times (9)^4$

Exercice 3 : (**résolutions d'inéquations**)

Objectif : revoir les opérations sur les inégalités et rédiger correctement la résolution d'une inégalité :

Première étape : déterminer le domaine D d'étude càd le domaine où les fonctions en jeu sont définies

Deuxième étape : Préciser pour quelles valeurs de x vous allez résoudre l'inégalité (ou égalité) en rédigeant ainsi : soit $x \in D$.

Troisième étape : résoudre par équivalence cà d en utilisant le lien logique $\Leftrightarrow$ (on reverra en cours la différence entre implication $\Rightarrow$ et équivalence)

Quatrième étape : conclure correctement en donnant l'ensemble des solutions S.

Rappels :

Opérations sur les inégalités :

Addition :

1. si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$

Produit :

2. si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $a \times c \leq b \times c$

3. si $a \leq b$ et $d \leq 0$, alors $a \times d \geq b \times d$

(la multiplication par un nombre négatif inverse l'ordre de l'inégalité)

4. si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq a \times c \leq b \times d$.

Erreur classique : on ne peut pas soustraire des inégalités.

Ainsi si $a \leq b$ et $c \leq d$, nous n'avons pas : $a - c \leq b - d$.

Il faut utiliser le point 3. : $-d \leq -c$

puis le point 1. : $a - d \leq b - c$.

Résoudre les inéquations suivantes , après avoir déterminé leur domaine d'étude :

1. $2x - 1 \leq 6x - 5$
2. $9x^2 - 36 \geq 0$
3. $\dfrac{x-3}{x+1} \leq 0$ (utiliser un tableau de signe)
4. $\dfrac{(2x-1)(3x+1)^2}{(x-2)^5(x+1)} < 0$.(utiliser un tableau de signe)
5. $\dfrac{x+2}{x+1} \leq 1$

(regrouper les termes du même côté pour "comparer" à 0 , réduire au même dénominateur puis utiliser un tableau de signe)

6. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{8}{x} \geqslant 4$.

(regrouper les termes du même côté pour "comparer" à 0 , réduire au même dénominateur puis utiliser un tableau de signe)

7 . $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{(x-1)}$

(regrouper les termes du même côté pour "comparer" à 0 , réduire au même dénominateur, factoriser puis utiliser un tableau de signe)

8. $\dfrac{(2x-1)\ln x}{2-x} > \ln x$

Exercice 4 :

Objectif : apprendre à utiliser les variations d'une fonction pour prouver une inégalité.

1.a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp(-x) - (1-x)$

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(-x) \geq 1 - x$

2. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq \ln(1+x)$

Exercice 5 :

Objectif : une étude de fonction doit nécessairement commencer par la détermination de son ensemble de définition (voir 1.1 Déf 2)

Vous avez donc trois exemples pour vous entraîner à ce type de question.

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

(utiliser l'ensemble de définition de la racine et résoudre une inégalité en $\ln$)

2. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(utiliser l'ensemble de définition de la racine et une identité remarquable)

3. $g(x) = \sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}$

(utiliser un tableau de signe et différence avec 2 ?)

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Etudier les variations de f .

Exercice 7 :

Objectif : utiliser les propriétés algébriques de $\exp$ et $\ln$ qui sont à connaître parfaitement .(voir 5.1. et 5.2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes, après avoir déterminé leur domaine d'étude : :

1. $e^{2x-3} = 1$
2. $\ln(4x-9) = 0$
3. $\exp(x^2+1) = \exp(5(x-1))$
4. $\ln(x+3) = \ln(x^2+3x)$
5. $\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$
6. $2\ln(3-x) \leq \ln(x+1) + \ln(x-2)$.
7. $\exp(2x) - 5\exp(x) + 6 < 0$

En conclusion voici la liste des savoir-faire que vous devez maîtriser :

- savoir simplifier, mettre au même dénominateur des fractions (exo 1)
- savoir utiliser les propriétés algébriques des puissances (exo 2)
- savoir effectuer sur les inégalités les opérations classiques et utiliser un tableau de signe. (exo 3)
- savoir montrer une inégalité en étudiant les variations d'une fonction. (exo 4)
- savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction. (exo 5 et exo 6)
- savoir utiliser les propriétés algébriques de $\exp$ et $\ln$. (exo 7)