# Correction de la fiche n°1 sur les fonctions de références.

**Exercice 1** : ( **Fractions** )

1. $A_1 = \dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$
2. $A_1 = \dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{a}{bc}$
3. $A_1 = \dfrac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{a}{b} + 1} = \dfrac{\frac{a^2-b^2}{b}}{\frac{a+b}{b}} = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$
4. $A_1 = \dfrac{\frac{b}{a+b} - 1}{\frac{b}{a-b} - 1} = \dfrac{\frac{b-a-b}{a+b}}{\frac{b-a+b}{a-b}} = \dfrac{\frac{-a}{a+b}}{\frac{2b-a}{a-b}} = -\dfrac{a(a-b)}{(a+b)(2b-a)}$.

**Exercice 2** : ( **puissances et racine** )

1. Développer et réduire les expressions suivantes :
a. $A = (3 + \sqrt{2})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 11 + 6\sqrt{2}$
b. $B = \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{6}\,\sqrt{3} + 3 = 9 - 6\sqrt{2}$
c. $C = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
d. $D = (x - 2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
2. Ecrire les expressions suivantes sous la forme $(x)^n$ :
a. $A = \dfrac{(6)^3(3)^3}{8} = \dfrac{(6)^3(3)^3}{2^3} = \left(\dfrac{6 \times 3}{2}\right)^3 = 9^3 = 3^6$
b. $B = (5)^5(5)^{-2} = 5^{5-2} = 5^3$
c. $C = \sqrt{3} \times (9)^4 = 3^{\frac{1}{2}} \times (3^2)^4 = 3^{\frac{1}{2}} \times (3)^8 = 3^{\frac{17}{2}}$

**Exercice 3** : ( **résolutions d'inéquations** )

1. Les fonctions $x \mapsto 2x - 1$ et $x \mapsto 6x - 5$ étant définies sur $\mathbb{R}$, le domaine d'étude de cette inégalité est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$2x - 1 \leq 6x - 5 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \Leftrightarrow x \geq 1$
Conclusion : $S = [1, +\infty[$.
2. La fonction $x \mapsto 9x^2 - 36$ étant définie sur $\mathbb{R}$, le domaine d'étude de cette inégalité est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$9x^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow (x \leq -2)$ ou $(x \geq 2)$
Conclusion : $S = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{x-3}{x+1}$ étant définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, le domaine d'étude de cette inégalité est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Utilisons un tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x-3}{x+1}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Conclusion : $S = ]-1, 3]$
4. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 2\}$.

On utilise un tableau de signes avec $(3x+1)^2 > 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $\frac{(2x-1)(3x+1)^2}{(x-2)^5(x+1)}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Conclusion : $S = ]-\infty,-1[ \cup \left]\frac{1}{2},2\right[$.

5. $\dfrac{x+2}{x+1} \leq 1$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ étant définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, le domaine d'étude de cette inégalité est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\dfrac{x+2}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} \leq 0$

Conclusion : $S = ]-\infty;-1[$

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{8}{x} \geqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-8x+16}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-4)^2}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0$

Conclusion : $S = \mathbb{R}^{+*}$.

7 .

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{(x-1)} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} \geq 0$

On utilise un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $x^2+1$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Conclusion : $S = ]-\infty;-1] \cup ]1;+\infty[$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$\dfrac{(2x-1)\ln x}{2-x} > \ln x \Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)\ln x}{2-x} - \ln x > 0 \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)\ln x > 0$

On utilise un tableau de signes :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\ln x\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

Conclusion : $S = ]0;1[ \cup ]1;2[$.

**Exercice 4** :

1.a.Les fonctions $x \mapsto \exp(-x)$ et $x \mapsto 1-x$ étant définies sur $\mathbb{R}$, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Par soustraction de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\exp(-x) + 1$.

Etudions le signe de $f'(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$-\exp(-x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \exp(-x) \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ f'(x) \leq 0$

En conclusion, $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

b. D'après le tableau de variation de $f$, $f$ admet en $0$ un minimum absolu ( voir 1.2.1 )
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(-x) \geq 1 - x$
2. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq \ln(1+x)$.
Une première méthode serait d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ et d'utiliser son tableau de variation pour conclure sur son signe.
Une deuxième méthode plus simple est d'utiliser l'inégalité prouvée en 1.b.
$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(-(-x)) \geq 1 - (-x) \Rightarrow \exp(x) \geq 1 + x$
La fonction $\ln$ étant croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exp(x) > 0$ et $1 + x > 0$, on obtient l'inégalité :
$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exp(x) \geq 1 + x \Rightarrow \ln(\exp(x)) \geq \ln(1+x) \Rightarrow x \geq \ln(1+x)$

**Exercice 5** :

1. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$
$Df = [e;+\infty[$
2. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
$Dh = ]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ ( voir exo 3 question 2)
3. $g(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$
$Dg = [2,+\infty[$

**Exercice 6** :

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$.
1) Déterminons l'ensemble de définition de $f$.
La fonction $f$ est définie pour $x + 1 \neq 0$ et $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) > 0$ donc $D_f = ]-\infty,-1[ \cup ]1,+\infty[$.
2) Etudions les variations de $f$ .
Par composition de fonctions dérivables, $f$ est dérivable sur $D_f$ et $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$.
$\forall x \in D_f, f'(x) > 0$
Donc $f$ est croissante sur $D_f$.

**Exercice 7** :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. ( la fonction exp étant définie sur $\mathbb{R}$ )
$e^{2x-3} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = \ln(1)$ ( on utilise $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$ voir 5.2 )
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
Conclusion : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
2. Cette égalité est définie ssi $4x - 9 > 0$
ssi $x \in \left]\frac{9}{4},+\infty\right[$
Soit $x \in \left]\frac{9}{4},+\infty\right[$.
$\ln(4x-9) = 0 \Leftrightarrow 4x - 9 = \exp(0)$ ( on utilise $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp(\ln x) = x$ voir 5.2 )
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$
Comme $\frac{5}{2} \in \left]\frac{9}{4},+\infty\right[$ ( solution compatible avec les conditions initiales )
$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
3. $\exp(x^2+1) = \exp(5(x-1))$
Soit $x \in \mathbb{R}$ . ( la fonction exp étant définie sur $\mathbb{R}$ )
$\exp(x^2+1) = \exp(5(x-1)) \Leftrightarrow \ln(\exp(x^2+1)) = \ln(\exp(5(x-1))) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5x - 5$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$
Conclusion : $S = \{2,3\}$
4. $\ln(x+3) = \ln(x^2+3x)$
Cette égalité est définie ssi $x^2 + 3x > 0$ et $x + 3 > 0$

ssi $x \in (]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[) \cap (]-3,+\infty[)$
ssi $x \in ]0,+\infty[$

Soit $x \in ]0,+\infty[$.

$\ln(x+3) = \ln(x^2+3x) \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$

Comme $1 \in ]0,+\infty[$ et $-3 \notin ]0,+\infty[$, $S = \{1\}$.

5. $\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$

Cette égalité est définie ssi $x^2+5x+6 > 0$ et $x+11 > 0$
ssi $x \in (]-\infty,-3[\cup]-2,+\infty[) \cap (]-11,+\infty[)$
ssi $x \in (]-11,-3[\cup]-2,+\infty[)$.

soit $x \in (]-11,-3[\cup]-2,+\infty[)$.

$\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11) \Leftrightarrow (x^2+5x+6) = (x+11) \Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 1$.

Conclusion : ces solutions étant compatibles avec les conditions initiales, $S = \{-5,1\}$.

6. $2\ln(3-x) \leq \ln(x+1)+\ln(x-2)$.

Cette inégalité est définie pour $x \in ]2,3[$.

$2\ln(3-x) \leq \ln(x+1)+\ln(x-2) \Leftrightarrow \ln((3-x)^2) \leq \ln((x+1)(x-2)) \Leftrightarrow (3-x)^2 \leq (x+1)(x-2) \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{5}$.

Conclusion : $S = [\frac{11}{5},3[$.

7. $\exp(2x)-5\exp(x)+6 < 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\exp(2x)-5\exp(x)+6 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ 6-5X+X^2 < 0 \end{cases}.$$

On détermine les racines du polynôme $P = 6-5X+X^2 = (X-2)(X-3)$

Donc $6-5X+X^2 < 0 \Leftrightarrow X \in ]2;3[$

$$\exp(2x)-5\exp(x)+6 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X \in ]2;3[ \end{cases} \Leftrightarrow 2 < e^x < 3$$

$\exp(2x)-5\exp(x)+6 < 0 \Leftrightarrow \ln 2 < x < \ln 3$ ( en utilisant la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Conclusion : $S = ]\ln 2, \ln 3[$.